Замечание 5. Поскольку моменты $\mathbf{M}[\nu_{\varepsilon_k}(t_k+h)-\nu_{\varepsilon_k}(t_k)]^r$ равномерно по k ограничены в силу леммы 1, то утверждение теоремы 8 могло бы быть получено непосредственно как следствие теоремы 7.

Замечание 6. Предельное выражение, стоящее справа в (4), совпадает с $M\tilde{\nu}^r_{\varepsilon_0}(h)$, где с. в. $\tilde{\nu}_{\varepsilon_0}(h)$ были определены в замечании 4.

Теорема 8 в некотором смысле является обобщением теоремы 2. Для моментов первого порядка утверждения этих теорем совпадают.

Случай бесконечных средних тривиален. Действительно, в силу теоремы 4 при выполнении условия $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{D}_2$ для произвольной последовательности $t_k\to\infty$ при $k\to\infty$ с. в. $\nu_{\varepsilon_k}(t_k+h)-\nu_{\varepsilon_k}(t_k)\xrightarrow{P}0$ при $k\to\infty$. Поскольку согласно лемме 1 моменты $\mathbf{M}[\nu_{\varepsilon_k}(t_k+h)-\nu_{\varepsilon_k}(t_k)]^r$ равномерно по k ограничены для каждого $r\geqslant 1$, то в силу соответствующего варианта теоремы Лебега $\mathbf{M}[\nu_{\varepsilon_k}(t_k+h)-\nu_{\varepsilon_k}(t_k)]\xrightarrow{r}0$ при $k\to\infty$ для каждого $r\geqslant 1$.

Список литературы: 1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М., «Мир», 1967. 2. *Скороход А. В.* Предельные теоремы для случайных процессов. —«Теория вероятностей и ее применения», 1956, в. 3, с. 289—319.

D. S. Silvestrov

THE RENEWAL THEOREM IN THE SCHEME OF SERIES

The elementary renewal theorem, Blackwell's theorem, main renewal theorem and some results connected with them are generalized on the scheme of series.

Поступила в редколлегию 18.03 1976.

УДК 519.21

В. Н. ТУРЧИН, ассист.,
Днепропетровский институт инженеров железнодорожного транспорта

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим систему линейных стохастических дифференциальных уравнений второго порядка

$$d\xi(t)=A\xi(t)\,dt+B\xi(t)\,dw(t), \tag{1}$$

$A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ $(i,j=1,2)$, a_{ij}, b_{ij} — действительные числа, $w(t)$ — одномерный винеровский процесс. Решение системы (1) при заданном начальном условии $\xi(0)$ существует и единственно (см. [2], ч. II, § 3). В системе (1) сделаем замену переменных

$$\xi_1(t)=r(t)\cos\varphi(t),\quad \xi_2(t)=r(t)\sin\varphi(t).$$

Тогда система (1) эквивалентна системе

$$r(t) = r(0) \exp\left\{\int_0^t R(\varphi(s))\, ds + \int_0^t G(\varphi(s))\, dw(s)\right\}, \tag{2}$$

$$d\varphi(t) = H(\varphi(t))\, dt + Q(\varphi(t))\, dw(t), \tag{3}$$

где

$$R(\varphi) = G_1(\varphi) + \frac{1}{2} Q^2(\varphi) - \frac{1}{2} G^2(\varphi),$$

$$H(\varphi) = Q_1(\varphi) - Q(\varphi) G(\varphi),$$

$$Q(\varphi) = (b_{22} - b_{11}) \sin 2\varphi + (b_{12} + b_{21}) \cos 2\varphi + (b_{21} - b_{12}),$$

$$Q_1(\varphi) = (a_{22} - a_{11}) \sin 2\varphi + (a_{12} + a_{21}) \cos 2\varphi + (a_{21} - a_{12}),$$

$$G(\varphi) = (b_{11} \cos\varphi + b_{12} \sin\varphi) \cos\varphi + (b_{21} \cos\varphi + b_{22} \sin\varphi) \sin\varphi,$$

$$G_1(\varphi) = (a_{11} \cos\varphi + a_{12} \sin\varphi) \cos\varphi + (a_{21} \cos\varphi + a_{22} \sin\varphi) \sin\varphi.$$

В статье исследуется асимптотика решений системы (1) при $t \to \infty$ для случая, когда $Q(\varphi)$ обращается в нуль в некоторых точках.

Системы линейных стохастических дифференциальных уравнений изучались Р. З. Хасьминским в работах [4, 5].

В дальнейшем нам потребуются приведенные ниже свойства решений уравнения

$$d\xi(t) = a(\xi(t))\, dt + \sigma(\xi(t))\, dw(t), \tag{4}$$

функции $a(x)$, $\sigma(x)$ удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности (см. [2], ч. 1, § 6).

Пусть $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta) = 0$ и $\sigma(x) \neq 0$ при $x \in (\alpha, \beta)$. На промежутке (α, β) определим функцию

$$W(y) = \int_c^y \exp\left\{-\int_c^u \frac{2a(z)}{\sigma^2(z)}\, dz\right\} du, \quad c \in (\alpha, \beta).$$

Через $\xi(t)$ обозначим решение уравнения (4) с начальным условием $\xi(0)$, $P\{\alpha < \xi(0) < \beta\} = 1$.

Теорема 1. Если $W(y) \to +\infty$ при $y \to \beta$, $W(y) \to -\infty$ при $y \to \alpha$, то

$$P\{\alpha < \xi(t) < \beta\} = P\{\sup_{t>0} \xi(t) = \beta\} = P\{\inf_{t>0} \xi(t) = \alpha\} = 1.$$

Теорема 2. Пусть функция $W(y)$ такая, что $W(y) \to -\infty$ при $y \to \alpha$, $W(y) \leqslant C < +\infty$ при $y \in (\alpha, \beta)$, если $a(\beta) = 0$, то

$$P\{\inf_{t>0} \xi(t) > \alpha\} = P\{\sup_{t>0} \xi(t) = \beta\} = P\{\lim_{t\to\infty} \xi(t) = \beta\} = 1;$$

если $a(\beta) \neq 0$, то

$$P\{\inf_{t>0} \xi(t) > \alpha\} = P\{\sup_{t>0} \xi(t) > \beta\} = 1,$$

причем τ_β (τ_β — время первого достижения процессом $\xi(t)$ точки β) почти всюду конечно.

Теоремы 1 и 2 доказываются аналогично утверждениям § 16 [2].

Значение φ_0 будем называть: а) h^+— направлением, б) h^-— направлением, в) особым направлением системы (1), если выполняются соответственно условия: а) $Q(\varphi_0) = 0$, $H(\varphi_0) > 0$, б) $Q(\varphi_0) = 0$, $H(\varphi_0) < 0$, в) $Q(\varphi_0) = 0$. Очевидно, на промежутке $[0, \pi)$ имеется не более двух особых направлений системы (1). В дальнейшем особые направления будем обозначать через φ_j ($j = 1, 2, \ldots$), $0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \ldots$. В настоящей работе рассматриваются системы, у которых особые направления являются h^+-или h^--направлениями.

Лемма 1. Если особые направления системы (1) — h^+-направления, то уравнение

$$\frac{1}{2} F''(\varphi) Q^2(\varphi) + F'(\varphi) H(\varphi) = g(\varphi) \tag{5}$$

($g(\varphi)$ — непрерывная π-периодическая функция) имеет решение с ограниченной первой производной.

Доказательство. Укажем первую производную такого решения. Если на промежутке $(\varphi_1, \varphi_1 + \pi)$ нет особых направлений, то

$$F'(\varphi) = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{2g(\theta)}{Q^2(\theta)} \exp\left\{-\int_{\theta}^{\varphi} \frac{2H(z)}{Q^2(z)} dz\right\} d\theta, \quad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_1 + \pi).$$

Если $\varphi_2 < \varphi_1 + \pi$, то

$$F'(\varphi) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{2g(\theta)}{Q^2(\theta)} \exp\left\{-\int_{\theta}^{\varphi} \frac{2H(z)}{Q^2(z)} dz\right\} d\theta, & \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2), \\ \displaystyle\int_{\varphi_2}^{\varphi} \frac{2g(\theta)}{Q^2(\theta)} \exp\left\{-\int_{\theta}^{\varphi} \frac{2H(z)}{Q^2(z)} dz\right\} d\theta, & \varphi \in [\varphi_2, \varphi_1 + \pi). \end{cases}$$

В дальнейшем решение уравнения (5) с ограниченной первой производной будем обозначать $F(\varphi)$.

Лемма 2. Пусть $\varphi(s)$ — решение уравнения (3), особые направления системы (1) все h^+-направления, тогда для любых $0 < t_1 < t_2 < \infty$ справедливо равенство

$$F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} g(\varphi(s))\, ds + \int_{t_1}^{t_2} F'(\varphi(s))\, Q(\varphi(s))\, dw(s). \tag{6}$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать лемму, предполагая, что $\varphi(t_1) \in (\varphi_1, \varphi_2)$, $\varphi(t_2) \in (\varphi_2, \varphi_3)$. $\varphi(t)$ достигает точки φ_2 за конечное время τ_{φ_2}, что следует из теоремы 2. Если $t < \tau_{\varphi_2}$, то

$$F(\varphi(t)) - F(\varphi(t_1)) = \int_{t_1}^{t} g(\varphi(s))\,ds + \int_{t_1}^{t} F'(\varphi(s))\,Q(\varphi(s))\,dw(s). \tag{7}$$

Функции $g(\varphi)$, $F'(\varphi)\,Q(\varphi)$ ограничены, поэтому в силу непрерывности по t $\int_{t_1}^{t} g(\varphi(s))\,ds$, $\int_{t_1}^{t} F'(\varphi(s))\,Q(\varphi(s))\,dw(s)$ и непрерывности $F(\varphi)$ из равенства (7) получаем

$$F(\varphi(\tau_{\varphi_2})) - F(\varphi(t_1)) = \int_{t_1}^{\tau_{\varphi_2}} g(\varphi(s))\,ds + \int_{t_1}^{\tau_{\varphi_2}} F'(\varphi(s))\,Q(\varphi(s))\,dw(s). \tag{8}$$

Пусть $\tau_{\varphi_2} < t < t_2$. Согласно теореме 2 [2, ч. 1, § 19],

$$\varphi(\tau_{\varphi_2} + s) > \varphi_2 \tag{9}$$

при $s > 0$. Из (9) и $\varphi(t_2) \in (\varphi_2, \varphi_3)$ следует, что $\varphi(t) \in (\varphi_2, \varphi_3)$, поэтому

$$F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t)) = \int_{t}^{t_2} g(\varphi(s))\,ds + \int_{t}^{t_2} F'(\varphi(s))\,Q(\varphi(s))\,dw(s).$$

Отсюда, учитывая (9), непрерывность по t $\int_{t}^{t_2} g(\varphi(s))\,ds$, $\int_{t}^{t_2} F'(\varphi(s)) \times$ $\times\, Q(\varphi(s))\,dw(s)$ и непрерывность $F(\varphi)$, получаем

$$F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(\tau_{\varphi_2})) = \int_{\tau_{\varphi_2}}^{t_2} g(\varphi(s))\,ds + \int_{\tau_{\varphi_2}}^{t_2} F'(\varphi(s))\,Q(\varphi(s))\,dw(s). \tag{10}$$

Из (8) и (10) следует утверждение леммы.

Леммы 1 и 2 остаются справедливыми, если особые направления являются h^--направлениями.

Обозначим $\Phi(x, y) = \int_{x}^{y} \exp\left\{-\int_{x}^{\varphi} \frac{2H(z)}{Q^2(z)}\,dz\right\} d\varphi$ и определим на промежутке $[\varphi_1, \varphi_1 + \pi)$ следующие функции:

$$\rho_1^+(\theta) = \frac{1}{Q^2(\theta)} \left[\chi_{[\varphi_1,\varphi_2)}(\theta)\,\Phi(\theta, \varphi_2) + \chi_{[\varphi_2,\varphi_1+\pi)}(\theta)\,\Phi(\theta, \varphi_1 + \pi)\right],$$

если φ_1, φ_2 $(\varphi_2 < \varphi_1 + \pi)$ — h^+-направления;

$$\rho_1^-(\theta) = -\frac{1}{Q^2(\theta)} \left[\chi_{[\varphi_1,\varphi_2)}(\theta)\,\Phi(\theta, \varphi_1) + \chi_{[\varphi_2,\varphi_1+\pi)}(\theta)\,\Phi(\theta, \varphi_2)\right],$$

если $\varphi_1, \varphi_2 (\varphi_2 < \varphi_1 + \pi)$ — h^--направления;

$$\rho_2^+(\theta) = \frac{1}{Q^2(\theta)} \Phi(\theta, \varphi_1 + \pi),$$

если φ_1 — h^+-направление и $Q(\varphi) \neq 0$ при $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_1 + \pi)$;

$$\rho_2^-(\theta) = -\frac{1}{Q^2(\theta)} \Phi(\theta, \varphi_1),$$

если φ_1 — h^--направление и $Q(\varphi) \neq 0$ при $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_1 + \pi)$;

$$\rho_1(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{Q^2(\theta)} \exp\left\{\displaystyle\int_c^\theta \frac{2H(z)}{Q^2(z)} dz\right\}, & \theta \in [\varphi_1, \varphi_2); \\ 0, & \theta \in [\varphi_2, \varphi_1 + \pi) \end{cases}$$

($c \in (\varphi_1, \varphi_2)$, если φ_1 — h^+-направление, φ_2 $(\varphi_2 < \varphi_1 + \pi)$ — h^--направление.

Через $\nu(\theta)$ будем обозначать функцию, определенную на промежутке $[\varphi_1, \varphi_1 + \pi)$ и равную одной из функций $\rho_i^+(\theta)$, $\rho_i^-(\theta)$, $\rho_1(\theta)$ $(i = 1, 2)$ в зависимости от типа особых направлений φ_k $(k = 1, 2)$.

Лемма 3. Пусть особые направления системы (1) все h^+-направления или все h^--направления. Для того чтобы уравнение (5) имело π-периодическое решение с ограниченной первой производной, необходимо и достаточно, чтобы $\displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi_1+\pi} g(\theta)\nu(\theta)\,d\theta = 0$.

Доказательство приведем для случая, когда φ_1 — h^+-направление и $Q(\varphi) \neq 0$ при $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_1 + \pi)$. Для того чтобы решение $F(\varphi)$ было π-периодическим, необходимо и достаточно, чтобы $\displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi_1+\pi} F'(y)dy = 0$ или, учитывая лемму 1,

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_1+\pi} dy \int_{\varphi_1}^{y} \frac{2q(\theta)}{Q^2(\theta]} \exp\left\{-\int_\theta^y \frac{2H(z)}{Q^2(z)} dz\right\} d\theta = 0.$$

Меняя пределы интегрирования, получаем $\displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi_1+\pi} g(\theta)\nu(\theta)\,d\theta = 0$.

Лемма доказана.

Пусть $\check{W}(y) = \Phi(c, y)$ $(\varphi_1 < c < \varphi_2$, c фиксировано), $\sigma(x) = \check{W}'(g(x))\,Q(g(x))$, $g(x)$ — функция обратная к $\check{W}(x)$.

Лемма 4. Если $H(\varphi_1) > 0$, $H(\varphi_2) < 0$, то $\displaystyle\int_0^\infty \frac{u}{\sigma^2(u)} du < \infty$.

Доказательство. В интеграле $\int\limits_0^z \frac{u}{\sigma^2(u)}\,du$ сделаем замену

$$\int\limits_0^z \frac{u}{\sigma^2(u)}\,du = \int\limits_{g(0)}^{g(z)} \frac{1}{Q^2(x)}\left(\int\limits_c^x \exp\left\{\int\limits_y^x \frac{2H(t)}{Q^2(t)}\,dt\right\}dy\right)dx.$$

При $z \to +\infty$ $g(z) \to \varphi_2$, поэтому чтобы последний интеграл сходился, достаточно, чтобы функция

$$\Phi(x) = \frac{1}{Q^2(x)}\int\limits_c^x \exp\left\{\int\limits_y^x \frac{2H(t)}{Q^2(t)}\,dt\right\}dy$$

имела конечный предел при $x \to \varphi_2$. Обозначим $\frac{H(\varphi_2)}{(Q'(\varphi_2))^2} = -q$, $q > 0$. В окрестности точки φ_2

$$\Phi(x) \leqslant \frac{K}{(\varphi_2 - x)^2}\int\limits_c^x \exp\left\{\frac{q}{\varphi_2 - y} - \frac{q}{\varphi_2 - x}\right\}dy$$

(K постоянная). Положим $\frac{1}{\varphi_2 - y} = z$, $\frac{1}{\varphi_2 - x} = u$, $\frac{1}{\varphi_2 - c} = c_1$, $0 < \lambda < 1$,

$$\Phi(x) \leqslant Ku^2e^{-qu}\int\limits_{c_1}^{\lambda u} e^{qz}\frac{1}{z^2}\,dz + Ku^2e^{-qu}\int\limits_{\lambda u}^{u} e^{qz}\frac{1}{z^2}\,dz \leqslant$$

$$\leqslant Ku^2e^{q(\lambda-1)u}\int\limits_{c_1}^{\lambda u}\frac{1}{z^2}\,dz + \frac{K}{\lambda^2}e^{-qu}\int\limits_{\lambda u}^{u} e^{qz}\,dz = 0(1).$$

Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (3), $f(x)$ — непрерывная π-периодическая функция, тогда

$$P\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t f(\varphi(s))\,ds = \left(\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_1+\pi} \nu(\theta)\,d\theta\right)^{-1}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_1+\pi} f(\theta)\,\nu(\theta)\,d\theta\right\} = 1. \quad (11)$$

Доказательство. Если особые направления все h^+-направления или все h^--направления, $g(\theta)$ — непрерывная π-периодическая функция, $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_1+\pi} g(\theta)\,\nu(\theta)\,d\theta = 0$, то справедливо равенство (6), и $F(\varphi)$ является π-периодической функцией. Далее доказательство аналогично доказательству теоремы 1 [6]. Если же для особых направлений φ_1, φ_2 $H(\varphi_1) > 0$, $H(\varphi_2) < 0$, то в уравнении (3) сделаем замену

$$\psi(t) = \check{W}(\varphi(t)), \quad (12)$$

$\psi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$d\psi(t) = \sigma(\psi(t))\,dw(t).$$

Из $H(\varphi_1) > 0$, $H(\varphi_2) < 0$ следует, что $\check{W}(\varphi) \to +\infty$ при $\varphi \to \varphi_2$, $\check{W}(\varphi) \to -\infty$ при $\varphi \to \varphi_1$, поэтому из теоремы 1 и равенства (12) получаем

$$P\{\sup_{t>0} \psi(t) = +\infty\} = P\{\inf_{t>0} \psi(t) = -\infty\} = 1.$$

И так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2(z)}\,dz < \infty$, то для $\psi(t)$ справедлива эргодическая теорема (см. [2], ч. 1, § 18):

$$P\left\{\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t f(g(z))\,dz = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2(z)}\,dz\right)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(g(z))}{\sigma^2(z)}\,dz\right\} = 1.$$

Из последнего равенства, сделав замену $g(x) = y$, получаем утверждение леммы.

Теорема 3. Пусть $\Delta = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_1+\pi} R(\theta)\,\nu(\theta)\,d\theta$, $\xi(t)$ — решение системы (1).

Если $\Delta < 0$, то $P\{\lim\limits_{t\to\infty} \|\xi(t)\| = 0\} = 1$, если $\Delta > 0$, то $P\{\lim\limits_{t\to\infty} \|\xi(t)\| = \infty\} = 1$, если $\Delta = 0$, то $P\{\varliminf\limits_{t\to\infty} \|\xi(t)\| = 0\} = 1$, $P\{\varlimsup\limits_{t\to\infty} \|\xi(t)\| = +\infty\} = 1$.

Доказательство. Перепишем уравнение (2) так:

$$r(t) = r(0)\exp\left\{t\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t R(\varphi(s))\,ds + \frac{1}{t}\int\limits_0^t G(\varphi(s))\,dw(s)\right)\right\}. \quad (13)$$

С вероятностью 1 $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t G(\varphi(s))\,dw(s) = 0$. В силу леммы 5 с вероятностью 1 $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t R(\varphi(s))\,ds = \left(\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_1+\pi} \nu(\theta)\,d\theta\right)^{-1} \Delta$. Поэтому, если $\Delta \neq 0$, утверждение теоремы следует из (13).

Пусть теперь $\Delta = 0$. Докажем сначала теорему в предположении, что для особых направлений φ_1, φ_2 выполняются условия

$H(\varphi_1) > 0$, $H(\varphi_2) < 0$, $Q(\varphi) \neq 0$ $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$. Сделав в уравнении (3) замену (12), перепишем систему (2), (3) так:

$$r(t) = r(0)\exp\left\{\int_0^t \bar{R}(\psi(s))\,ds + \int_0^t \bar{G}(\psi(s))\,dw(s)\right\},$$

$$d\psi(t) = \sigma(\psi(t))\,dw(t),$$

где $\bar{R}(x) = R(g(x))$, $\bar{G}(x) = G(g(x))$.

Пусть x, y, a $(a < x)$ произвольные конечные числа. Положим

$$\tau_{x,y} = \inf\{s,\ \psi_x(s) = y\},$$

$$\tau = \inf\{s,\ \psi_x(s) = x,\ \inf_{0 \leqslant u \leqslant s} \psi_x(u) \leqslant a\}.$$

Так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2(x)}\,dx < +\infty$, то $M\tau_{x,y}$ (см. [2], ч. 1, § 18), поэтому и $M\tau < +\infty$. Определим последовательность марковских моментов

$$\tau^{(k+1)} = \inf\{s,\ \psi_x^{(k)}(s) = x,\ \inf_{0 \leqslant u \leqslant s} \psi_x^{(k)}(s) \leqslant a\},$$

$\psi_x^{(k+1)}(s) = \psi_x^{(k)}(\tau^{(k+1)} + s)$, $\tau^{(1)} = \tau$, $\psi_x^{(0)}(s) = \psi_x(s)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Построим последовательность случайных величин $\zeta^{(k)}$ следующим образом. Пусть $\check{\tau}^{(k)} = \sum\limits_{i=0}^{k} \tau^{(i)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $\tau^{(0)} = 0$, тогда

$$\zeta^{(k)} = \int\limits_{\check{\tau}^{(k)}}^{\check{\tau}^{(k+1)}} \bar{R}(\psi_x(s))\,ds + \int\limits_{\check{\tau}^{(k)}}^{\check{\tau}^{(k+1)}} \bar{G}(\psi_x(s))\,dw(s).$$

Случайные величины $\zeta^{(k)}$ независимы и одинаково распределены (см. [2], ч. 1, § 15).

Покажем еще, что $M\zeta^{(0)} = 0$:

$$M\int_0^\tau \bar{G}(\psi_x(s))\,dw(s) = 0,$$

$$P\left\{\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \bar{R}(\psi_x(s))\,ds = \frac{M\int_0^\tau \bar{R}(\psi_x(s))\,ds}{M\tau}\right\} = 1$$

(см. [2], ч. 1, § 18). И так как

$P\left\{\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \bar{R}(\psi_x(s))\,ds = 0\right\} = 1$, то $M\int\limits_0^\tau \bar{R}(\psi_x(s))\,ds = 0$, следовательно, $M\zeta^{(0)} = 0$.

Покажем, что $D\zeta^{(0)} < \infty$:

$$M(\zeta^{(0)})^2 \leqslant \|\bar{R}\|^2 M\tau^2 + 2\|\bar{R}\|(M\tau^2)^{1/2}(\|\bar{G}^2\| M\tau)^{1/2} + \|\bar{G}^2\| M\tau,$$

где $\|\bar{R}\| = \max\limits_{x\in[0,\pi]} |R(x)|$.

Из $M\tau^2_{x,a} < \infty$ следует $M\tau^2 < \infty$, поэтому, чтобы $D\zeta^{(0)} < \infty$, достаточно $M\tau^2_{x,a} < \infty$.

Пусть $\tau_x[a, b]$ — время первого достижения процессом $\psi_x(t)$ границ промежутка $[a, b]$ $(a < x < b)$, тогда

$$M(\tau_x[a, b])^2 = 4(x-a)\int\limits_x^b \frac{(b-z)}{(b-a)} \frac{M\tau_z[a, b]}{\sigma^2(z)} dz +$$

$$+ 4\frac{b-x}{b-a}\int\limits_a^x (z-a)\frac{M\tau_z[a,b]}{\sigma^2(z)} dz; \tag{14}$$

$$M\tau_z[a, b] = 2\frac{b-z}{b-a}\int\limits_a^z \frac{u}{\sigma^2(u)} du - 2a\frac{b-z}{b-a}\int\limits_a^z \frac{1}{\sigma^2(u)} du +$$

$$+ 2z\int\limits_z^b \frac{b-u}{b-a}\cdot\frac{1}{\sigma^2(u)} du - 2\int\limits_z^b \frac{b-u}{b-a}\cdot\frac{1}{\sigma^2(u)} du, \tag{15}$$

(см. [2], ч. 1, § 15). Очевидно, при фиксированных a, x $M(\tau_x[a, b])^2$ сходится к $M(\tau_{x,a})^2$ при $b \to +\infty$. Поэтому, если $|M\tau_z[a, b]| < K < +\infty$ при $z, b \in [a, +\infty)$, то из (14) получаем

$$M(\tau_{x,a})^2 \leqslant 4K\left[(x-a)\int\limits_x^\infty \frac{1}{\sigma^2(z)} dz + \int\limits_a^x (z-a)\frac{1}{\sigma^2(z)} dz\right] < +\infty.$$

И чтобы $M(\tau_{x,a})^2 < \infty$, достаточно $\lim\limits_{\substack{z\to+\infty\\ b\to+\infty}} M\tau_z[a, b] < \infty$. Последнее следует из (15) и леммы 4. Значит, $D\zeta^{(0)} < \infty$.

Рассмотрим последовательность случайных величин

$$r(\check{\tau}^{(n)}) = r(0)\exp\left\{\int\limits_0^{\check{\tau}^{(n)}} \bar{R}(\psi_x(s)) ds + \int\limits_0^{\check{\tau}^{(n)}} \bar{G}(\psi_x(s)) dw(s)\right\} =$$

$$= r(0)\exp\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\zeta^{(k)}\right\} = \exp\left\{(2n\sigma^2 \ln\ln n\sigma^2)^{1/2} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\zeta^{(k)}}{(2n\sigma^2\ln\ln n\sigma^2)^{1/2}}\right\}.$$

Воспользовавшись законом повторного логарифма (см. [3], гл. X, § 3), получим

$$P\{\underline{\lim}_{t\to\infty} r(\check{\tau}^{(n)}) = 0\} = P\{\overline{\lim}_{t\to\infty} r\check{\tau}^{(n)}) = \infty\} = 1.$$

И так как $P\{\lim_{n\to\infty} \check{\tau}^{(n)} = +\infty\} = 1$, то в предположении, что $H(\varphi_1) > 0$, $H(\varphi_2) < 0$ теорема доказана.

Если $H(\varphi_1) > 0$, $H(\varphi_2) > 0$, то определяя марковские моменты $\tau^{(k)}$ так: $\tau^{(k+1)} = \inf\{s, \varphi^{(k)}(s) = \varphi_1 + (k+1)\pi\}$, $\varphi^{(k+1)}(s) = \varphi^{(k)}(\tau^{(k+1)} + s)$, $\varphi^{(0)}(t) = \varphi(t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $\varphi_1 = \varphi(0)$ доказываем теорему, как и в случае $H(\varphi_1) > 0$, $H(\varphi_2) < 0$.

Теорема 3 доказана.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность чл.-кор. АН УССР А. В. Скороходу за постановку задачи и помощь в работе.

Список литературы: 1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 1. М., «Наука», 1971. 2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, «Наукова думка», 1968. 3. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М., «Наука», 1972. 4. *Хасьминский Р. З.* Необходимые и достаточные условия устойчивости линейных стохастических систем. — «Теория вероятностей и ее применения», 1967, **12**, 1, с. 167—172. 5. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., «Наука», 1969. 6. *Турчин В. Н.* Об устойчивости систем линейных стохастических уравнений второго порядка.— В сб.: Теория случайных процессов. Киев, ИМ АН УССР, 1974, с. 188—195.

V. N. Turchin

THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF SOLUTIONS OF LINEAR STOCHASTIC SYSTEMS

The system

$$d\xi(t) = A\xi(t)\,dt + B\xi(t)\,dw(t) \tag{1}$$

where $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$, $i, j = 1, 2$, $w(t)$ — Wiener process, which is equivalent to system

$$r(t) = r(0)\exp\left\{\int_0^t R(\varphi(s))\,ds + \int_0^t G(\varphi(s))\,dw(s)\right\},$$

$$d\varphi(t) = H(\varphi(t))\,dt + Q(\varphi(t))\,dw(t)$$

is considered.

The asymptotic behaviour of solutions of system (1) at $t\to\infty$ in the case $Q(\varphi)$ vanishing in some points is investigated.

Поступила в редколлегию 19.11 1976.