Воспользовавшись теоремой 1, убеждаемся, что главные члены асимптотик левой и правой частей (29) совпадают. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Pickands J. III.* Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes. — «Trans. Amer. Math. Soc.», 1969, 145, p. 51—73. 2. *Питерберг В. И.* О работе Пикандса «Вероятности пересечения для стационарного гауссовского процесса». — «Вестник МГУ. Математика, механика», 1972, № 5, с. 25—30. 3. *Berman S.* Sojourns and extermes of Gaussian processes. — «Ann. of Prob.», 1974, 2, 6, p. 999—1026. 4. *Беляев Ю. К., Питерберг В. И.* Асимптотика среднего числа А-точек выбросов гауссовского поля за высокий уровень. — «Выбросы случайных полей», 1973, вып. 29, с. 62—79. 5. *Slepian D.* The one-sided barrier problem for Gaussian noise. — «Bell Syst. Techn. J.», 1962, **41**, 2, p. 463—501.

V. I. Piterbarg, V. P. Prisyazhnyuk

ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF PROBABILITY OF LARGE EXCURSIONS FOR THE GAUSSIAN NON-STATIONARY PROCESS

The paper is devoted to investigation of asymptotic behaviour of the distribution tail of a maximum of the process named in title.

Поступила в редколлегию 31.06 1976.

УДК 519.21

Ю. Д. ПОПОВ, канд. физ.-мат. наук,
Киевский университет

ОБ ОЦЕНКЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ОДНОРОДНОГО И ИЗОТРОПНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Рассмотрим двумерное пространство (плоскость) Лобачевского Λ^2 с расстоянием r между точками (r_1, φ_1), $(r_2, \varphi_2) \in \Lambda^2$, определяемым соотношением $\operatorname{ch} r = \operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_2 - \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Пусть $\xi(r, \varphi)$ — однородное и изотропное случайное поле в Λ^2 с математическим ожиданием $M\xi(r, \varphi) = 0$ и корреляционной функцией

$$B(\operatorname{ch} r) = \int_0^\infty \lambda \operatorname{th} \pi\lambda P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} r) f(\lambda)\, d\lambda, \tag{1}$$

где $P_\mu(\cdot)$ — функция Лежандра 1-го рода, $f(\lambda)$ — спектральная плотность поля, которая выражается через корреляционную функцию с помощью обратного преобразования Фока — Мелера [1]

$$f(\lambda) = \int_0^\infty B(\operatorname{ch} r) P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} r) \operatorname{sh} r\, dr. \tag{2}$$

Оценку спектральной плотности $f(\lambda)$ по наблюденным значе-
иям поля $\xi(r, \varphi)$ будем искать в следующем виде:

$$\hat{f}_C(\lambda) = A \iint \int_0^{2\pi}\!\!\int h(r/C, \varphi)\, h(R/C, \Phi)\, \xi(r, \varphi)\, \xi(R, \Phi) \times$$

$$\times \operatorname{sh} r \operatorname{sh} R P_{-\frac{1}{2}+i\lambda} (\operatorname{ch} r \operatorname{ch} R - \operatorname{sh} r \operatorname{sh} R \cos(\varphi - \Phi))\, dr dR d\varphi d\Phi, \quad (3)$$

юстоянная A будет определена ниже.

Исследуем вопрос о несмещенности оценки (3).

Рассмотрим

$$M\hat{f}_C(\lambda) = A \iint \int_0^{2\pi}\!\!\int h(r/C, \varphi)\, h(R/C, \Phi)\, B(\operatorname{ch} r \operatorname{ch} R - \operatorname{sh} r \operatorname{sh} R \cos(\varphi -$$

$$- \Phi))\, P_{-\frac{1}{2}+i\lambda} (\operatorname{ch} r \operatorname{ch} R - \operatorname{sh} r \operatorname{sh} R \cos(\varphi - \Phi)) \operatorname{sh} r \operatorname{sh} R\, dr dR d\varphi d\Phi.$$

Іусть

$$H_j(\lambda, k) = \int \int_0^{2\pi} h^j(r/C, \varphi) \operatorname{sh} r P_{-\frac{1}{2}+i\lambda} (\operatorname{ch} r)\, e^{-ik\varphi} dr d\varphi. \quad (4)$$

Если, в частности,

$$h(t, \varphi) = \begin{cases} 1, & t \leqslant 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases} \quad (5)$$

о $H_j(0, 0) = 2\pi(\operatorname{ch} C - 1)$.

В выражении для $M\hat{f}_C(\lambda)$ сделаем замену переменных

$$\operatorname{ch} r \operatorname{ch} R - \operatorname{sh} r \operatorname{sh} R \cos(\varphi - \Phi) = \operatorname{ch} u \quad (R \sim u),$$

$$\Phi - \varphi = \alpha \quad (\Phi \sim \alpha)$$

і введем под знак интеграла функцию $H_2(0, 0)$. Будем иметь

$$M\hat{f}_C(\lambda) = 2\pi A \int_0^{2C} \Bigg\{ \frac{1}{2\pi} \iiint h \times$$

$$\times \left(\operatorname{sh}^{-1} \frac{\operatorname{ch} u \operatorname{sh} r \cos\alpha \pm \operatorname{ch} r \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - (\operatorname{ch}^2 r - \operatorname{sh}^2 r \cos^2\alpha)}}{\operatorname{ch}^2 r - \operatorname{sh}^2 r \cos^2 \alpha} \Big/ C, \varphi + \alpha \right) \times$$

$$\times h(r/C, \varphi) \operatorname{sh} r \frac{\operatorname{ch} u \operatorname{sh} r \cos\alpha \pm \operatorname{ch} r \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - (\operatorname{ch}^2 r - \operatorname{sh}^2 r \cos^2\alpha)}}{(\operatorname{ch}^2 r - \operatorname{sh}^2 r \cos^2\alpha) \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - (\operatorname{ch}^2 r - \operatorname{sh}^2 r \cos^2\alpha)}}\, dr d\varphi d\alpha \pm$$

$$\pm H_2(0, 0) \Bigg\} B(\operatorname{ch} u)\, P_{-\frac{1}{2}+i\lambda} (\operatorname{ch} u) \operatorname{sh} u\, du =$$

$$= 2\pi A H_2(0, 0) \int_0^{2C} B(\operatorname{ch} u)\, P_{-\frac{1}{2}+i\lambda} (\operatorname{ch} u) \operatorname{sh} u\, du +$$

$$+ 2\pi A \int\limits_0^{2C} K(\operatorname{sh} u) B(\operatorname{ch} u) P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} u) \operatorname{sh} u du,$$

где

$$K(\operatorname{sh} u) = \iint \Big[\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} h \times$$

$$\times \left(\operatorname{sh}^{-1} \frac{\operatorname{ch} u \operatorname{sh} r \cos\alpha \pm \operatorname{ch} r \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - (\operatorname{ch}^2 r - \operatorname{sh}^2 r \cos^2\alpha)}}{\operatorname{ch}^2 r - \operatorname{sh}^2 r \cos^2 \alpha} \Big/ C, \varphi + \alpha \right) \times$$

$$\times \frac{\operatorname{ch} u \operatorname{sh} r \cos\alpha \pm \operatorname{ch} r \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - (\operatorname{ch}^2 r - \operatorname{sh}^2 r \cos^2\alpha)}}{(\operatorname{ch}^2 r - \operatorname{sh}^2 r \cos^2\alpha) \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - (\operatorname{ch}^2 r - \operatorname{sh}^2 r \cos^2\alpha)}} d\alpha - h(r/C, \varphi) \Big] \times$$

$$\times h(r/C, \varphi) \operatorname{sh} r dr d\varphi.$$

Обозначим

$$\alpha_C = \int\limits_{2C}^{\infty} B(\operatorname{ch} u) P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} u) \operatorname{sh} u du,$$

$$\beta_C = \int\limits_0^{2C} K(\operatorname{sh} u) B(\operatorname{ch} u) P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} u) \operatorname{sh} u\, du.$$

Тогда $M\hat{f}_C(\lambda) = 2\pi A [H_2(0, 0) f(\lambda) - H_2(0, 0)\alpha_C + \beta_C]$. Выбирая $A = [2\pi H_2(0, 0)]^{-1}$, получаем

$$M\hat{f}_C(\lambda) = f(\lambda) - \alpha_C + [H_2(0,0)]^{-1} \beta_C. \tag{6}$$

Предположим, что

$$|K(\operatorname{sh} u)| < K \operatorname{sh} u. \tag{7}$$

Заметим, что последнее соотношение справедливо, если функция $h(t, \varphi)$ ограничена, имеет ограниченную вариацию и равна нулю при $t > 1$ (в частности, если $h(t, \varphi)$ имеет вид (5)).

Наложим на корреляционную функцию $B(\cdot)$ поля $\xi(r, \varphi)$ следующее ограничение:

$$\int\limits_0^{\infty} B(\operatorname{ch} u) P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} u) \operatorname{sh}^2 u du < \infty. \tag{8}$$

Ясно, что при этом условии $\alpha_C \to 0$, если $C \to \infty$, и (с учетом (7)) $|\beta_C| < \infty$ для всех C.

Заметим, что $M\hat{f}_C(\lambda) = f(\lambda) - \alpha_C + [2\pi(\operatorname{ch} C - 1)]^{-1} \beta_C$ и $M\hat{f}_C(\lambda) \to f(\lambda)$ при $C \to \infty$, если $h(t, \varphi)$ имеет вид (5). Если на $h(t, \varphi)$ наложено общее ограничение (7), то $H_2(0, 0)$ имеет порядок $O(1/\operatorname{ch} C)$, поэтому $M\hat{f}_C(\lambda) \to f(\lambda)$ и в этом случае.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Оценка

$$\widehat{f}_C(\lambda) = [2\pi H_2(0,0)]^{-1} \iint \iint\limits_0^{2\pi} h(r/C,\varphi)\, h(R/C,\Phi)\, \xi(r,\varphi)\, \xi(R,\Phi) \times$$

$$\times \operatorname{sh} r \operatorname{sh} R P_{-\frac{1}{2}+i\lambda} (\operatorname{ch} r \operatorname{ch} R - \operatorname{sh} r \operatorname{sh} R \cos(\varphi - \Phi))\, dr dR d\varphi d\Phi$$

при ограничениях (7) и (8), налагаемых на весовую функцию $h(t, \varphi)$ и корреляционную функцию $B(\operatorname{ch} u)$, является асимптотически несмещенной оценкой спектральной плотности $f(\lambda)$ однородного и изотропного случайного поля на плоскости Лобачевского.

Рассмотрим теперь поведение дисперсии оценки $\widehat{f}_C(\lambda)$ при $C \to \infty$. Нетрудно видеть, что

$$D\widehat{f}_C(\lambda) = H_2^{-2}(0,0) \iiiint \iiint\limits_0^{2\pi}\!\!\int h(r/C,\varphi)\, h(R/C,\Phi)\, h(t/C,\theta)\, h(T/C,\Theta) \times$$

$$\times \operatorname{cov}\{\xi(r,\varphi)\,\xi(R,\Phi), \xi(t,\theta)\,\xi(T,\Theta)\} \operatorname{sh} r \operatorname{sh} R \operatorname{sh} t \operatorname{sh} T \times$$

$$\times P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} r \operatorname{ch} R - \operatorname{sh} r \operatorname{sh} R \cos(\varphi - \Phi))\, P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} t \operatorname{ch} T -$$

$$- \operatorname{sh} t \operatorname{sh} T \cos(\theta - \Theta))\, dr dR dt dT d\varphi d\Phi d\theta d\Theta.$$

Известно, что

$$\operatorname{cov}\{\xi(r,\varphi)\,\xi(R,\Phi), \xi(t,\theta)\,\xi(T,\Theta)\} =$$

$$= \operatorname{cum}\{\xi(r,\varphi), \xi(R,\Phi), \xi(t,\theta), \xi(T,\Theta)\} +$$

$$+ B(\operatorname{ch}^{-1}(\operatorname{ch} R \operatorname{ch} T - \operatorname{sh} R \operatorname{sh} T \cos(\Phi - \Theta)))\, B(\operatorname{ch}^{-1}(\operatorname{ch} r \operatorname{ch} t -$$

$$- \operatorname{sh} r \operatorname{sh} t \cos(\varphi - \theta))) + B(\operatorname{ch}^{-1}(\operatorname{ch} R \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} R \operatorname{sh} t \cos(\Phi - \theta))) \times$$

$$\times B(\operatorname{ch}^{-1}(\operatorname{ch} r \operatorname{ch} T - \operatorname{sh} r \operatorname{sh} T \cos(\varphi - \Theta))).$$

Подставляя это выражение в $D\widehat{f}_C(\lambda)$, получаем

$$D\widehat{f}_C(\lambda) = D_1 + D_2 + D_3, \tag{9}$$

где D_1, D_2, D_3 соответствуют слагаемым в выражении для ковариации поля.

Прежде чем перейти к оценке D_i, $i = 1, 2, 3$, сделаем одно предположение относительно кумулянты поля, основанное на свойствах однородности и изотропности, а именно:

$$\operatorname{cum}\{\xi(r,\varphi), \xi(R,\Phi), \xi(t,\theta), \xi(T,\Theta)\} = c(u, v, w, \alpha, \beta), \tag{10}$$

где новые переменные u, v, w, α, β связаны со старыми $r, \varphi, R, \Phi, t, \theta, T, \Theta$ соотношениями

$$\operatorname{ch} u = \operatorname{ch} r \operatorname{ch} R - \operatorname{sh} r \operatorname{sh} R \cos(\varphi - \Phi),$$

$$\operatorname{ch} v = \operatorname{ch} r \operatorname{ch} T - \operatorname{sh} r \operatorname{sh} T \cos(\varphi - \Theta),$$

$$\operatorname{ch} w = \operatorname{ch} r \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} r \operatorname{sh} t \cos(\varphi - \theta),$$

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{ch} u \operatorname{ch} w - [\operatorname{ch} t \operatorname{ch} R - \operatorname{sh} t \operatorname{sh} R \cos(\theta - \Phi)]}{\operatorname{sh} u \operatorname{sh} w}, \tag{11}$$

$$\cos\beta = \frac{\operatorname{ch} u \operatorname{ch} v - [\operatorname{ch} T \operatorname{ch} R - \operatorname{sh} T \operatorname{sh} R \cos(\Theta - \Phi)]}{\operatorname{sh} u \operatorname{sh} v}.$$

Заметим, что в векторной форме соотношения (11) имеют более простой вид: $\vec{R} = \vec{r} + \vec{u}, \vec{T} = \vec{r} + \vec{v}, \vec{t} = \vec{r} + \vec{w}$, $\alpha = (\widehat{\vec{u}, \vec{w}})$, $\beta = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

Оценим теперь

$$D_1 = H_2^{-2}(0,0) \iiiint \iiiint_0^{2\pi} h(r/C, \varphi)\, h(R/C, \Phi)\, h(t/C, \theta)\, h(T/C, \Theta) \times$$

$$\times \operatorname{cum}\{\xi(r,\varphi), \xi(R,\Phi), \xi(t,\theta), \xi(T,\Theta)\} P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} r \operatorname{ch} R -$$

$$- \operatorname{sh} r \operatorname{sh} R \cos(\varphi - \Phi))\, P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} t \operatorname{ch} T - \operatorname{sh} t \operatorname{sh} T \cos(\theta - \Theta)) \times$$

$$\times \operatorname{sh} r \operatorname{sh} R \operatorname{sh} t \operatorname{sh} T\, dr\, dR\, dt\, dT\, d\varphi\, d\Phi\, d\theta\, d\Theta.$$

Переходя к новым переменным по формулам (11) и обозначая якобиан перехода через $J = J(u, v, w, \alpha, \beta, r, \varphi, \theta)$, будем иметь с учетом (10)

$$D_1 = H_2^{-2}(0,0) \iiiint \iiiint h(|\vec{r} + \vec{u}|/C, \varphi - (\widehat{\vec{r}, \vec{r} + \vec{u}})) \times$$

$$\times h(|\vec{r} + \vec{v}|/C, \varphi - (\widehat{\vec{r}, \vec{r} + \vec{v}}))\, h(|\vec{r} + \vec{w}|/C, \theta)\, h(r/C, \varphi) \times$$

$$\times c(u, v, w, \alpha, \beta)\, P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} u)\, P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} v \operatorname{ch} w - \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w \cos(\alpha -$$

$$- \beta))\, J \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w \operatorname{sh} r\, du\, dv\, dw\, dr\, d\alpha\, d\beta\, d\varphi\, d\theta = 2\pi H_2^{-2}(0,0) \times$$

$$\times \iiiint\int \Big\{ \frac{1}{2\pi} \iiint h(|\vec{r} + \vec{u}|/C, \varphi - (\widehat{\vec{r}, \vec{r} + \vec{u}})) \times$$

$$\times h(|\vec{r} + \vec{v}|/C, \varphi - (\widehat{\vec{r}, \vec{r} + \vec{v}})) \times h(|\vec{r} + \vec{w}|/C, \theta) \times$$

$$\times h(r/C, \varphi)\, J \operatorname{sh} r\, dr\, d\varphi\, d\theta - H_4(0,0) \Big\} P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} u)\, P_{-\frac{1}{2}+i\lambda} \times$$

$$\times(\operatorname{ch} v \operatorname{ch} w - \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w \cos(\alpha-\beta))\, c(u, v, w, \alpha, \beta) \times$$

$$\times \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w\, du\, dv\, dw\, d\alpha\, d\beta + 2\pi H_4(0,0) H_2^{-2}(0,0) \times$$

$$\times \iiiint\!\!\int P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} u) P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} v \operatorname{ch} w - \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w \cos(\alpha-\beta)) \times$$

$$\times c(u, v, w, \alpha, \beta) \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w\, du\, dv\, dw\, d\alpha\, d\beta = 2\pi H_2^{-2}(0,0) \times$$

$$\times \iiiint\!\!\int K_1(\operatorname{sh} u, \operatorname{sh} v, \operatorname{sh} w) P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} u) P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} v \operatorname{ch} w -$$

$$- \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w \cos(\alpha-\beta))\, c(u, v, w, \alpha, \beta) \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w\, du\, dv\, dw\, d\alpha\, d\beta +$$

$$+ 2\pi H_4(0,0) H_2^{-2}(0,0) \iiiint\!\!\int P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} u) P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} v \operatorname{ch} w -$$

$$- \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w \cos(\alpha-\beta))\, c(u, v, w, \alpha, \beta) \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w\, du\, dv\, dw\, d\alpha\, d\beta.$$

В последних выкладках $H_4(0, 0)$ определяется формулой (4) и

$$K_1(\operatorname{sh} u, \operatorname{sh} v, \operatorname{sh} w) = \iint \left\{ \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} h(|\vec{r} + \vec{u}|/C, \varphi - (\widehat{\vec{r}, \vec{r} + \vec{u}})) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times h(|\vec{r} + \vec{v}|/C, \varphi - (\widehat{\vec{r}, \vec{r} + \vec{v}}))\, h(|\vec{r} + \vec{w}|/C, \theta), \varphi\, d\theta \right] - h^3(r/C, \varphi) \right\} \times$$

$$\times \operatorname{sh} r h(r/C, \varphi)\, dr\, d\varphi.$$

Пусть

$$K_1(\operatorname{sh} u, \operatorname{sh} v, \operatorname{sh} w) \leqslant K_1(\operatorname{sh} u + \operatorname{sh} v + \operatorname{sh} w) \tag{12}$$

это требование выполняется, если весовая функция $h(t, \varphi)$ ограничена, имеет ограниченную вариацию и равна нулю при $t > 1$, частности, если $h(t, \varphi)$ имеет вид (5)).

Тогда

$$D_1 \leqslant 2\pi K_1 H_2^{-2}(0,0) \int_0^{\infty}\!\!\int\!\!\int \int_0^{2\pi}\!\!\int (\operatorname{sh} u + \operatorname{sh} v + \operatorname{sh} w) |P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} u)| \times$$

$$\times |P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} v \operatorname{ch} w - \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w \cos(\alpha-\beta))|\, |c(u, v, w, \alpha, \beta)| \times$$

$$\times \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w\, du\, dv\, dw\, d\alpha\, d\beta + 2\pi H_4(0,0) H_2^{-2}(0,0) \times$$

$$\times \int_0^{\infty}\!\!\int\!\!\int \int_0^{2\pi}\!\!\int |P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} u)|\, |P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} v \operatorname{ch} w - \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w \cos(\alpha-\beta))| \times$$

$$\times |c(u, v, w, \alpha, \beta)| \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w\, du\, dv\, dw\, d\alpha\, d\beta.$$

Так как $|P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\cdot)| \leqslant 1$, то

$$D_1 \leqslant 2\pi K_1 H_2^{-2}(0,0) \int\int\int_0^{\infty} \int\int_0^{2\pi} (\operatorname{sh} u + \operatorname{sh} v + \operatorname{sh} w) \,|\, c(u, v, w, \alpha, \beta) \,|\, \times$$

$$\times \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w du dv dw d\alpha d\beta + 2\pi H_4(0,0) H_2^{-2}(0,0) \times$$

$$\times \int\int\int_0^{\infty} \int\int_0^{2\pi} |\, c(u, v, w, \alpha, \beta) \,|\, \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w du dv dw d\alpha d\beta.$$

Если

$$\int\int\int_0^{\infty} \int\int_0^{2\pi} (1 + \operatorname{sh} u + \operatorname{sh} v + \operatorname{sh} w) |\, c(u, v, w, \alpha, \beta) \,|\, \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w \times$$

$$\times du dv dw d\alpha d\beta < \infty, \tag{13}$$

то

$$D_1 \leqslant \widetilde{K}_1 H_2^{-2}(0,0) + L H_2^{-2}(0,0) H_4(0,0). \tag{14}$$

В частности, если $h(t, \varphi)$ имеет вид (5), то $D_1 \leqslant \widetilde{K}(\operatorname{ch} C - 1)^{-2} + \widetilde{L}(\operatorname{ch} C - 1)^{-1}$.

Оценим теперь D_2 в формуле (9):

$$D_2 = H_2^{-2}(0,0) \int\int\int\int \int\int\int\int h(r/C, \varphi) h(R/C, \Phi) h(t/C, \theta) h(T/C, \Theta) \times$$

$$\times B(\operatorname{ch} R \operatorname{ch} T - \operatorname{sh} R \operatorname{sh} T \cos(\Phi - \Theta)) B(\operatorname{ch} r \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} r \operatorname{sh} t \cos(\varphi - \theta)) \times$$

$$\times P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} r \operatorname{ch} R - \operatorname{sh} r \operatorname{sh} R \cos(\varphi - \Phi)) P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} t \operatorname{ch} T -$$

$$- \operatorname{sh} t \operatorname{sh} T \cos(\theta - \Theta)) \operatorname{sh} r \operatorname{sh} R \operatorname{sh} t \operatorname{sh} T dr dR dt dT d\varphi d\Phi d\theta d\Theta.$$

Так же, как и при оценке D_1, произведем замену переменных по формуле (11) и введем под знак интеграла функцию H_4 (0, 0), определяемую соотношением (4). Будем иметь

$$D_2 = 2\pi H_2^{-2}(0,0) \int\int\int\int\int \Big\{ \int\int\int \Big[\frac{1}{2\pi} \Big(\int h(|\vec{r} + \vec{u}|/C, \varphi - (\widehat{\vec{r}, \vec{r} + \vec{u}})) \times$$

$$\times h(|\vec{r} + \vec{v}|/C, \varphi - (\widehat{\vec{r}, \vec{r} + \vec{v}})) h(|\vec{r} + \vec{w}|/C, \theta) J \, d\theta \Big) - h^3(r/C, \varphi) \Big] \times$$

$$\times h(r/C, \varphi) \operatorname{sh} r dr d\varphi \Big\} P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} u) P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} v \operatorname{ch} w -$$

$$- \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w \cos(\alpha - \beta)) B(\operatorname{ch} u \operatorname{ch} v - \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v \cos \beta) \times$$

$$\times B(\operatorname{ch} w) \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w du dv dw d\alpha d\beta + 2\pi H_4(0,0) H_2^{-2}(0,0) \times$$

$$\times \int\int\int\int\int P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} u) P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} v \operatorname{ch} w - \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w \cos \alpha) \times$$

$$\times B(\operatorname{ch} u \operatorname{ch} v - \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v \cos\beta)\, B(\operatorname{ch} w) \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w\, du\, dv\, dw\, d\alpha\, d\beta =$$

$$= 2\pi H_2^{-2}(0,0)\, d_1 + 2\pi H_4(0,0)\, H_2^{-2}(0,0)\, d_2. \qquad (15)$$

Для оценки d_2 воспользуемся теоремой сложения для функции Лежандра [1]

$$P_\mu(\operatorname{ch}\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu-k+1)}{\Gamma(\mu+k+1)} e^{-ik\varphi} P_\mu^k(\operatorname{ch}\tau_1)\, P_\mu^k(\operatorname{ch}\tau_2),$$

$$\operatorname{ch}\tau = \operatorname{ch}\tau_1 \operatorname{ch}\tau_2 - \operatorname{sh}\tau_1 \operatorname{sh}\tau_2 \cos\varphi,$$

спектральным представлением (1) корреляционной функции $B(\cdot)$. Получим после несложных преобразований

$$d_2 = 4\pi^2 \iiint \int_0^\infty P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} u)\, P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} v)\, P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} w) \times$$

$$\times P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\operatorname{ch} u)\, P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\operatorname{ch} v)\, B(\operatorname{ch} w)\, f(\mu)\, \mu \operatorname{th}\pi\mu \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w \times$$

$$\times du\, dv\, dw\, d\mu = 4\pi^2 \left[\int B(\operatorname{ch} w)\, P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} w) \operatorname{sh} w\, dw\right] \times$$

$$\times \left\{\int_0^\infty \left[\int P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} u)\, P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\operatorname{ch} u)\, \mu \operatorname{th}\pi\mu \operatorname{sh} u\, du\right] \times\right.$$

$$\left.\times \left[\int P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} v)\, P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\operatorname{ch} v) \operatorname{sh} v\, dv\right] f(\mu)\, d\mu\right\}.$$

Используем свойство ортогональности функций Лежандра [1], выражаемое формулой

$$\operatorname{th}\pi\mu\, \gamma_m(\lambda)\, \gamma_m(\mu) \int_0^\infty P^m_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} r)\, P^m_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\operatorname{ch} r) \operatorname{sh} r\, dr = \delta(\lambda-\mu),$$

где

$$\gamma_m(\lambda) = \sqrt{(-1)^m \frac{\Gamma(1/2+i\lambda-m)}{\Gamma(1/2+i\lambda+m)}}.$$

Получим

$$d_2 \sim 4\pi^2 f(\lambda) \int_0^\infty \delta(\lambda-\mu) \left[\int_0^C P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} v)\, P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\operatorname{ch} v) \operatorname{sh} v\, dv\right] \times$$

$$\times f(\mu)\, d\mu = 4\pi^2 f(\lambda) \int_0^C \left[P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} v)\right]^2 \operatorname{sh} v\, dv.$$

Принимая во внимание поведение функции Лежандра при больших значениях аргумента [2] $[P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(z)]^2 \sim (\lambda z \operatorname{th}\pi\lambda)^{-1}$ и соотношение $|P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} v)| \leqslant 1$, имеем

$$\int_0^C [P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} v)]^2 \operatorname{sh} v dv = \int_0^{\sqrt{C}} [P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} v)]^2 \operatorname{sh} v dv +$$

$$+ \int_{\sqrt{C}}^C [P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} v)]^2 \operatorname{sh} v dv \sim \int_0^{\sqrt{C}} \operatorname{sh} v dv + (\lambda \operatorname{th} \pi\lambda)^{-1} \int_{\sqrt{C}}^C \frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch} v} dv \sim$$

$$\sim \operatorname{ch} \sqrt{C} + (\lambda \operatorname{th} \pi\lambda)^{-1} (\ln \operatorname{ch} C - \ln \operatorname{ch} \sqrt{C}) \sim \operatorname{ch} \sqrt{C},$$

если только $\lambda \neq 0$.

Таким образом $d_2 \sim 4\pi^2 f^2(\lambda) \operatorname{ch} \sqrt{C} \sim \operatorname{ch} \sqrt{C}$.

Оценим теперь d_1. По аналогии с оценкой d_2 имеем

$$d_1 \sim K_1 \cdot 4\pi^2 \iiint \int_0^\infty [\operatorname{sh} u + \operatorname{sh} v + \operatorname{sh} w] P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} u) P_{-\frac{1}{2}+i\lambda} \times$$

$$\times (\operatorname{ch} v) P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} w) P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\operatorname{ch} u) P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\operatorname{ch} v) B(\operatorname{ch} w) \times$$

$$\times f(\mu) \mu \operatorname{th} \pi\mu \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v \operatorname{sh} w du dv dw d\mu = K_1 \cdot 4\pi^2 (d_{11} + d_{12} + d_{13}),$$

где d_{1i}, $i = 1, 2, 3$ соответствуют слагаемым в квадратных скобках подынтегральной функции в последнем выражении для d_1.

Заметим, что d_{13} отличается от d_2 только тем, что в последнем плотность $f(\lambda)$ заменяется на

$$\int_0^\infty B(\operatorname{ch} w) P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} w) \operatorname{sh}^2 w \, dw.$$

Отсюда следует, что при выполнении условия

$$\int_0^\infty |B(\operatorname{ch} w) P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} w)| \operatorname{sh}^2 w dw < \infty, \tag{16}$$

так же как и d_2, $d_{13} \sim \operatorname{ch} \sqrt{C}$.

Оценим d_{11} и d_{12}. Нетрудно видеть, что

$$d_{11} \sim d_{12} \sim 4\pi^2 f^2(\lambda) \int_0^C [P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} v)]^2 \operatorname{sh}^2 v dv \sim$$

$$\sim 4\pi^2 f^2(\lambda) \operatorname{sh} C \int_0^C [P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} v)]^2 \operatorname{sh} v dv \sim 4\pi^2 f^2(\lambda) \operatorname{sh} C \operatorname{ch} \sqrt{C} \sim \operatorname{ch} C \operatorname{ch} \sqrt{C}.$$

Возвращаясь к d_1, получаем $d_1 \sim \operatorname{ch} C \operatorname{ch} \sqrt{C}$. В частности, если $h(t, \varphi)$ имеет вид (5), то $d_1 \sim (\operatorname{ch} C)^{-1} \operatorname{ch} \sqrt{C} \to 0$, при $C \to \infty$.

Подставив в (15) оценки для d_1 и d_2, будем иметь

$$D_2 \sim \operatorname{ch} C \operatorname{ch} \sqrt{C} H_2^{-2}(0,0) + \operatorname{ch} \sqrt{C} H_4(0,0) H_2^{-2}(0,0).$$

Легко доказать, что $D_3 \sim D_2$. Принимая во внимание (9), окон-
ательно получаем

$$D\widehat{f}_C(\lambda) \sim H_2^{-2}(0,0)\,[H_4(0,0) + H_4(0,0) \operatorname{ch} \sqrt{C} + \operatorname{ch} C \operatorname{ch} \sqrt{C}].$$

Для функции $h(t, \varphi)$ вида (5) $D\widehat{f}_C(\lambda) \sim (\operatorname{ch} C)^{-1} \operatorname{ch} \sqrt{C} \to 0$, при $\to \infty$.

Так как $H_j(0,0), j = 2,4$ имеет порядок $\operatorname{ch} C$, то при условии, го функции $h(t, \varphi)$, $B(\operatorname{ch} u)$, $c(u, v, w, \alpha, \beta)$ удовлетворяют соотно-
ениям (10), (12), (13), (16) и $\lambda \neq 0$ $D\widehat{f}_C(\lambda) \to 0$, если $C \to \infty$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Оценка

$$\widehat{f}_C(\lambda) = [2\pi H_2(0,0)]^{-1} \iint \int_0^{2\pi}\!\!\int h(r/C, \varphi)\, h(R/C, \Phi)\, \xi(r, \varphi)\, \xi(R, \Phi) \times$$

$$\times \operatorname{sh} r \operatorname{sh} R P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} r \operatorname{ch} R - \operatorname{sh} r \operatorname{sh} R \cos(\varphi - \Phi))\, dr dR d\varphi d\Phi$$

ри ограничениях (10), (12), (13), (16), налагаемых на весовую функ-
ию $h(t, \varphi)$, корреляционную функцию $B(\operatorname{ch} u)$ и кумулянту (u, v, w, α, β), при условии $\lambda \neq 0$, является состоятельной оцен-
ой спектральной плотности $f(\lambda)$ однородного и изотропного слу-
айного поля на плоскости Лобачевского.

Список литературы: 1. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория пред-
авлений групп. М., «Наука», 1965. 2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие тран-
ендентные функции, т. 1. М., «Наука», 1965.

Yu. D. Popov

ON ESTIMATE OF SPECTRAL DENSITY OF HOMOGENEOUS AND ISOTROPIC RANDOM FIELD ON LOBACHEVSKY PLANE

The estimate of the spectral density of the homogeneous and isotropic random
eld on Lobachevsky plane is proposed. It is proved that such estimate is asymptoti-
lly unbiased and consistent under some conditions.

Поступила в редколлегию 18.09 1976.