УДК 519.21

Д. С. СИЛЬВЕСТРОВ, д-р физ.-мат. наук,
Киевский университет

ТЕОРЕМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ В СХЕМЕ СЕРИЙ. I

1. Введение. Пусть $\mathbf{F} = < F_\varepsilon(\cdot),\ \varepsilon \in \Xi >$ — некоторое параметрическое семейство функций распределения (ф. р.) на $[0, \infty)$, не сосредоточенных в нуле. Через $F_\varepsilon^{(*r)}(t)$ будем обозначать r — кратную свертку ф. р. $F_\varepsilon(\cdot)$ и через $U_\varepsilon(t) = \sum\limits_{r=0}^{\infty} F_\varepsilon^{(*r)}(t),\ t \geqslant 0$ — функцию восстановления, соответствующую ф. р. $F_\varepsilon(\cdot)$. Рассмотрим уравнение восстановления

$$Z_\varepsilon(t) = q_\varepsilon(t) + \int\limits_0^{t+0} Z_\varepsilon(t-s) F_\varepsilon(ds)^{*)}, \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Здесь $Q = < q_\varepsilon(\cdot),\ \varepsilon \in \Xi >$ — семейство функций из L, где L — класс измеримых числовых функций на $[0, \infty)$, ограниченных на каждом конечном промежутке.

Как известно [1], единственное решение уравнения восстановления в классе L имеет вид

$$Z_\varepsilon(t) = \int\limits_0^{t+0} q_\varepsilon(t-s) U_\varepsilon(ds). \tag{2}$$

Важную роль в теории вероятностей играет так называемая теорема восстановления [1], которая описывает поведение решения уравнения (1) при $t \to \infty$.

Через $\mu_\varepsilon = \int\limits_0^{\infty} [1 - F_\varepsilon(x+0)]\, dx$ будем обозначать среднее ф. р. $F_\varepsilon(\cdot)$.

Пусть $F_\varepsilon(\cdot)$ — неарифметическое распределение, т. е. распределение, для которого $\sum\limits_{r=0}^{\infty} [F_\varepsilon(rh+0) - F_\varepsilon(rh)] < 1$ при $h > 0$. В этом случае, если функция $q_\varepsilon(\cdot)$ непосредственно интегрируема по Риману на $[0, \infty)$ [1], то теорема восстановления утверждает, что

$$Z_\varepsilon(t) \to \frac{1}{\mu_\varepsilon} \int\limits_0^{\infty} q_\varepsilon(s)\, ds \quad \text{при } t \to \infty. \tag{3}$$

---

*) Через $U(A)$ будем обозначать меру на борелевской δ-алгебре $B_{(1)}^{+}$ подмножеств $[0, \infty)$, обычным образом порождаемую монотонно неубывающей непрерывной слева функцией $U(t)$ и задаваемую на интервалах формулой $U([a, b)) = U(b) - U(a)$.

В первой части настоящей работы изучаются условия, при ко-рых утверждение сохраняет силу в схеме серий, когда при $t \to \infty$ раметр $\varepsilon = \varepsilon_t$ изменяется таким образом, что ф. р. $F_{\varepsilon_t}(\cdot)$ сходят-слабо к некоторой предельной не сосредоточенной в нуле ф. р. $_0(\cdot)$, а функции $q_{\varepsilon_t}(\cdot)$ сходятся в некотором смысле к предель-й функции $q_{\varepsilon_0}(\cdot)$ из класса L.

Пусть для каждого $\varepsilon \in \Xi \tau_{\varepsilon k}$, $k = 0, 1, \ldots$ — последовательность отрицательных, независимых, одинаково распределенных случай-х величин (с. в.) с ф. р. $F_\varepsilon(\cdot)$. Для каждого $t \geqslant 0$ определим в. $\nu_\varepsilon(t) = \max\left(n : \sum_{k=1}^{n} \tau_{\varepsilon k-1} \leqslant t\right)$, представляющую собой число сстановлений за время t в простом процессе восстановления, по-роенном по с. в. $\tau_{\varepsilon k}$. Как известно [1], $M\nu_\varepsilon^r(t) < \infty$ для всех $\geqslant 0$ и $r = 1, 2, \ldots$ и $\mathbf{M}\nu_\varepsilon(t) = U_\varepsilon(t+0) - 1$, $t \geqslant 0$.

В первой части работы изучается также поведение в схеме се-й при $t \to \infty$ моментов $\mathbf{M}[\nu_{\varepsilon_t}(t+h) - \nu_{\varepsilon_t}(t)]^r$ (для моментов пер-го порядка это поведение описывается так называемой теоремой лекуэлла [1]).

Во второй части работы полученные результаты будут пере-сены на случай, когда допредельные ф. р. $F_{\varepsilon_t}(\cdot)$ несобственные, оме того, будут изучены условия, при которых соотношение (3) полняется равномерно по классу ф. р. $\mathbf{F}$ и семейству функ-й Q.

Отметим, что в работе рассматривается только «неарифмети-ий случай», но аналогичные результаты могут быть получены для случая, когда $\mathbf{F}$ представляет собой семейство арифметиче-их распределений с фиксированным шагом h.

2. Оценки для моментов. Элементарная теорема восстановления. Обозначим через $\gamma_\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{\nu_\varepsilon(t)+1} \tau_{\varepsilon_{k-1}} - t$ перескок процесса восстано-ения через уровень t. Приведем без доказательства соотношение

$$\mathbf{P}\{\nu_\varepsilon(t+h) - \nu_\varepsilon(t) = r\} = \delta(r, 0)\,^{*)}\mathbf{P}\{\gamma_\varepsilon(t) > h\} + \\ + \int_0^{h+0} \mathbf{P}\{\nu_\varepsilon(h-s) + 1 = r\}\,\mathbf{P}\{\gamma_\varepsilon(t) \in ds\}, \quad r = 0, 1, \ldots, \tag{4}$$

которого следует формула

$$[\nu_\varepsilon(t+h) - \nu_\varepsilon(t)]^r = \int_0^{h+0} \mathbf{M}[\nu_\varepsilon(h) + 1]^r\,\mathbf{P}\{\gamma_\varepsilon(t) \in ds\}, \quad r = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

*) $\delta(r, k) = \begin{cases} 1, & \text{если } r = k; \\ 0, & \text{если } r \neq k. \end{cases}$

В дальнейшем постоянно используем следующее условие равномерной по классу $\mathbf{F}$ отделимости ф. р. $F_\varepsilon(\cdot)$ от нуля

A: существует $\tau > 0$ и $\Delta < 1$ такие, что $1 - F_\varepsilon(\tau + 0) \geqslant 1 - \Delta$, $\varepsilon \in \Xi$.

Следующая лемма дает равномерную по классу Ξ оценку для моментов с. в. $\nu_\varepsilon(t)$.

Лемма 1. При выполнении условия **A** для каждого $r \geqslant 1$ существует конечная константа $K^{(r)}_{\Delta,\tau}$ такая, что

$$\sup_{\varepsilon\in\Xi} \mathbf{M}\nu^r_\varepsilon(t) \leqslant K^{(r)}_{\Delta,\tau}(t+\tau)^r, \quad t \geqslant 0. \tag{6}$$

Доказательство. Из соотношения (5) очевидным образом следует оценка

$$\mathbf{M}[\nu_\varepsilon(t+h) - \nu_\varepsilon(t)]^r \leqslant \mathbf{M}[\nu_\varepsilon(h) + 1]^r, \quad h, t \geqslant 0, r = 1, 2, \dots. \tag{7}$$

Имеем

$$\mathbf{M}\nu^r_\varepsilon(t) = \mathbf{M}\left[\sum_{k=1}^{\left[\frac{t}{\tau}\right]} (\nu_\varepsilon(k\tau) - \nu_\varepsilon((k-1)\tau)) + \nu_\varepsilon(t) - \right.$$

$$\left. - \nu_\varepsilon\left(\left[\frac{t}{\tau}\right]\right)\tau\right)\Bigg]^r \leqslant \left(\left[\frac{t}{\tau}\right] + 1\right)^{r-1} \left[\sum_{k=1}^{\left[\frac{t}{\tau}\right]} \mathbf{M}(\nu_\varepsilon(k\tau) - \nu_\varepsilon((k-1)\tau))^r + \right.$$

$$\left. + \mathbf{M}\left(\nu_\varepsilon(t) - \nu_\varepsilon\left(\left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right)\right)^r\right] \leqslant \left(\left[\frac{t}{\tau}\right] + 1\right)^r \mathbf{M}[\nu_\varepsilon(\tau) + 1]^r \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{t+\tau}{\tau}\right)^r [\sqrt[r]{\mathbf{M}\nu^r_\varepsilon(\tau)} + 1]^r. \tag{8}$$

Поскольку при выполнении условия **A** $\mathbf{P}\{\nu_\varepsilon(\tau) \geqslant n\} = \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{n} \tau_{\varepsilon_{k-1}} \leqslant \tau\right\} \leqslant [F_\varepsilon(\tau + 0)]^n \leqslant \Delta^n$ для любого $\varepsilon \in \Xi$, то $\mathbf{M}\nu^r_\varepsilon(\tau) \leqslant a^{(r)}_\Delta$, где $a^{(r)}_\Delta = \sum_{n=0}^{\infty} n^r \Delta^n < \infty$. Продолжая оценку (8), находим

$$\mathbf{M}\nu^r_\varepsilon(t) \leqslant (t+\tau)^r \frac{1}{\tau^r} [\sqrt[r]{a^{(r)}_\Delta} + 1]^r, \; t \geqslant 0, \; \varepsilon \in \Xi. \tag{9}$$

Следствие 1. При выполнении условия **A** для любого $h > 0$

$$\sup_{\varepsilon\in\Xi} \sup_{t\geqslant 0} \mathbf{M}[\nu_\varepsilon(t+h) - \nu_\varepsilon(t)]^r \leqslant \sup_{\varepsilon\in\Xi} \sup_{t\geqslant 0} \mathbf{M}[\nu_\varepsilon(h) + 1]^r \leqslant$$

$$\leqslant [(h+\tau)\sqrt[r]{K^{(r)}_{\Delta,\tau}} + 1]^r < \infty, \quad r \geqslant 1. \tag{10}$$

При $r=1$, учитывая то, что $\mathbf{M}|\nu_\varepsilon(t+h)-\nu_\varepsilon(t)|=U_\varepsilon(t+h+0)-U_\varepsilon(t+0)$, получаем для мер $U_\varepsilon(\cdot)$ оценку

$$\sup_{\varepsilon\in\Xi}\sup_{t\geqslant 0} U_\varepsilon(t+A)\leqslant (d(A)+2\tau)K^{(1)}_{\Delta,\tau}+1<\infty, \text{*)} \qquad (11)$$

где A — произвольное ограниченное множество из $B^{+}_{(1)}$.

Пусть теперь $F_{\varepsilon_k}(\cdot)$, $k=0, 1, \ldots$ — некоторая последовательность ф. р. из $\mathbf{F}$. В дальнейшем предполагается, что ф. р. асимптотически равномерно по ε_k принадлежат области притяжения вырожденного закона. В терминах с. в. $\tau_{\varepsilon l}$ это означает, что выполняется следующее условие

$\mathbf{B}_1$: для произвольной последовательности $t'_k\to\infty$ при $k\to\infty$

$$\frac{1}{t'_k}\sum_{l=1}^{[t'_k]}\tau_{\varepsilon_k l-1}\xrightarrow{P}\mu_0.$$

Если $\mu_0<\infty$, то для выполнения $\mathbf{B}_1$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие

$\mathbf{B}'_1$: для произвольной последовательности $t'_k\to\infty$ при $k\to\infty$:

а) $t'_k[1-F_{\varepsilon_k}(vt'_k)]\to 0,\ v>0,$

б) $\int_0^{vt'_k} xF_{\varepsilon_k}(dx)\to\mu_0<\infty,\ v>0.$

Если $\mu_0=+\infty$, то для выполнения $\mathbf{B}_1$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$\mathbf{B}_2$: для произвольной последовательности $t'_k\to\infty$ при $k\to\infty$

$$\int_0^{t'_k}[1-F_{\varepsilon_k}(x+0)]\,dx\to\infty.$$

Заметим, что в случае, когда ф. р. $F_{\varepsilon_k}(\cdot)$ равномерно по ε_k отделены от нуля, необходимо $\mu_0>0$.

Следующая теорема переносит на схему серий элементарную теорему восстановления.

Теорема 1. Если ф. р. $F_{\varepsilon_k}(\cdot)$ асимптотически равномерно по ε_k отделены от нуля, т. е. $\varliminf_{k\to\infty}[1-F_{\varepsilon_k}(\tau+0)]>0$ для некоторого $\tau>0$ и выполняется условие $\mathbf{B}_1$, то для любой последовательности $t_k\to\infty$ при $k\to\infty$

$$\frac{1}{t^r_k}\mathbf{M}\nu^r_{\varepsilon_k}(t_k)\to\mu_0^{-r},\quad r=1, 2, \ldots \qquad (12)$$

(здесь $\mu_0^{-r}=0$, если $\mu_0=+\infty$).

*) $t\pm A$ — множество точек $y\in R_1$ таких, что $\pm(y-t)\in A$.

Доказательство. По определению с. в. $\nu_\varepsilon(t)$

$$\mathbf{P}\{\nu_\varepsilon(t) > tx\} = \mathbf{P}\left\{\sum_{l=1}^{[tx]+1} \tau_{\varepsilon l-1} \leqslant t\right\}. \qquad (13)$$

Из (13) и условия $\mathbf{B}_1$ очевидным образом следует, что для любой последовательности $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$ с. в.

$$\frac{\nu_{\varepsilon_k}(t_k)}{t_k} \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{1}{\mu_0}. \qquad (14)$$

Кроме того, в силу леммы 1 справедливо соотношение

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \mathbf{M}\left[\frac{\nu_{\varepsilon_k}(t_k)}{t_k}\right]^r < \infty, \quad r \geqslant 1. \qquad (15)$$

Теперь утверждение теоремы следует в силу (14) и (15) из соответствующего варианта теоремы Лебега.

Замечание 1. Предположим, что для ф. р. $F_{\varepsilon_k}(\cdot)$ выполняется условие

$\mathbf{C}: F_{\varepsilon_k}(\cdot) \Rightarrow F_{\varepsilon_0}(\cdot)$ при $k \to \infty$ *), где ф. р. $F_{\varepsilon_0}(\cdot)$ не сосредоточена в нуле.

В этом случае, очевидно, ф. р. $F_{\varepsilon_k}(\cdot)$ асимптотически равномерно по ε_k отделены от нуля.

Можно показать, что при выполнении условия $\mathbf{C}$ условие $\mathbf{B}_1'$ эквивалентно следующему условию

$$\mathbf{D}_1: \lim_{T\to\infty} \overline{\lim_{k\to\infty}} \int_T^\infty [1 - F_{\varepsilon_k}(x+0)]\, dx = 0.$$

При этом константа $\mu_0 = \mu_{\varepsilon_0} < \infty$ и $\mu_{\varepsilon_k} \to \mu_{\varepsilon_0}$ при $k \to \infty$ (здесь, как и выше, μ_{ε_k} — среднее ф. р. $F_{\varepsilon_k}(\cdot)$).

Более того, как нетрудно проверить, условие $\mathbf{D}_1$ в этом случае эквивалентно условию

$$\mathbf{D}_1': \mu_{\varepsilon_k} \to \mu_{\varepsilon_0} < \infty \text{ при } k \to \infty.$$

Аналогично условие $\mathbf{B}_2$ при выполнении условия $\mathbf{C}$ эквивалентно условию

$$\mathbf{D}_2: \lim_{T\to\infty} \underline{\lim_{k\to\infty}} \int_0^\infty [1 - F_{\varepsilon_k}(x+0)]\, dx = \infty,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно при выполнении $\mathbf{C}$ условию

$$\mathbf{D}_2': \mu_{\varepsilon_0} = +\infty.$$

*) Символ $F_{\varepsilon_k}(\cdot) \Rightarrow F_{\varepsilon_0}(\cdot)$ обозначает слабую сходимость ф. р.

3. **Теорема Блекуэлла.** В дальнейшем постоянно используется ледующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. Пусть $V_{\varepsilon_k}(\cdot)$, $k=0, 1, \ldots$ — конечные меры на $_{T_1,T_2}$ — борелевской σ-алгебре подмножеств $[T_1, T_2) \subseteq R_1$ и $q_{\varepsilon_k}(\cdot)$, $= 0, 1, \ldots$ — измеримые числовые функции на $[T_1, T_2)$. Тогда, сли выполняются условия:

$$\text{I) } V_{\varepsilon_k}(\cdot) \Rightarrow V_{\varepsilon_0}(\cdot) \text{ при } k \to \infty\text{*)};$$

$$\text{II) } \varlimsup_{k\to\infty} \sup_{T_1<t<T_2} |q_{\varepsilon_k}(t)| < L < \infty;$$

III) функции $q_{\varepsilon_k}(\cdot)$ сходятся к $q_{\varepsilon_0}(\cdot)$ при $k \to \infty$ равномерно в аждой точке $t \in T_q$, где T_q — некоторое множество точек непрерывности функции $q_{\varepsilon_0}(\cdot)$, такое, что $V_{\varepsilon_0}(T_q) = 0$**), то

$$\int\limits_{[T_1,T_2)} q_{\varepsilon_k}(t) V_{\varepsilon_k}(dt) \to \int\limits_{[T_1,T_2)} q_{\varepsilon_0}(t) V_{\varepsilon_0}(dt) \text{ при } k \to \infty$$

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть слуай, когда все меры $V_{\varepsilon_k}(\cdot)$ являются вероятностными мерами. Как оказано в работе [2], при выполнении условия I) можно построить а некотором вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbf{P})$ случайные веичины η_{ε_k}, $k=0, 1, \ldots$, для которых: а) $\mathbf{P}\{\eta_{\varepsilon_k} \in A\} = V_{\varepsilon_k}(A)$, $A \in B_{T_1, T_2}$ для каждого $k = 0, 1, \ldots$; б) $\eta_{\varepsilon_k} \xrightarrow{\text{P1}} \eta_{\varepsilon_0}$ при $k \to \infty$. Используя) и условие III), нетрудно показать, что и с. в. $q_{\varepsilon_k}(\eta_{\varepsilon_k}) \xrightarrow{\text{P1}} q_{\varepsilon_0}(\eta_{\varepsilon_0})$ ри $k \to \infty$. Кроме того, для всех достаточно больших k в силу условия I $|q_{\varepsilon_k}(\eta_{\varepsilon_k})| \leqslant L + 1$. Поэтому, используя теорему Лебега, получаем $\mathbf{M}q_{\varepsilon_k}(\eta_{\varepsilon_k}) \to \mathbf{M}q_{\varepsilon_0}(\eta_{\varepsilon_0})$ при $k \to \infty$. Последнее соотношение в силу) эквивалентно утверждению леммы.

В дальнейшем предполагается выполненным условие

$\mathrm{C}_1: F_{\varepsilon_k}(\cdot) \Rightarrow F_{\varepsilon_0}(\cdot)$ при $k \to \infty$, где $F_{\varepsilon_0}(\cdot)$ — не сосредотоенная в нуле неарифметическая ф. р.

Следующая теорема представляет собой аналог теоремы Блеуэлла для случая конечных средних в схеме серий.

---

*) Символ $V_{\varepsilon_k}(\cdot) \Rightarrow V_{\varepsilon_0}(\cdot)$ означает, что $V_{\varepsilon_k}(A) \to V_{\varepsilon_0}(A)$ при $k \to \infty$ для аждого A такого, что $V_{\varepsilon_0}(\text{Гр. } A) = 0$ и $V_{\varepsilon_k}([T_1, T_2)) \to V_{\varepsilon_0}([T_1, T_2))$ при $\to \infty$.

**) Функции $q_{\varepsilon_k}(\cdot)$ сходятся к $q_{\varepsilon_0}(\cdot)$ при $k \to \infty$ равномерно в точке t, если

$$\lim_{c\to 0} \varlimsup_{k\to\infty} \sup_{|h|\leqslant c} |q_{\varepsilon_k}(t+h) - q_0(t)| = 0.$$

Теорема 2. Если для последовательности ф. р. $F_{\varepsilon_k}(\cdot)$ выполняются условия C_1 и $\mathrm{Д}_1$, то для произвольной последовательности $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$ и $h > 0$

$$U_{\varepsilon_k}(t_k + h) - U_{\varepsilon_k}(t_k) \to \frac{h}{\mu_{\varepsilon_0}} \text{ при } k \to \infty,$$

где $\mu_{\varepsilon_0} = \int\limits_0^\infty [1 - F_{\varepsilon_0}(x + 0)]\, dx < \infty$.

Доказательство теоремы в целом аналогично доказательству «обычной» теоремы Блекуэлла, приведенному в работе [1].

В силу условия C_1 можно, не нарушая общности, считать, что все ф. р. $F_{\varepsilon_k}(\cdot)$ равномерно по ε_k отделены от нуля, а именно,

$$1 - F_{\varepsilon_k}(\tau + 0) \geqslant 1 - \Delta, \ \tau > 0, \ \Delta < 1, \ k = 0, 1, \ldots \tag{16}$$

Из (16) в силу леммы 1 следует, что для любого ограниченного множества A

$$\max_{k \geqslant 1 \ldots t \geqslant 0} \sup U_{\varepsilon_k}(t + A) \leqslant K_1 d(A) + K_2 < \infty, \tag{17}$$

где K_1, $K_2 = \mathrm{const} < \infty$.

Из (17) в силу соответствующего варианта теоремы выбора [1] следует, что для любой последовательности $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$ можно выбрать подпоследовательность $t'_k \to \infty$ из последовательности t_k и подпоследовательность ε'_k из последовательности ε_k так, чтобы меры

$$U_{\varepsilon'_k}(t'_k + A) \Rightarrow V(A) \text{ при } k \to \infty. \tag{18}$$

Здесь $V(A)$ — некоторая мера на $B_{(1)}$ — борелевской σ-алгебре подмножеств R_1.

Заметим, что в силу (17) мера $V(A)$ удовлетворяет соотношению

$$V(A) \leqslant K_1 d(A) + K_2 \tag{19}$$

для любого ограниченного множества $A \in B_{(1)}$.

Как и в обычном случае, на первом этапе доказательства нужно показать, что мера $V(A)$ пропорциональна мере Лебега, т. е. $V(A) = \alpha m(A)$, где $\alpha = \mathrm{const}$, $m(A)$ — мера Лебега на $B_{(1)}$. Для этого, как нетрудно понять, достаточно было бы показать, что для любой непрерывной функции $q(x)$ на R_1, вырождающейся в нуль вне некоторого интервала $[0, a]$, функция

$$h(x) = \int\limits_{x-a}^{x+0} q(x - v) V(dv), \ x \in R_1 \tag{20}$$

является константой ($h(x) \equiv \mathrm{const}$, $x \in R_1$).

Очевидно, любая функция $h(x)$, задаваемая (20), непрерывна по x в силу непрерывности функции $q(x)$ и равномерно по x ограничена, а именно, $|h(x)| \leqslant G(K_1 a + K_2)$, $x \in R_1$, где $G = \sup\limits_{x \in R_1} |q(x)| < \infty$.

Рассмотрим теперь уравнение свертки

$$h(x) = \int_0^{+\infty} h(x-s) F_{\varepsilon_0}(ds), \quad x \in R_1. \tag{21}$$

В силу леммы Шоке — Дени [1] в том случае, когда $F_{\varepsilon_0}(\cdot)$ — неарифметическое не сосредоточенное в нуле распределение на $[0, \infty)$, уравнение (21) имеет единственное непрерывное ограниченное решение $h(x) = \text{const}$, $x \in R_1$. Поэтому в силу сделанных выше замечаний, для того чтобы показать, что мера $V(A)$ пропорциональна мере Лебега, достаточно показать, что любая функция, задаваемая соотношением (20), удовлетворяет уравнению свертки (21).

Итак, пусть $q(x)$ — непрерывная функция на R_1, вырождающаяся в нуль вне интервала $[0, a]$. Пусть $Z_{\varepsilon_k}(t) = \int\limits_0^{t+0} q(t-s) U_{\varepsilon_k}(ds)$ — решение уравнения восстановления $Z_{\varepsilon_k}(t) = q(t) + \int\limits_0^{t+0} Z_{\varepsilon_k}(t-s) \times$ $\times F_{\varepsilon_k}(ds)$. В силу леммы 2 функции

$$Z_{\varepsilon'_k}(t'_k + x) = \int_0^{t'_k+x+0} q(t'_k + x - s) U_{\varepsilon'_k}(ds) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} q(x-v) U_{\varepsilon'_k}(t'_k + dv) = \int_{x-a}^{x+0} q(x-v) U_{\varepsilon'_k}(t'_k + dv) \to$$

$$\to h(x) = \int_{x-a}^{x+0} q(x-v) V(dv) \text{ при } k \to \infty. \tag{22}$$

Покажем теперь, что сходимость функций $Z_{\varepsilon'_k}(t'_k + x)$ к $h(x)$ равномерна в каждой точке x. Действительно, используя (22) и (17), а также учитывая, что функция $q(x)$ равномерно непрерывна на R_1, находим

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \sup_{|h| \leqslant c} |Z_{\varepsilon'_k}(t'_k + x + h) - h(x)| \leqslant \lim_{k \to \infty} |Z_{\varepsilon'_k}(t'_k + x) -$$

$$- h(x)| + \overleftarrow{\lim_{k \to \infty}} \sup_{|h| \leqslant c} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x + h - v) - g(x - v)| U_{\varepsilon'_k}(t'_k + dv) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{y\in R_1}\sup_{|h|\leqslant c}\{|g(y+h)-g(y)|\,\overline{\lim_{k\to\infty}}\,U_{\varepsilon'_k}(t'_k+[x-a,\,x+c])\leqslant$$

$$\leqslant [K_1(a+c)+K_2]\sup_{y\in R}\sup_{|h|\leqslant c}|g(y+h)-g(y)|\to 0 \text{ при } c\to 0. \tag{23}$$

Заметим, что функции $Z_{\varepsilon'_k}(t'_k+x)$ равномерно по x и k ограничены, а именно:

$$|Z_{\varepsilon'_k}(t'_k+x)|\leqslant G\,[U_{\varepsilon'_k}(t'_k+x+0)-U_{\varepsilon'_k}(t'_k,\,x-a)]\leqslant$$

$$\leqslant G(K_1a+K_2). \tag{24}$$

Учитывая тот факт, что $Z_{\varepsilon_k}(t'_k+x)$ есть решение уравнения восстановления, имеем

$$Z_{\varepsilon'_k}(t'_k+x)=q(t'_k+x)+\int_0^{t_k+x+0} Z_{\varepsilon'_k}(t'_k+x-s)\,F'_{\varepsilon_k}(ds)=$$

$$=q(t'_k+x)+\int_0^{\infty} Z_{\varepsilon'_k}(t'_k+x-s)\,F_{\varepsilon'_k}(ds). \tag{25}$$

Здесь $Z_{\varepsilon'_k}(t'_k+x-s)=0$ для $s>t'_k+x$.

Так как, очевидно, $q(t'_k+x)\to 0$ при $k\to\infty$, а функции $Z_{\varepsilon'_k}(t'_k+x-s)$ равномерно по s и k ограничены и сходятся в каждой точке s к непрерывной функции $h(x-s)$, то, применяя ко второму слагаемому справа в (25) лемму 2 (роль мер $V_{\varepsilon_k}(\cdot)$ играют меры $F_{\varepsilon'_k}(\cdot)$, для которых в силу условия $\mathbf{C}_1$ выполняется условие 1) леммы 2), получаем

$$Z_{\varepsilon'_k}(t'_k+x)\to\int_0^{\infty} h(x-s)\,F_{\varepsilon_0}(ds) \text{ при } k\to\infty,\ x\in R_1. \tag{26}$$

Из (22) и (26) следует, что функция $h(x)$ удовлетворяет уравнению свертки (21).

Для доказательства теоремы остается показать, что независимо от выбора подпоследовательностей t'_k и ε'_k таких, что выполняется (18), соответствующая константа $\alpha=\dfrac{1}{\mu_{\varepsilon_0}}$.

Если выбрать в уравнении восстановления функцию $q_{\varepsilon_k}(t)=1-F_{\varepsilon_k}(t+0)$, то решение уравнения восстановления тождественно равно 1, т. е.

$$1=\int_0^{t+0}[1-F_{\varepsilon_k}(t-s+0)\,U_{\varepsilon_k}(ds). \tag{27}$$

Отсюда для $t'_k > T$

$$1 + \int\limits_0^{t'_k+0} [1 - F_{\varepsilon'_k}(t'_k - s + 0) U_{\varepsilon'_k}(ds) =$$

$$= \int\limits_0^T [1 - F_{\varepsilon'_k}(v + 0) U_{\varepsilon'_k}(t'_k - dv) + \int\limits_T^{t'_k+0} [1 - F_{\varepsilon'_k}(v) U_{\varepsilon'_k}(t'_k - dv). \tag{28}$$

Воспользовавшись оценкой (11), что возможно в силу (16), получим

$$\begin{aligned}\varlimsup_{k\to\infty} \sum_{r=\left[\frac{T}{\tau}\right]}^{\infty} [1 - F_{\varepsilon'_k}(r\tau + 0)] [U_{\varepsilon'_k}(t'_k + (r+1)\tau + 0) - U_{\varepsilon'_k}(t'_k + r\tau)] \leqslant \\ \leqslant (K_1\tau + K_2) \varlimsup_{k\to\infty} \sum_{r=\left[\frac{T}{\tau}\right]}^{\infty} [1 - F_{\varepsilon'_k}(r\tau + 0)] \leqslant \\ \leqslant (K_1\tau + K_2) \int\limits_{T-2\tau}^{\infty} [1 - F_{\varepsilon'_k}(x + 0)]\, dx.\end{aligned} \tag{29}$$

Из (29) в силу условия D_1 следует, что

$$\lim_{T\to\infty} \lim_{k\to\infty} \int\limits_T^{t'_k+0} [1 - F_{\varepsilon'_k}(v + 0)] U_{\varepsilon'_k}(t'_k - dv) = 0. \tag{30}$$

Проверим теперь, что для функций $[1 - F_{\varepsilon'_k}(v)]$ на $[0, T)$ и мер $U_{\varepsilon'_k}(t'_k - dv)$ на $B_{0,T}$ — борелевской σ-алгебре подмножеств $[0, T)$ выполняются условия леммы 2. Действительно, в силу (18) меры $U_{\varepsilon'_k}(t'_k - dv) \Rightarrow \alpha m(dv)$ при $k \to \infty$. Далее, функции $[1 - F_{\varepsilon'_k}(v)]$ равномерно по k и v ограничены. Наконец, по условию C_1 функции $1 - F_{\varepsilon'_k}(v + 0)$ сходятся к $1 - F_{\varepsilon_0}(v + 0)$ при $k \to \infty$ в каждой точке непрерывности v функции $1 - F_{\varepsilon_0}(v + 0)$, причем в силу монотонности функций $1 - F_{\varepsilon'_k}(v + 0)$ эта сходимость, как нетрудно понять, равномерна в каждой точке непрерывности $1 - F_{\varepsilon_0}(v + 0)$. Поскольку множество R_0 точек разрыва функции $1 - F_{\varepsilon_0}(\cdot)$ не более чем счетно, то оно имеет меру $\alpha m(R_0) = 0$.

Применяя к функциям $1 - F_{\varepsilon'_k}(v + 0)$ и мерам $U_{\varepsilon'_k}(t'_k - dv)$ лемму 2, получаем соотношение

$$\int_0^T [1 - F_{\varepsilon'_k}(v+0)]\, U_{\varepsilon'_k}(t'_k - dv) \to \int_0^T [1 - F_{\varepsilon_0}(v+0)]\, \alpha m(dv)$$

$$\text{при } k \to \infty, \tag{31}$$

которое справедливо для любого $T > 0$.

Из (28), (30) и (31) очевидным образом следует, что

$$1 = \lim_{T\to\infty} \lim_{k\to\infty} \int_0^T [1 - F_{\varepsilon'_k}(v+0)]\, U_{\varepsilon'_k}(t'_k - dv) = \alpha\mu_{\varepsilon_0}.$$

Теорема доказана.

Для случая, когда предельное распределение $F_{\varepsilon_0}(\cdot)$ имеет бесконечное среднее, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Если для последовательности ф. р. $F_{\varepsilon_k}(\cdot)$ выполняются условия **C** и $\mathbf{D}_2$, то для произвольной последовательности $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$ и $h > 0$

$$U_{\varepsilon_k}(t_k + h) - U_{\varepsilon_k}(t_k) \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Доказательство. Совершенно аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1, можно показать, что для любой последовательности $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$, можно извлечь подпоследовательность $t'_k \to \infty$ при $k \to \infty$ из последовательности t_k и подпоследовательность ε'_k из последовательности ε_k так, чтобы меры $U_{\varepsilon'_k}(t'_k + dv) \Rightarrow \alpha m(dv)$ при $x \to \infty$, где $\alpha = \mathrm{const} \geqslant 0$ и $m(dv)$ — мера Лебега на $B_{(1)}$. После этого остается только убедиться, что условия $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{D}_2$ влекут за собой равенство $\alpha = 0$. Используя вновь тождество (27), получаем для $t'_k > T$

$$1 = \int_0^T [1 - F_{\varepsilon'_k}(v+0)]\, U_{\varepsilon'_k}(t'_k - dv) \geqslant \int_0^{t'_k} [1 - F_{\varepsilon'_k}(v+0)]\, U_{\varepsilon'_k}(t'_k - dv). \tag{32}$$

Вновь применяя к функциям $[1 - F_{\varepsilon'_k}(v+0)]$ и мерам $U_{\varepsilon'_k}(t'_k - - dv)$ лемму 2 и используя (32), находим

$$1 \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \int_0^T [1 - F_{\varepsilon'_k}(v+0)]\, U_{\varepsilon'_k}(t'_k - dv) =$$

$$= \int_0^T [1 - F_{\varepsilon_0}(v+0)]\, \alpha m(dv). \tag{33}$$

Поскольку в силу условия $\mathbf{D}_2 \int\limits_0^T [1 - F_{\varepsilon_0}(v+0)]\, m(dv) \to \infty$ при $T \to \infty$, то из (33) имеем

$$\alpha \leqslant \left[\int\limits_0^T [1 - F_{\varepsilon_0}(v+0)]\, m(dv)\right]^{-1} \to 0 \text{ при } T \to \infty$$

и, следовательно, $\alpha = 0$.

4. Теорема восстановления. Пусть

$$Z_{\varepsilon_k}(t) = \int\limits_0^{t+0} q_{\varepsilon_k}(t-s)\, U_{\varepsilon_k}(ds), \quad t \geqslant 0 \tag{34}$$

решение уравнения восстановления

$$Z_{\varepsilon_k}(t) = q_{\varepsilon_k}(t) + \int\limits_0^{t+0} z_{\varepsilon_k}(t-s)\, F_{\varepsilon_k}(ds), \quad t \geqslant 0. \tag{35}$$

Здесь $q_{\varepsilon_k}(\cdot)$, $k = 0, 1, \ldots$ — последовательность функций из L, для которой мы будем предполагать выполненным следующее условие

$\mathbf{E}_1$: 1) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} |q_{\varepsilon_k}(t)| \leqslant L_T < \infty$ для каждого $T \geqslant 0$,

2) $\lim\limits_{T\to\infty} \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} h_0 \sum\limits_{r \geqslant \left[\frac{T}{h_0}\right]} \sup\limits_{rh_0 \leqslant t \leqslant (r+1)h_0} |q_{\varepsilon_k}(t)| = 0$ для некоторого $h_0 > 0$,

3) $q_{\varepsilon_k}(\cdot)$ сходятся к $q_{\varepsilon_0}(\cdot)$ при $k \to \infty$ равномерно в каждой точке $t \in T_{q_0}$, где T_{q_0} — некоторое множество точек непрерывности функции $q_{\varepsilon_0}(\cdot)$, причем $m(\overline{T}_{q_0}) = 0$.

Замечание 2. Если функции $q_{\varepsilon_k}(t) \equiv q_{\varepsilon_0}(t)$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, то условие $\mathbf{E}_1$, 1) автоматически выполняется, поскольку функция $q_{\varepsilon_0}(\cdot) \in \mathbf{L}$; условие $\mathbf{E}_1$, 3) означает, что функция $q_{\varepsilon_0}(\cdot)$ непрерывна почти всюду по мере Лебега на $[0, \infty)$, а все вместе условия $\mathbf{E}_1$, 1) — 3) означают, что функция $q_{\varepsilon_0}(\cdot)$ непосредственно интегрируема по Риману на $[0, \infty)$ [1].

Замечание 3. При выполнении условия $\mathbf{E}_1$, 2) функции $q_{\varepsilon_k}(\cdot)$, принадлежащие классу L, интегрируемы по Лебегу на $[0, \infty)$ по крайней мере для всех достаточно больших k.

Поскольку предельная функция $q_{\varepsilon_0}(\cdot)$ принадлежит классу L и почти всюду непрерывна по мере Лебега на $[0, \infty)$, то она интегрируема по Риману на каждом конечном промежутке.

Так как $\| q_{\varepsilon_k}(t+h) | - | q_{\varepsilon_0}(t) \| \leqslant | q_{\varepsilon_k}(t+h) - q_{\varepsilon_0}(t) |$, то при выполнении условия $\mathbf{E}_1$, 3) функции $|q_{\varepsilon_k}(\cdot)|$ сходятся к $|q_{\varepsilon_0}(\cdot)|$ при $k \to \infty$ равномерно в каждой точке $t \in T_{q_0}$.

С учетом леммы 2 имеем для любого интервала $[T, T')$

$$\lim_{k\to\infty} \int_T^{T'} |q_{\varepsilon_k}(s)|\, m(ds) = \int_T^{T'} |q_{\varepsilon_0}(s)\, ds \tag{36}$$

(слева интеграл Лебега заменен интегралом Римана).

Используя (36) и условие $\mathbf{E}_1$, 2), находим

$$\sup_{T'>T} \int_T^{T'} |q_0(s)|\, ds = \sup_{T'>T} \overline{\lim_{k\to\infty}} \int_T^{T'} |q_{\varepsilon_k}(s)|\, m(ds) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\, h_0 \sum_{r\geqslant\left[\frac{T}{h_0}\right]} \sup_{rh_0\leqslant t\leqslant(r+1)h_0} |q_{\varepsilon_k}(t)| \to 0 \text{ при } T\to\infty. \tag{37}$$

Из (37) следует, что функция $|q_{\varepsilon_0}(s)|$ абсолютно интегрируема по Риману на $[0, \infty)$.

Поскольку соотношение (36) по тем же самым соображениям выполняется и в том случае, когда знак модуля при функциях $q_{\varepsilon_k}(\cdot)$ и $q_{\varepsilon_0}(\cdot)$ опущен, то из (36) и (37) очевидным образом следует, что при выполнении условия $\mathbf{E}_1$

$$\int_0^\infty q_{\varepsilon_k}(s)\, m(ds) \to \int_0^\infty q_0(s)\, ds \text{ при } k\to\infty. \tag{38}$$

Следующая теорема обобщает теорему восстановления для случая конечных средних на схему серий.

Теорема 4. Если для последовательности ф. р. $F_{\varepsilon_k}(\cdot)$ выполняются условия $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{D}_1$, а для последовательности функций $q_{\varepsilon_k}(\cdot)$ из L — условие $\mathbf{E}_1$, то для произвольной последовательности $t_k\to\infty$ при $k\to\infty$ решение уравнения восстановления (35)

$$Z_{\varepsilon_k}(t_k) = \int_0^{t_k+0} q_{\varepsilon_k}(t_k - s)\, U_{\varepsilon_k}(ds) \to \frac{1}{\mu_{\varepsilon_0}} \int_0^\infty q_{\varepsilon_0}(s)\, ds \text{ при } k\to\infty,$$

где $\mu_{\varepsilon_0} = \int_0^\infty [1 - F_{\varepsilon_0}(x+0)]\, dx < \infty$.

Доказательство. Имеем для $t_k > T$

$$\int_0^{t_k+0} q_{\varepsilon_k}(t - s)\, U_{\varepsilon_k}(ds) = \int_0^T q_{\varepsilon_k}(v)\, U_{\varepsilon_k}(t_k - dv) + \int_T^{t_k+0} q_{\varepsilon_k}(v) U_{\varepsilon_k}(t_k - dv). \tag{39}$$

В силу леммы 1 (см. также (17)) для любого интервала $I = [a, b]$ длины h_0

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sup_{t\geqslant 0} U_{\varepsilon_k}(t+I) \leqslant R_{h_0} < \infty.$$

Поэтому, используя условие $\mathbf{E}_1$, 2), находим

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \int\limits_T^{t_k+0} |q_{\varepsilon_k}(v)|\, U_{\varepsilon_k}(t_k - dv) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \sum_{r\geqslant\left[\frac{T}{h_0}\right]} \sup_{rh_0\leqslant t\leqslant(r+1)h_0} |q_{\varepsilon_k}(t)|\,[U_{\varepsilon_k}(t_k - rh_0 + 0) -$$

$$- U_{\varepsilon_k}(t_k - (r+1)h_0)] \leqslant \qquad (40)$$

$$\leqslant R_{h_0} \overline{\lim_{k\to\infty}}\, h_0 \sum_{r\geqslant\left[\frac{T}{h_0}\right]} \sup_{rh_0\leqslant t\leqslant(r+1)h_0} |q_{\varepsilon_k}(t)| \to 0 \text{ при } T\to\infty,$$

где $U_\varepsilon(t - v) = 0$ при $v > t$.

В силу теоремы 2 меры $U_{\varepsilon_k}(t_k - dv)$ на $]0, T)$ сходятся слабо к мере $\frac{1}{\mu_0} m(dv)$ при $k \to \infty$ и, следовательно, для функций $q_{\varepsilon_k}(v)$, $v \in [0, T)$ и мер $U_{\varepsilon_k}(dv)$ в силу условий $\mathbf{E}_1$, 1) и $\mathbf{E}_1$, 3) выполняются условия леммы 2 на любом интервале $[0, T)$. Используя это обстоятельство и учитывая (39), получаем

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_0^{t_k+0} q_{\varepsilon_k}(t_k - s)\, U_{\varepsilon_k}(ds) = \lim_{T\to\infty} \lim_{k\to\infty} \int\limits_0^T q_{\varepsilon_k}(v)\, U_{\varepsilon_k}(t_k - dv) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T q_{\varepsilon_0}(v) \frac{1}{\mu_{\varepsilon_0}} m(dv) = \frac{1}{\mu_{\varepsilon_0}} \int\limits_0^\infty q_{\varepsilon_0}(v)\, dv.$$

Теорема доказана.

Для случая, когда предельное распределение $F_{\varepsilon_0}(\cdot)$ имеет бесконечное среднее, аналогичное утверждение примет следующий вид.

Теорема 5. Если для последовательности ф. р. $F_{\varepsilon_k}(\cdot)$ выполняются условия $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{D}_2$, а для последовательности функций $q_{\varepsilon_k}(\cdot)$ условия $\mathbf{E}_1$, 1) и $\mathbf{E}_1$, 2), то для произвольной последовательности $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$ решение уравнения восстановления (35) $Z_{\varepsilon_k}(t_k) \to 0$ при $k \to \infty$.

Доказательство. Воспользуемся вновь соотношением (39). Как и при доказательстве теоремы 4, проверяется справедливость соотношения (40). Что же касается первого слагаемого в (39), то, используя условие $\mathbf{E}_1$, 1) и теорему 3, имеем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\int_0^T |q_{\varepsilon_k}(v)| U_{\varepsilon_k}(t_k - dv) \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} L_T\,[U_{\varepsilon_k}(t_k+0) - U_{\varepsilon_k}(t_k - T)] = 0.$$

5. Сходимость распределений перескока. Моменты приращений процесса $\nu_\varepsilon(t)$. Как известно, для перескока $\gamma_\varepsilon(t)$ вероятности $\mathbf{P}\{\gamma_\varepsilon(t) > u\}$ как функции t удовлетворяют уравнению восстановления

$$\mathbf{P}\{\gamma_\varepsilon(t) > u\} = 1 - F_\varepsilon(t+u+0) + \int_0^{t+0} \mathbf{P}\{\gamma_\varepsilon(t-s) > u\}\,F_\varepsilon(ds),\quad t \geqslant 0. \tag{41}$$

Если для последовательности ф. р. $F_{\varepsilon_k}(\cdot)$ выполняется условие сходимости $\mathbf{C}_1$ и условие $\mathbf{D}_1$, то для функций $q_{\varepsilon_k}(t) = 1 - F_{\varepsilon_k}(t + u + 0)$, $t \geqslant 0$ выполняется условие $\mathbf{E}_1$, причем множество T_{q_0}, фигурирующее в условии $\mathbf{E}_1$, 3), содержит все точки непрерывности функции $1 - F_{\varepsilon_0}(t+u+0)$ ($\overline{T}_{q_0}$ — не более чем счетное множество и, следовательно, $m(\overline{T}_{q_0}) = 0$). Применяя теперь теорему 4 к уравнению (41), получаем следующее утверждение.

Теорема 6. Если для последовательности ф. р. $F_{\varepsilon_k}(\cdot)$ выполняются условия $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{D}_1$, то для произвольной последовательности $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\gamma_{\varepsilon_k}(t_k) > u\} \to \frac{1}{\mu_{\varepsilon_0}}\int_0^\infty [1 - F_{\varepsilon_0}(t+u+0)]\,dt =$$

$$= \frac{1}{\mu_{\varepsilon_0}}\int_u^\infty [1 - F_{\varepsilon_0}(t+0)]\,dt = 1 - G_0(u) \text{ при } k\to\infty,\ u \geqslant 0.$$

Через $W_\varepsilon(r)$ обозначим множество точек разрыва ф. р. $F_\varepsilon^{(*r)}(t)$. Пусть также $W_\varepsilon = \bigcup_{r=0}^{\infty} W_\varepsilon^{(r)}$. Множество W_ε не более чем счетно.

В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3. При выполнении условия $\mathbf{C}$ на некотором множестве $T_{\varepsilon_0} \supseteq \overline{W}_{\varepsilon_0}$

$$\nu_{\varepsilon_k}(t),\ t\in T_{\varepsilon_0} \Rightarrow \nu_{\varepsilon_0}(t),\ t \in T_{\varepsilon_0} \text{ при } k\to\infty^{*)}. \tag{42}$$

---

*) Символ $\xi_\varepsilon(t)$, $t\in T \Rightarrow \xi_0(t)$, $t \in T$ означает слабую сходимость конечномерных распределений случайных процессов $\xi_\varepsilon(t)$, $t\in T$.

Доказательство. Из **C** в силу независимости с. в. $\tau_{\varepsilon l}$ следует очевидно, что

$$S_{\varepsilon_k}(r) = \sum_{l=1}^{r} \tau_{\varepsilon_k l-1}, \ r \geqslant 0 \Rightarrow S_{\varepsilon_0}(r), \ r \geqslant 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{43}$$

Поскольку по определению с. в. $\nu_\varepsilon(t)$

$$\mathbf{P}\{\nu_\varepsilon(t_n) \geqslant r_n, \ n = \overline{1, m}\} = \mathbf{P}\left\{\sum_{l=1}^{r_n} \tau_{\varepsilon l-1} \leqslant t_n, \ n = \overline{1, m}\right\},$$

то из (43) следует, что соотношение (42) выполняется по крайней мере на множестве $\overline{W}_{\varepsilon_0}$ точек t, являющихся точками непрерывности ф. р. с. в. $S_{\varepsilon_0}(r)$ для всех $r \geqslant 0$.

Следствие 2. В силу леммы 1 из соотношения (42) следует, что для любой последовательности моментов времени $t_1 < \ldots < t_n$ и целых неотрицательных чисел $r_1, \ldots r_n$, $n \geqslant 1$

$$\mathbf{M} \prod_{l=1}^{n} \nu_{\varepsilon_k}^{r_l}(t_l) \to \mathbf{M} \prod_{l=1}^{n} \nu_{\varepsilon_0}^{r_l}(t_l) \text{ при } k \to \infty.$$

Выпишем еще раз соотношение, полученное из (4) суммированием по $r \geqslant n$

$$\mathbf{P}\{\nu_\varepsilon(t+h) - \nu_\varepsilon(t) \geqslant n\} =$$

$$= \int_0^{h+0} \mathbf{P}\{\nu_\varepsilon(h-s) + 1 \geqslant n\} \mathbf{P}\{\gamma_\varepsilon(t) \in ds\} + \delta(0, n) \mathbf{P}\{\gamma_\varepsilon(t) > h\},$$

$$n = 0, 1, \ldots.$$

В силу леммы 3 функции $q_{\varepsilon_k}(s) = \mathbf{P}\{\nu_{\varepsilon_k}(h-s) + 1 \geqslant n\}$ сходятся к $q_{\varepsilon_0}(s)$ в каждой точке s, исключая не более чем счетное множество точек R_1. Поскольку функции $q_{\varepsilon_k}(s)$ монотонно не возрастают по s, то эта сходимость равномерна в каждой точке s из множества R точек непрерывности функции $q_{\varepsilon_0}(s)$. Заметим, что множество $\overline{R}$ также содержит не более чем счетное число точек.

Через $G_0(A)$ будем обозначать меру на $B_{(1)}^{+}$, порожденную ф. р. $G_0(t)$. Поскольку ф. р. $G_0(t)$ имеет плотность, то $G_0(R_1 \cup \overline{R}) = 0$.

Применяя теперь к мерам $G_k(A)$ на $B_{(1)}^{+}$, порожденным ф. р. с. в. $\gamma_{\varepsilon_k}(t_k)$, и функциям $q_{\varepsilon_k}(\cdot)$ лемму 2, что возможно в силу сделанных выше замечаний и теоремы 6, получаем следующее утверждение.

Теорема 7. Если для последовательности ф. р. $F_{\varepsilon_k}(\cdot)$ выполняются условия $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{D}_1$, то для произвольной последовательности $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\nu_{\varepsilon_k}(t_k + h) - \nu_{\varepsilon_k}(t_k) \geqslant n\} \to$$

$$\to \int_0^{h+0} \mathbf{P}\{\nu_{\varepsilon_0}(h - s) + 1 \geqslant n\} G_0(ds) + \delta(0, n)[1 - G_0(h + 0)] =$$

$$= 1 - H_h(n) \text{ при } k \to \infty,\ n \geqslant 0.$$

Замечание 4. Пусть $\tilde{\tau}_{\varepsilon_0 l}$, $l = 0, 1, \ldots$ — последовательность неотрицательных, независимых в совокупности с. в. таких, что с. в. $\tilde{\tau}_{\varepsilon_0 0}$ имеет ф. р. $G_0(t)$, а с. в. $\tilde{\tau}_{\varepsilon l}$, $l \geqslant 1$ одинаково распределены и имеют ф. р. $F_{\varepsilon_0}(\cdot)$. Через $\tilde{\nu}_{\varepsilon_0}(t) = \max\left(n : \sum_{l=1}^{n} \tilde{\tau}_{\varepsilon l-1} \leqslant t\right)$ обозначим число восстановления за время t в процессе восстановления, построенном по величинам $\tau_{\varepsilon l}$. Тогда, как нетрудно показать, предельная фр. $H_h(t)$, определенная в теореме 7, есть ф. р. с. в. $\tilde{\nu}_{\varepsilon_0}(h)$.

В принципе, можно было бы показать, что в условиях теоремы 7 имеет место более общее соотношение

$$\nu_{\varepsilon_k}(t_k + h) - \nu_{\varepsilon_k}(t_k),\ h \geqslant 0 \Rightarrow \tilde{\nu}_{\varepsilon_0}(h),\ h \geqslant 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Процесс восстановления, построенный по с. в. $\tilde{\tau}_{\varepsilon l}$, иногда называют стационарным процессом восстановления. Он обладает тем свойством, что $\mathbf{M}\tilde{\nu}_{\varepsilon_0}(h) \equiv \frac{1}{\mu_{\varepsilon_0}} h$, $h \geqslant 0$.

Вернемся теперь к соотношению (5). В силу следствия 2 функции $q_{\varepsilon_k}(s) = \mathbf{M}[\nu_{\varepsilon_k}(h - s) + 1]^r$ сходятся при выполнении условия $\mathbf{C}_1$ к $q_{\varepsilon_0}(s)$ в каждой точке непрерывности $q_{\varepsilon_0}(s)$. Поскольку функции $q_{\varepsilon_k}(s)$ монотонно не возрастают, то эта сходимость равномерна в каждой точке непрерывности $q_{\varepsilon_0}(s)$, а множество точек разрыва функции $q_{\varepsilon_0}(s)\, R$ не более чем счетно и имеет меру $G_0(R) = 0$. Применяя к функциям $q_{\varepsilon_k}(s)$ и мерам $G_k(\cdot)$ лемму 2, получаем следующее утверждение.

Теорема 8. Если для последовательности ф. р. $F_{\varepsilon_k}(\cdot)$ выполняются условия $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{D}_1$, то для произвольной последовательности $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$

$$\mathbf{M}[\nu_{\varepsilon_k}(t_k + h) - \nu_{\varepsilon_k}(t_k)]^r \to \int_0^{h+0} \mathbf{M}[\nu_{\varepsilon_0}(h) + 1]^r G_0(ds)$$

$$\text{при } k \to \infty,\ r \geqslant 1. \tag{44}$$

Замечание 5. Поскольку моменты $\mathbf{M}[\nu_{\varepsilon_k}(t_k+h)-\nu_{\varepsilon_k}(t_k)]^r$ равномерно по k ограничены в силу леммы 1, то утверждение теоремы 8 могло бы быть получено непосредственно как следствие теоремы 7.

Замечание 6. Предельное выражение, стоящее справа в (4), совпадает с $M\tilde{\nu}^r_{\varepsilon_0}(h)$, где с. в. $\tilde{\nu}_{\varepsilon_0}(h)$ были определены в замечании 4.

Теорема 8 в некотором смысле является обобщением теоремы 2. Для моментов первого порядка утверждения этих теорем совпадают.

Случай бесконечных средних тривиален. Действительно, в силу теоремы 4 при выполнении условия $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{D}_2$ для произвольной последовательности $t_k\to\infty$ при $k\to\infty$ с. в. $\nu_{\varepsilon_k}(t_k+h)-\nu_{\varepsilon_k}(t_k)\xrightarrow{P}0$ при $k\to\infty$. Поскольку согласно лемме 1 моменты $\mathbf{M}[\nu_{\varepsilon_k}(t_k+h)-\nu_{\varepsilon_k}(t_k)]^r$ равномерно по k ограничены для каждого $r\geqslant 1$, то в силу соответствующего варианта теоремы Лебега $\mathbf{M}[\nu_{\varepsilon_k}(t_k+h)-\nu_{\varepsilon_k}(t_k)]\xrightarrow{r}0$ при $k\to\infty$ для каждого $r\geqslant 1$.

Список литературы: 1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М., «Мир», 1967. 2. *Скороход А. В.* Предельные теоремы для случайных процессов. —«Теория вероятностей и ее применения», 1956, в. 3, с. 289—319.

D. S. Silvestrov

THE RENEWAL THEOREM IN THE SCHEME OF SERIES

The elementary renewal theorem, Blackwell's theorem, main renewal theorem and some results connected with them are generalized on the scheme of series.

Поступила в редколлегию 18.03 1976.

УДК 519.21

В. Н. ТУРЧИН, ассист.,
Днепропетровский институт инженеров железнодорожного транспорта

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим систему линейных стохастических дифференциальных уравнений второго порядка

$$d\xi(t)=A\xi(t)\,dt+B\xi(t)\,dw(t), \tag{1}$$

$A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ $(i,j=1,2)$, a_{ij}, b_{ij} — действительные числа, $w(t)$ — одномерный винеровский процесс. Решение системы (1) при заданном начальном условии $\xi(0)$ существует и единственно (см. [2], ч. II, § 3). В системе (1) сделаем замену переменных

$$\xi_1(t)=r(t)\cos\varphi(t),\quad \xi_2(t)=r(t)\sin\varphi(t).$$