В. И. ПИТЕРБАРГ, ст. науч. сотр., В. П. ПРИСЯЖНЮК, инж.,
Московский университет

АСИМПТОТИКА ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШОГО ВЫБРОСА ДЛЯ ГАУССОВСКОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

Поведение вероятности превышения высокого уровня стаци- ıнарным гауссовским процессом со степенным (с точностью до мед- ;енно меняющейся функции) поведением корреляционной функции ı нуле на фиксированном отрезке изучено достаточно хорошо [1, 2].)казалось, что методы, используемые в этом случае, могут быть ıаспространены на нестационарные гауссовские процессы с со- ıтветствующими ограничениями на корреляционную функцию. :. Берман [3] изучал поведение вероятности высокого выброса для локально-стационарного» гауссовского процесса с постоянной ди- персией, корреляционная функция $r(t, s)$ которого в окрестности :инии $t = s$ близка в некотором смысле к корреляционной функции тационарного процесса со степенным поведением в нуле. Для ıдного частного случая нестационарного процесса точная асимпто- ика получена А. Х. Симоняном [4]. В настоящей работе рассмо- рен случай существования конечного числа точек достижения бсолютного максимума у дисперсии.

В дальнейшем ξ_t, $t \in [0, 1]$ — гауссовский сепарабельный про- ,есс, $E\xi_t \equiv 0$; $R(t, s)$, $r(t, s)$ — ковариационная и корреляцион- ая функции соответственно; $R(t, t) = \sigma_t^2$, причем выполнены сле- ,ующие условия:

(I) σ_t имеет единственный абсолютный максимум в точке $t_M \in$; $[0, 1]$ и $\sigma_t = \sigma_{tM} - A\,|t - t_M|^\beta + o(|t - t_M|^\beta)$, $t \to t_M$, $\infty > \beta$, A, $t_M > 0$;

(II) $r(t, s) = 1 - D(t, s)\,|t - s|^\alpha + o(|t - s|^\alpha)$, $t \to t_M$, $s \to t_M$, $\alpha > 0$, $D = D(t_M, t_M) > 0$, $D(t, s)$ непрерывна в точке (t_M, t_M) локальная стационарность в точке t_M);

(III) существуют $\alpha_1 > 0$ и $t_0 > 0$ такие, что для всех t, s та- :их, что $|t - s| < t_0$ $|1 - r(t, s)| \leqslant C\,|t - s|^{\alpha_1}$.

Далее, $\varphi(u)$ — стандартная нормальная плотность, $\Psi(u) = u^{-1}\varphi(u)$,

$$\bar{\Phi}(u) = \int_u^\infty \varphi(t)\,dt, \quad \mathrm{R}(u) = \int_u^\infty \bar{\Phi}(t)\,dt.$$

Лемма 1. Пусть ξ_1, ξ_2 — гауссовские случайные величины с ıулевыми средними, единичными дисперсиями и корреляцией r. Тогда для x, $h > 0$

$$\Psi(x)(1 - x^{-2}) \leqslant \bar{\Phi}(x) \leqslant \Psi(x); \tag{1}$$

$$P\{\xi_1 > x, \xi_2 > x\} \leqslant (1 + r)\,\Psi(x)\,\bar{\Phi}\left(x\sqrt{\frac{1-r}{1+r}}\right); \tag{2}$$

$$P\{\xi_1 < x,\ \xi_2 > x+h\} \leqslant \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} x\Psi(x) R\left(\frac{hr}{\sqrt{1-r^2}} - x\sqrt{\frac{1-r}{1+r}}\right); \quad (3$$

$$R(x) \leqslant x^{-1}\Psi(x). \quad (4$$

Лемма 2. Пусть η_t — гауссовский сепарабельный стационар ный процесс со средним 0, дисперсией σ, для корреляционно функции которого справедливо разложение $r(t) = 1 - C|t|^\alpha +$ $+ o(|t|^\alpha)$, $t \to 0$, $C, \alpha > 0$.

Тогда

$$\lim_{u\to\infty}\left(\Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right)\right)^{-1} P\{\max_{t\in(0,Tu^{-\frac{2}{\alpha}})} \eta_t > u\} = H_\alpha(C^{\frac{1}{\alpha}}\sigma^{-\frac{2}{\alpha}}T),$$

$$H_\alpha(T) = 1 + \int_0^\infty e^s P\{\max_{t\in[0,T]} \chi(t) > s\}\, ds < \infty,$$

$\chi(t)$ — гауссовский процесс,

$$E\chi(t) = -|t|^\alpha, \quad \mathrm{cov}\{\chi(t_1), \chi(t_2)\} =$$
$$= -|t_1 - t_2|^\alpha + |t_1|^\alpha + |t_2|^\alpha,$$

причем $0 < H_\alpha = \lim_{T\to\infty} \frac{H_\alpha(T)}{T} < \infty$.

Доказательство лемм 1 и 2 можно найти в работах [1, 2].

Лемма 3. Пусть случайный процесс η_t удовлетворяет услови ям леммы 2. Тогда если $h(u) = (0, \delta(u))$, $\delta(u) = 0(u^{-\frac{2}{\alpha}})$, $u \to \infty$ то

$$\lim_{u\to\infty}\left(\Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right)\right)^{-1} P\{\max_{t\in h(u)} \eta_t > 0\} = 1.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. По лемме 2

$$\overline{\lim}\left(\Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right)\right)^{-1} P\{\max_{t\in h(u)} \eta_t > u\} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{u\to\infty}\left(\Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right)\right)^{-1} P\{\max_{t\in[0,\varepsilon u^{-\frac{2}{\alpha}}]} \eta_t > u\} =$$

$$= 1 + \int_0^\infty e^s P\{\max_{t\in[0,\varepsilon]} \chi(t) > s\}\, ds. \quad (5$$

Из неравенства (28) работы [5] следует, что подынтегральна функция в (5) мажорируется интегрируемой функцией, не завис цей от ε. Утверждение леммы следует теперь из того, что $\lim_{\varepsilon\to 0} P\{\max_{t\in[0,\varepsilon]} \chi_t > s\} = 0$ для всех $s>0$, и неравенства

$$P\{\max_{t\in h(u)} \eta_t > 0\} \geqslant P\{\eta_0 > 0\}.$$

Обозначим через $\mathcal{H}$ класс сужающихся интервалов $h(u)$ таких, то $h(u)\in[0, 1]$ и

$$h(u) = \begin{cases} [t_M - \delta(u), t_M + \delta(u)], & t_M \in (0, 1), \\ (0, \delta(u)), \ t_M = 0, \\ (1 - \delta(u), 1), \ t_M = 1, \end{cases}$$

де $\delta(u) \downarrow 0$ и $\frac{u^2\delta^\beta(u)}{\ln u} \to \infty$, $u \to \infty$.

Пусть $K = \{t : \sigma_t > 0\}$. Поскольку σ_t непрерывна в точке и $t_M > 0$, то $h(u) \leqslant K$, начиная с некоторого u, если $h(u)\in\mathcal{H}$.

Лемма 4. Для любого $h(u)\in\mathcal{H}$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{P\{\max_{t\in[0,1]} \xi_t > u\}}{P\{\max_{t\in h(u)} \xi_t > u\}} = 1.$$

Доказательство. Имеем

$$P\{\max_{t\in[0,1]} \xi_t > u\} = P\{\max_{t\in h(u)} \xi_t > u\} + \\ + P\{\max_{t\in h(u)} \xi_t < u, \max_{t\in[0,1]\setminus h(u)} \xi_t > u\}. \qquad (6)$$

Оценим второй член в правой части (6)

$$P\{\max_{t\in h(u)} \xi_t < u, \max_{t\in[0,1]\setminus h(u)} \xi_t > u\} \leqslant \\ \leqslant P\{\max_{t\in[0,1]\setminus h} \xi_t > u\} \leqslant P\left\{\max_{t\in K\setminus h} \frac{\xi_t}{\sigma_t} > \frac{u}{\bar\sigma_{h(u)}}\right\}, \qquad (7)$$

де $\bar\sigma_{h(u)} = \max_{t\in K\setminus h} \sigma_t$.

Разобьем интервалы, составляющие множество $[0, 1]\setminus h$, на инервалы K_i длины $t_1 > 0$. Тогда

$$P\left\{\max_{t\in K\setminus h} \frac{\xi_t}{\sigma_t} > \frac{u}{\bar\sigma_{h(u)}}\right\} \leqslant \frac{1+t_1}{t_1} \max_i P\left\{\max_{t\in K_i\cap K} \frac{\xi_t}{\sigma_t} > \frac{u}{\bar\sigma_{h(u)}}\right\}. \qquad (8)$$

Обозначим через $\tilde\eta_t$ гауссовский стационарный процесс со средним 0, дисперсией 1 и корреляционной функцией $\tilde r(t) = e^{-c|t|^\gamma}$, где $0 < \gamma < \min(1, \alpha_1)$. По условию (III) t_1 можно выбрать столь малым, чтобы выполнялось неравенство $\tilde{r}(t-s) \leqslant r(t, s)$, если только $|t-s| < t_1$. По лемме Слепяна [5]

$$P\left\{\max_{t\in K_i\cap K} \frac{\xi_t}{\sigma_t} > \frac{u}{\bar{\sigma}_{h(u)}}\right\} \leqslant P\left\{\max_{t\in K_i\cap K} \tilde{\eta}_t > \frac{u}{\bar{\sigma}_{h(u)}}\right\}. \tag{9}$$

Используя лемму 4 работы [2] и неравенства (7), (8), (9), получаем

$$\varlimsup_{u\to\infty}\left(\Psi\left(\frac{u}{\bar{\sigma}_{h(u)}}\right)\right)^{-1}\left(\frac{u}{\bar{\sigma}_{h(u)}}\right)^{2/\gamma} P\{\max_{t\in K\setminus h} \xi_t > u\} < \infty. \tag{10}$$

Для первого члена разложения (6)

$$P\{\max_{t\in h(u)} \xi_t > u\} \geqslant P\{\xi_{t_M} > u\} = \bar{\Phi}\left(\frac{u}{\sigma_{t_M}}\right). \tag{11}$$

Далее, по свойству (1) для достаточно больших u

$$\frac{\Psi\left(\dfrac{u}{\sigma_{t_M}}\right)}{\Psi\left(\dfrac{u}{\bar{\sigma}_{h(u)}}\right)\left(\dfrac{u}{\sigma_{h(u)}}\right)^{\frac{2}{\gamma}}} \geqslant \frac{\bar{\sigma}_{h(u)}^{1+\frac{2}{\gamma}}}{\sigma_{t_M} u^{\frac{2}{\gamma}}} \exp\left\{\frac{u^2}{2}\left(\frac{1}{\bar{\sigma}^2_{h(u)}} - \frac{1}{\sigma^2_{t_M}}\right)\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\sigma_{t_M}^{\frac{2}{\gamma}} u^{-\frac{2}{\gamma}} \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^3_{t_M}} u^2\delta^\beta(u)\right\} \to \infty, \quad u\to\infty. \tag{12}$$

Из соотношений (1), (10), (11) и (12) следует утверждение леммы.

Лемма 5. Обозначим $\theta_t = \sigma_t^{-1}$, $\theta = \theta_{t_M}$, $t \in K$, $A^+ = \dfrac{A+\varepsilon}{\sigma_{t_M}}$, $A^- = \dfrac{A-\varepsilon}{\sigma_{t_M}}$, $\xi_t^c = \dfrac{\xi_t\theta_t}{\theta + C|t-t_M|^\beta}$.

Тогда для $h(u) \in H$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\varlimsup_{u\to\infty} \frac{P\{\max_{t\in h(u)} \xi_t^{A^+} > u\}}{P\{\max_{t\in h(u)} \xi_t > u\}} \leqslant 1,$$

$$\varliminf_{u\to\infty} \frac{P\{\max_{t\in h(u)} \xi_t^{A^-} > u\}}{P\{\max_{t\in h(u)} \xi_t > u\}} \geqslant 1.$$

Доказательство. Для достаточно больших u имеем по свойству (1)

$$\frac{1}{\sigma_{t_M}}(1 + (A-\varepsilon)|t-t_M|^\beta) \leqslant \frac{1}{\sigma_t} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sigma_{t_M}}(1 + (A-\varepsilon)|t-t_M|^\beta),$$

$$\{\max_{t\in h(u)} \xi_t^{A^-} > u\} \supseteq \{\max_{t\in h(u)} \xi_t > u\} \supseteq \{\max_{t\in h(u)} \xi_t^{A^+} > u\},$$

оответствующие неравенства для вероятностей этих событий дают тверждение леммы.

Теорема 1. Пусть ξ_t, $t\in[0, 1]$ — гауссовский сепарабельый процесс, $E\xi_t \equiv 0$, дисперсия и корреляционная функция корого удовлетворяет условиям (I), (II) и (III). Тогда если $\beta \geqslant \alpha$, то

$$\lim_{u\to\infty}\left(\frac{u}{\sigma_{t_M}}\right)^{\frac{2}{\beta}-\frac{2}{\alpha}}\left(\Psi\left(\frac{u}{\sigma_{t_M}}\right)\right)^{-1} P\{\max_{t\in[0,1]} \xi_t > u\} =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\beta}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) D^{\frac{1}{\alpha}} A^{-\frac{1}{\beta}} H_\alpha, & \text{если } t_M\in(0, 1) \\ \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) D^{\frac{1}{\alpha}} A^{-\frac{1}{\beta}} H_\alpha, & \text{если } t_M = 0 \text{ или } 1, \end{cases}$$

H_α определено в лемме 2); если $\beta < \alpha$, то

$$\lim_{u\to\infty}\left(\Psi\left(\frac{u}{\sigma_{t_M}}\right)\right)^{-1} P\{\max_{t\in[0,1]} \xi_t > u\} = 1.$$

Доказательство. Найдем главный член асимптотики при $u \to \infty$ величины $P\{\max_{t\in h(u)} \xi_t^C > u\}$. Положим

$$\tilde{\xi}_t^C = \xi_t^C/\sigma_t^C, \quad t\in h(u) \subseteq K, \quad (\sigma_t^C)^2 = E(\xi_t^C)^2.$$

Тогда

$$P\{\max_{t\in h(u)} \xi_t^C > u\} = P\left\{\max_{t\in h(u)}\left(\tilde{\xi}_t^C - \frac{u}{\sigma_t}\right) > 0\right\}.$$

Из условия (II) на $r(t, s)$ следует, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существуют $u_0 > 0$ и корреляционные функции $r^{+\varepsilon}(t)$ и $r^{-\varepsilon}(t)$ такие, что для всех t, $s\in h(u)$, $u \geqslant u_0$ $r^{+\varepsilon}(t-s) \leqslant r(t, s) \leqslant r^{-\varepsilon}(t-s)$, $r^{\pm\varepsilon}(t) = 1-(D\pm\varepsilon)|t|^\alpha + o(|t|^\alpha)$. По определению ξ_t^C и условию III траектории ξ_t^C, $t\in h(u)$ непрерывны с вероятностью 1, поэтому по лемме Слепяна [5] имеем

$$P\left\{\max_{t\in h(u)}\left(\eta_t^- - \frac{u}{\sigma_t^C}\right) > 0\right\} \leqslant P\{\max_{t\in h(u)} \xi_t^C > u\} \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\max_{t\in h(u)}\left(\eta_t^+ - \frac{u}{\sigma_t^C}\right) > 0\right\}, \tag{13}$$

где η_t^+ и η_t^- — гауссовские стационарные процессы со средним 0, дисперсией 1 и корреляционными функциями $r^{+\varepsilon}(t)$ и $r^{-\varepsilon}(t)$ соответственно.

Поскольку нахождение асимптотики левой и правой частей (1: аналогично, верхние индексы у процесса $\eta(t)$ и его корреляцио ной функции писать не будем.

Пусть $\beta < \alpha$. В этом случае $\delta(u) = o(Tu^{-\frac{2}{\alpha}})$. Имеем

$$P\left\{\max_{t\in h(u)} \eta_t > \min_{t\in h(u)} \frac{u}{\sigma_t^C}\right\} \leqslant P\left\{\max_{t\in h(u)} \left(\eta_t - \frac{u}{\sigma_t^C} > u\right\} \leqslant\right.$$

$$\leqslant P\left\{\max_{t\in h(u)} \eta_t > \min_{t\in h(u)} \frac{u}{\sigma_t^C}\right\}.$$

Отсюда, из непрерывности σ_t в точке t_M и из леммы 3 следуе что

$$\lim_{u\to\infty}\left[\Psi\left(\frac{u}{\sigma_{t_M}}\right)\right]^{-1} P\left\{\max_{t\in h(u)}\left(\eta_t - \frac{u}{\sigma_t^C}\right) > 0\right\} = 1.$$

Из лемм 4, 5 и соотношения (13) следует утверждение теорем для случая $\beta < \alpha$.

Рассмотрим теперь случай $\beta \geqslant \alpha$. Будем считать сначала, ч t_M лежит внутри отрезка $[0, 1]$. Обозначим

$$\Delta_k = [t_M + K\Delta,\ t_M + (k+1)\Delta],$$

$$A_k = \begin{cases} \left\{\max\limits_{t\in\Delta_k} \eta_t^C > u\left(\dfrac{1}{\sigma_{t_M}} + C\,|(k+1)\Delta|^\beta\right)\right\}, & k < 0,\\ \left\{\max\limits_{t\in\Delta_k} \eta_t^C > u\left(\dfrac{1}{\sigma_{t_M}} + C\,|k\Delta|^\beta\right)\right\}, & k \geqslant 0; \end{cases}$$

$$A_k' = \begin{cases} \left\{\max\limits_{t\in\Delta_k} \eta_t^C > u\left(\dfrac{1}{\sigma_{t_M}} + C\,|(k+1)\Delta|^\beta\right)\right\}, & k \geqslant 0,\\ \left\{\max\limits_{t\in\Delta_k} \eta_t^C > u\left(\dfrac{1}{\sigma_{t_M}} + C\,|k\Delta|^\beta\right)\right\}, & k < 0, \end{cases}$$

k — целые числа, для которых $\Delta k \subseteq [0, 1]$. При $\Delta = o(\delta(u)$ $u \to \infty$ и для достаточно больших u

$$\sum_{k=\left[-\frac{\delta(u)}{\Delta}\right]}^{\left[\frac{\delta(u)}{\Delta}\right]} P(A_k) \geqslant P\left\{\max_{t\in h(u)}\left(\eta_t - \frac{u}{\sigma_t^C}\right) > 0\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=\left[-\frac{\delta(u)}{\Delta}\right]+1}^{\left[\frac{\delta(u)}{\Delta}\right]-1} P(A_k') - \sum_{\substack{k,l=\left[\frac{\delta(u)}{\Delta}\right]-1\\ k\neq l}}^{\left[\frac{\delta(u)}{\Delta}\right]+1}\sum P(A_k \cap A_l). \qquad (1$$

алее $\left(\sum_k\right.$ означает суммирование в пределах, указанных в (14), $\left.+C|k\Delta|^\beta=\theta_k\right)$,

$$\sum_k P(A_k)=2\sum_{k>0}P(A_k)=2\sum_{k>0}H_\alpha\left((D\pm\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}\times\right.$$

$$\left.\times\,\theta^{\frac{2}{\alpha}}kT\right)\Psi(u\theta_k)(1+\alpha(u\theta_k))=2(D\pm\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}T\times$$

$$\times\sum_{k>0}\theta_k^{\frac{2}{\alpha}}\frac{H_\alpha\left((D\pm\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}\theta_k^{\frac{2}{\alpha}}T\right)}{(D\pm\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}\theta_k^{2/\alpha}T}\Psi(u\theta_k)(1+\alpha(u\theta_k))=$$

$$=2(D\pm\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}T\sum_{k>0}\theta_k^{2/\alpha}H_\alpha\Psi(u\theta_k)(1+\alpha(u\theta_k))(1+\beta(\theta_k^{2/\alpha}T)),\quad(15)$$

де по лемме 2 $\alpha(s)\to0$ при $s\to\infty$ и $\beta(s)\to0$ при $s\to\infty$.

Обозначим $\tilde\alpha(u\theta)=\sup\limits_{s\geqslant u\theta}|\alpha(s)|$, $\tilde\beta(T)=\sup\limits_{s\geqslant\theta^{2/\alpha}T}|\beta(s)|$, $\tilde\alpha(t),\tilde\beta(t)\to0$ при $t\to\infty$. Тогда

$$2(D\pm\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}H_\alpha T(1+\tilde\alpha(u\theta)(1+\tilde\beta(T)))\times$$

$$\times\sum_{k>0}\theta_k^{2/\alpha}\Psi(u\theta_k)\geqslant\sum_{k\geqslant0}P(A_k)\geqslant2(D\pm\varepsilon)^{1/\alpha}H_\alpha T\times$$

$$\times(1-\tilde\alpha(u\theta))(1-\tilde\beta(T))\sum_{k>0}\theta_k^{2/\alpha}\Psi(u\theta_k).$$

алее,

$$\frac{1}{\Delta}\int_0^{\delta(\theta+cx^\beta)^{2/\alpha}}\Psi(u(\theta+c|x|^\beta))\,dx\geqslant\sum_{k>0}(\theta+|k\Delta|^\beta)^{2/\alpha}\times$$

$$\times\Psi(u(\theta+|k\Delta|^\beta))\geqslant\frac{1}{\Delta}\int_0^{\delta-\Delta}(\theta+cx^\beta)^{2/\alpha}\Psi(u(\theta+cx^\beta))\,dx.$$

эспользовавшись заменой $x=\left(\frac{y}{c\theta u^2}\right)^{1/\beta}$, получим

$$\int\limits_0^{\delta} (\theta + cx^{\beta})^{2/\alpha}\, \Psi (u (\theta + cx^{\beta}))\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) \theta^{2/\alpha}}{\beta\, (c\theta u^2)^{1/\beta}}\, \Psi (\theta u)\, (1 + o\,(1)) =$$

$$= \int\limits_0^{\delta-\Delta} (\theta + cx^{\beta})^{2/\alpha}\, \Psi (u (\theta + cx^{\beta}))\, dx\, (1 + o\,(1)). \qquad (1$$

После аналогичных преобразований суммы $\sum\limits_k P\,(A_k')$ убеждаемся, ч

$$\frac{\Psi\,(\theta u)}{\Delta}\, \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) \theta^{2/\alpha}\, (D \pm \varepsilon)^{1/\alpha}\, H_\alpha T}{\beta\, (c\theta u^2)^{1/\beta}}\, (1 + \tilde{\alpha}_1 (u)) \times$$

$$\times\, (1 + \tilde{\beta}_1 (u)) \geqslant \sum_k P\,(A_k),$$

$$\sum_k (P\,(A_k') \geqslant \Psi\,(\theta u) \times$$

$$\times\, \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) \theta^{2/\alpha}\, (D \pm \varepsilon)^{2/\alpha}\, H_\alpha T}{\beta\, (c\theta u^2)^{1/\alpha}}\, (1 + \tilde{\alpha}_1 (u))\, (1 + \tilde{\beta}_1 (T)), \qquad (1$$

где $\tilde{\alpha}_1 (u) \downarrow 0,\ u \to \infty,\ \tilde{\beta}_1 (T) \downarrow 0$ при $u \to \infty$.

При $t_{\text{М}} = 0$ или 1 в левой и правой части (17) исчезает коэфф циент 2.

Оценим $P\,(A_k \cap A_l)$ для случая $k > l \geqslant 0$. Из разложен корреляционной функции $r\,(t)$ процесса $\eta\,(t)$ следует, что для п ложительных D_1 и D_2 таких, что $D_1 < D - \varepsilon$, $D_2 > D + \varepsilon$, на дется u_0, такое, что для всех $u \geqslant u_0$

$$D_1 \leqslant \frac{1 - r\,(t)}{|\,t\,|^{\alpha}} \leqslant D_2 \qquad (1$$

равномерно по $t \in h\,(u)$. Введем события

$$B_{i,j}^{k,l} (m) = \left\{\eta \left(t_{\text{М}} + l\Delta + \frac{\Delta i}{[\ln\,(m+2)]}\right) > u\,(\theta + |\, l\Delta\,|^{\beta},\right.$$

$$\eta \left(t_{\text{М}} + k\Delta + \frac{\Delta j}{2^m}\right) > u\,(\theta + |\, k\Delta\,|^{\beta}) - \frac{d^{m+1}}{u},$$

$$\left.\eta \left(t_{\text{М}} + k\Delta + \frac{\Delta\,(2j+1)}{2^{m+1}}\right) \leqslant u\,(\theta + |\, k\Delta\,|^{\beta}) - \frac{d^m}{u}\right\},$$

$$B_{i,j}^{k,l} (m) = \left\{\eta \left(t_{\text{М}} + l\Delta + \frac{\Delta i}{[\ln\,(m+2)]}\right) > u\,(\theta + |\, l\Delta\,|^{\beta}),\right.$$

$$\eta\left(t_{\text{M}} + k\Delta + \frac{\Delta j}{2^m}\right) > u\left(\theta + |k\Delta|^{\beta}\right) - \frac{d^{m+1}}{u}\Big\},$$

$$b_j^k(m) = \Big\{\eta\left(t_{\text{M}} + k\Delta + \frac{\Delta(2j+1)}{2^{m+1}}\right) \leqslant u\left(\theta + |k\Delta|^{\beta}\right) - \frac{d^m}{u},$$

$$\eta\left(t_{\text{M}} + k\Delta + \frac{\Delta j}{2^m}\right) > u\left(\theta + |k\Delta|^{\beta}\right) - \frac{d^{m+1}}{u}\Big\},$$

$$d < 1,\ m \geqslant 0,\ 0 \leqslant j < 2^m, \quad 0 \leqslant i < [\ln(m+2)].$$

Имеем $A_k \cap A_l \subseteq \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \bigcup\limits_{i} \bigcup\limits_{j} B_{i,j}^{k,l}(m)$. Отсюда

$$P(A_k \cap A_l) \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} 2^m [\ln(m+2)] \max_{i,j} P\{B_{i,j}^{k,l}(m)\}. \tag{19}$$

Воспользуемся теперь соотношением (2) и неравенством (18). Для достаточно больших u

$$P\{B_{i,j}^{k,l}(m)\} \leqslant P\{B_{i,j}^{k,l}(m)\} \leqslant 2\Psi\left(u\left(\theta + |l\Delta|^{\beta}\right)\right) \bar{\Phi}\Big(u\left(\theta + |l\Delta|^{\beta}\right) \times$$

$$\times \frac{\left(D_1\left((k-l-1)\Delta + \frac{\Delta}{\ln(m+2)}\right)\right)^{1/2}}{\sqrt{2}}. \tag{20}$$

Из неравенств (3), (4) и (18) следует

$$P\{B_{i,j}^{k,l}(m)\} \leqslant P\{b_j^k(m)\} \leqslant \frac{\sqrt{2D_2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left|\frac{\Delta}{2^{m+1}}\right|^{\frac{\alpha}{2}} \Psi\Big(u\left(\theta + (k\Delta)^{\beta}\right) -$$

$$- \frac{d^{m+1}}{u}\Psi\left(\frac{d^m(1-d)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{u\sqrt{2}D_2^{1/2}\left|\frac{\Delta}{2^{m+1}}\right|^{\frac{\alpha}{2}}} - \left(u\left(\theta + (k\Delta)^{\beta}\right) - \frac{d^{m+1}}{u}\right) \times\right.$$

$$\left.\times D_2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\Delta}{2^{m+1}}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right) \leqslant 2e^{\theta} D_2^{\frac{1}{2}} \Psi\left(u\left(\theta + (l\Delta)^{\beta}\right)\right) \frac{T^{\frac{\alpha}{2}}}{u}\left(2^{-m-1}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \times \tag{21}$$

$$\times \Psi\left(\frac{(1-d)\,2^{\alpha-1}}{D_2^{1/2} T^{\frac{\alpha}{2}}}\left(2^{\frac{\alpha}{2}} d\right)^m - \left(\theta + (k\Delta)^{\beta} - \frac{d^{m+1}}{u^2}\right) D_2^{1/2}\left(\frac{T}{2^{m+1}}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Выберем d таким образом, чтобы $2^{\frac{\alpha}{2}}d=\nabla>1$. Разобьем ряд (19 на две части от 0 до N и от $N+1$ до ∞, $N=N(T,u,k,l)$. Вто рая часть мажорируется по неравенству (21) суммой

$$\frac{2}{u}T^{\frac{\alpha}{2}}e^{\theta}D_2^{\frac{1}{2}}\Psi(u(\theta+(l\Delta)^{\beta})\sum_{N+1}^{\infty}(2^{-m-1})^{\frac{\alpha}{2}}\times$$

$$\times\Psi\left(\frac{(1-d)2^{\alpha}}{2D_2^{\frac{1}{2}}T^{\frac{\alpha}{2}}}\nabla^{m}-\left(\theta+(k\Delta)^{\beta}-\frac{d^{m+1}}{u^{2}}\right)D_2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{T}{2^{m+1}}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Положим $N(T)=\frac{v\ln T}{\ln\nabla}$, тогда последнее выражение не превосхо дит величины

$$\frac{2}{u}T^{\frac{\alpha}{2}}e^{\theta}D_2^{\frac{1}{2}}\Psi(u(\theta+(l\Delta)^{\beta})\sum_{1}^{\infty}\Psi\left(\frac{(1-d)\,2^{\alpha}T^{v}}{2D_2^{\frac{1}{2}}T^{\frac{\alpha}{2}}}\nabla^{m}-L_1T^{\beta-(v-1)\frac{\alpha}{2}}\right), \quad (22$$

для некоторого $L_1>0$.

Выберем теперь v таким, чтобы $v-\frac{\alpha}{2}=\varkappa>1$ и $\beta-(v-1)\times\times\frac{\alpha}{2}<0$. Тогда для некоторых L_2, L_3 и L_4 выражение (22) не превосходит величины

$$L_2\Psi(u(\theta+(l\Delta)^{\beta}))\sum_{1}^{\infty}\Psi(L_3T^{\varkappa}\nabla^{m})\leqslant L_4\Psi(u(\theta+(l\Delta)^{\beta}e^{-(L_3T^{\varkappa})^{2}/2}. \quad (23$$

Первую часть ряда (19) оценим по неравенству (20) величиной

$$2N\Psi(u(\theta+(l\Delta)^{\beta})\bar{\Phi}\left(u\theta\frac{D_1^{1/2}}{\sqrt{2}}\left((k-l-1)\Delta+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\Delta}{\ln(N+2)}\right)\leqslant 2\log_{\nabla}T\Psi(u(\theta+(l\Delta)^{\beta}))\times \quad (24$$

$$\times\bar{\Psi}\left(\theta u\frac{D_2^{1/2}}{\sqrt{2}}\left((k-l-1)\Delta+\frac{\Delta}{\ln(v\log_{\nabla}T+2)}\right)\frac{T^{\frac{\alpha}{2}}}{u}\right).$$

Пусть $\varkappa=v-\frac{\alpha}{2}>k-l-1+\frac{\alpha}{2}$. Тогда вторая часть ряда (19) согласно неравенствам (23) и (24), является бесконечно малой ве личиной более высокого порядка, чем первая часть, равномерно по

k и l, поэтому $P(A_k \cap A_l)$ мы можем равномерно по k и l оценить величиной

$$L_5 \Psi(u(\theta + (l\Delta)^\beta)) \overline{\Phi}\left(L_6 T^{\frac{\alpha}{2}}\left((k-l-1) + \left[\ln\left(k-l-1+\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left. + \frac{\alpha}{2}\right)\log_\nabla T\right)\right]^{-1}$$

или (для достаточно больших T)

$$P(A_k \cap A_l) \leqslant L_5 \Psi(u(\theta + |l\Delta|^\beta)) \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{T^{\frac{\alpha}{2}}}{2}(L_6(|k-l|-1) + \frac{1}{\ln(k \log_\nabla T)}\right)^2. \tag{25}$$

Эта же оценка справедлива и для симметричного случая $k < l \leqslant 0$. Если знаки k и l разные, то аналогичными рассуждениями можно получить такую же оценку для $|k| > |e|$. Имеем

$$\sum_{k \neq l} P(A_k \cap A_l) = 2 \sum_{k > l \geqslant 0} P(A_k \cap A_l) + 2 \sum_{k < l \leqslant 0} P(A_k \cap A_l) +$$
$$+ 2 \sum_{k > -l \geqslant 0} P(A_k \cap A_l) + 2 \sum_{k < -l \leqslant 0} P(A_k \cap A_l) \leqslant$$
$$\leqslant 8 \sum_{k > l \geqslant 0} L_5 \Psi(u(\theta + (l\Delta)^\beta) \exp\left(-\frac{T^\alpha}{2}\left(L_6(k-1) + \frac{1}{\ln v \log_\nabla T}\right)^2 \leqslant\right.$$
$$\leqslant 8 \sum_{l=0}^{k} L_5 \Psi(u(\theta + (l\Delta)^\beta)) \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{T^\alpha}{2}\left(L_6(k-1 + \frac{1}{\ln(v \log_\nabla T)}\right)^2\right.. \tag{26}$$

Внутренняя сумма в правой части (26) мажорируется экспонентой степени $-\frac{1}{2} L_7 T^{\alpha/4}$. Разделив все части неравенства (14) на

$$L(u) = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) \theta^{\frac{2}{\alpha}} (D \pm \varepsilon)^{1/\alpha} H_\alpha \Psi(\theta u)}{\beta (c\theta u^2)^{1/\beta} u^{-\frac{2}{\alpha}}},$$

устремив u к бесконечности и учтя (15), (17) и (26), найдем

$$\overline{\lim_{u \to \infty}} P\left\{\max_{t \in h(u)}\left(\eta(t) - \frac{u}{\sigma_t^c}\right) > 0\right\}(L(u))^{-1} \leqslant 1 + \beta_1(T),$$

$$\underline{\lim_{u \to \infty}} P\left\{\max_{t \in h(u)}\left(\eta(t) - \frac{u}{\sigma_t^c}\right) > 0\right\}(L(u))^{-1} \geqslant 1 - \beta_1(T) -$$
$$- L_8 \exp\left(-\frac{1}{2} L_7 T^{\frac{\alpha}{4}}\right).$$

При $T \to \infty$

$$\lim_{u\to\infty} P\left\{\max_{t\in h(u)} \left(\eta(t) - \frac{u}{\sigma_t^c}\right) > 0\right\} (L(u))^{-1} = 1. \tag{27}$$

Воспользовавшись неравенством (13), получим асимптотику (27) с $\varepsilon = 0$ для $P\{\max\limits_{\in h(u)} \xi_t^C > u\}$. Положим $C = \dfrac{A+\varepsilon}{\sigma_{t_M}}$, а затем $C = \dfrac{A-\varepsilon}{\sigma_{t_M}}$ и воспользуемся леммами 5 и 4. Имеем

$$\overline{\lim_{u\to\infty}} \frac{P\{\max\limits_{t\in[0,1]} \xi_t > u\}}{\frac{2}{\beta}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{u}{\sigma_{t_M}}\right)^{-\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\alpha}} D^{\frac{1}{\alpha}} A^{\frac{1}{\beta}} H_\alpha (A-\varepsilon)^{-\frac{1}{\beta}} \Psi\left(\frac{u}{\sigma_{t_M}}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant 1,$$

$$\underline{\lim_{u\to\infty}} \frac{P\{\max\limits_{t\in[0,1]} \xi_t > u\}}{\frac{2}{\beta}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{u}{\sigma_{t_M}}\right)^{-\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\alpha}} D^{\frac{1}{\alpha}} (A+\varepsilon)^{-\frac{1}{\beta}} H_\alpha \Psi\left(\frac{u}{\sigma_{tM}}\right)} \geqslant 1.$$

Поскольку ε выбрано произвольно и при $t_M = 0$ или 1 коэффициент 2 исчезает, то доказательство теоремы завершается.

Рассмотрим два простых обобщения теоремы 1.

Теорема 2. Пусть ξ_t, $t\in[0, 1]$ — гауссовский сепарабельный процесс $E\,\xi_t \equiv 0$, корреляционная функция которого удовлетворяет условию (III), из $r(t, s) = 1$ следует $t = s$, дисперсия достигает своего абсолютного максимума σ в конечном числе точек $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и в каждой из этих точек корреляционная функция и дисперсия удовлетворяют условиям (I) и (II).

Тогда

$$\lim_{u\to\infty} \frac{P\{\max\limits_{t\in[0,1]} \xi_t > u\}}{\sum\limits_{k=1}^{n} L_k(u, \alpha_k, D_k, \beta_k, A_k, \sigma)} = 1,$$

где функция L_k определяется в каждой точке t_k из теоремы 1.

Доказательство теоремы основано на рассмотрении вероятностей событий

$$P\{B_1 \cap B_2\} = P\{\max_{t\in h_1(u)} \xi_t > u, \max_{t\in h_2(u)} \xi_t > u\},$$

где $h_1(u) \in H(t_1)$, $h_2(u) \in H(t_2)$.

Аналогично ряду (19) можно записать

$$P(B_1 \cap B_2) \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} 2^m [\ln(m+2)] \max_{i,l} P\{C_{i,l}(m)\}, \tag{28}$$

где

$$C_{i,j}(m)=\left\{\eta(t_1)>u,\ \eta(t_2)>u-\frac{d^{m+1}}{u},\right.$$

$$\left.\eta\left(t_2+\frac{2\delta_2(u)}{2^{m+1}}\right)<u-\frac{d^m}{u}\right\},$$

t_1 пробегает решетку на $h_1(u)$ с шагом $\frac{2\delta_1(u)}{[\ln(m+2)]}$, а t_2 — решетку на $h_2(u)$ с шагом $\frac{2\delta_2(u)}{2^m}$. Дальнейшие оценки ряда (28) аналогичны оценкам ряда (19).

Теорема 3. Пусть гауссовский стационарный процесс ξ_t удовлетворяет условиям (I) — (III) и условию:

(IV) $E\xi_t=m(t)$ — ограниченная функция и для всех t из некоторой окрестности t_M и некоторых $r>\beta$, $c>0$ $|m(t_M)-m(t)|<c|t-t_M|^r$.

Тогда

$$\lim_{u\to\infty}\frac{P\{\max\limits_{[0,1]}\xi_t>u\}}{P\{\max\limits_{[0,1]}(\xi_t-m(t))>u-m(t_M)\}}=1.$$

Доказательство. Определим класс сужающихся интервалов H_1 следующим образом: $h=(-\delta(u),\delta(u))\in H_1$, если $\frac{u^2\delta^\beta(u)}{\ln u}\to\infty$ и $u\delta^r(u)\to 0$ при $u\to\infty$.

По условию (IV) $|m(t)|<M<\infty$, $t\in[0,1]$, соотношение (7) перепишем следующим образом;

$$P\{\max_{t\in h(u)}\xi_t<u,\ \max_{t\in[0,1]\setminus h}\xi_t>u\}\leqslant P\{\max_{t\in[0,1]\setminus h}\hat{\xi}_t>u-M\}\leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\max_{K\setminus h}\frac{\hat{\xi}_t}{\sigma_t}>\frac{u-M}{\bar{\sigma}_{h(u)}}\right\},$$

где $\hat{\xi}_t=\xi_t-m(t)$.

Повторяя дальнейшие рассуждения в доказательстве леммы 4, получаем, что для $h(u)\in H_1$

$$\lim_{u\to\infty}\frac{P\{\max\limits_{[0,1]}\xi_t>u\}}{P\{\max\limits_{t\in h(u)}\xi_t>u\}}=1.$$

Далее,

$$P\{\max_{t\in h(u)}\hat{\xi}_t>u-m(t_M)-c\delta^r(u)\}\geqslant$$

$$\geqslant P\{\max_{t\in h(u)}\xi_t>u\}\geqslant P\{\max_{t\in h(u)}\hat{\xi}_t>u-m(t_M)+c\delta^r(u)\}. \qquad (29)$$

Воспользовавшись теоремой 1, убеждаемся, что главные члены асимптотик левой и правой частей (29) совпадают. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Pickands J. III.* Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes. — «Trans. Amer. Math. Soc.», 1969, 145, p. 51—73. 2. *Питерберг В. И.* О работе Пикандса «Вероятности пересечения для стационарного гауссовского процесса». — «Вестник МГУ. Математика, механика», 1972, № 5, с. 25—30. 3. *Berman S.* Sojourns and extermes of Gaussian processes. — «Ann. of Prob.», 1974, 2, 6, p. 999—1026. 4. *Беляев Ю. К., Питерберг В. И.* Асимптотика среднего числа А-точек выбросов гауссовского поля за высокий уровень. — «Выбросы случайных полей», 1973, вып. 29, с. 62—79. 5. *Slepian D.* The one-sided barrier problem for Gaussian noise. — «Bell Syst. Techn. J.», 1962, **41**, 2, p. 463—501.

V. I. Piterbarg, V. P. Prisyazhnyuk

ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF PROBABILITY OF LARGE EXCURSIONS FOR THE GAUSSIAN NON-STATIONARY PROCESS

The paper is devoted to investigation of asymptotic behaviour of the distribution tail of a maximum of the process named in title.

Поступила в редколлегию 31.06 1976.

УДК 519.21

Ю. Д. ПОПОВ, канд. физ.-мат. наук,
Киевский университет

ОБ ОЦЕНКЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ОДНОРОДНОГО И ИЗОТРОПНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Рассмотрим двумерное пространство (плоскость) Лобачевского Λ^2 с расстоянием r между точками (r_1, φ_1), $(r_2, \varphi_2) \in \Lambda^2$, определяемым соотношением $\operatorname{ch} r = \operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_2 - \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Пусть $\xi(r, \varphi)$ — однородное и изотропное случайное поле в Λ^2 с математическим ожиданием $M\xi(r, \varphi) = 0$ и корреляционной функцией

$$B(\operatorname{ch} r) = \int_0^\infty \lambda \operatorname{th} \pi\lambda P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} r) f(\lambda)\, d\lambda, \tag{1}$$

где $P_\mu(\cdot)$ — функция Лежандра 1-го рода, $f(\lambda)$ — спектральная плотность поля, которая выражается через корреляционную функцию с помощью обратного преобразования Фока — Мелера [1]

$$f(\lambda) = \int_0^\infty B(\operatorname{ch} r) P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} r) \operatorname{sh} r\, dr. \tag{2}$$