УДК 519.21

С. ФАЙЗУЛЛАЕВА, асп., Ташкентский университет

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГНОЗА

1. Рассмотрим стационарный в широком смысле процесс $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$ с $M\xi(t) = 0$, $M|\xi(t)|^2 < \infty$ и абсолютно непрерывной спектральной функцией.

Пусть σ^2 — ошибка наилучшего в среднеквадратичном линейного прогноза величины $\xi(\tau)$ по значениям $\xi(t)$, $t \in E$ $(\tau \overline{\in} E)$, где E— некоторое множество на прямой. Допустим, что истинная спектральная плотность (сп. пл.) $f(\lambda)$ процесса $\xi(t)$ неизвестна, а известна некоторая приближенная сп. пл. $\tilde{f}(\lambda)$. Обозначим через $\tilde{\varphi}(\lambda)$ спектральную характеристику прогноза, отвечающую сп. пл. $\tilde{f}(\lambda)$. Через $\tilde{\sigma}^2$ обозначим ошибку такого прогноза:

$$\tilde{\sigma}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{i\lambda\tau} - \tilde{\varphi}(\lambda)|^2 \tilde{f}(\lambda)\, d\lambda. \tag{1}$$

Введем, далее, величину

$$\delta^2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{i\lambda\tau} - \tilde{\varphi}(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda. \tag{2}$$

Пусть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(\lambda) - f(\lambda)|\, d\lambda \leqslant h_1. \tag{3}$$

В работе [1] показано, что $\lim\limits_{h_1 \to 0} \sup\limits_{\tilde{f}} \delta^2(\tilde{f}) = \sigma^2$, где sup берется по всем сп. пл. $\tilde{f}(\lambda) \geqslant f(\lambda)$, удовлетворяющим условию (3). При этом множество E может быть как ограниченным, так и неограниченным. В работе [2] рассмотрен случай, когда $E = (-\infty, 0]$, а также имеет место условие (3), и показано, что если

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{f}(\lambda) - f(\lambda)|}{\tilde{f}(\lambda)}\, d\lambda \leqslant h_2, \tag{4}$$

то

$$\lim_{h_1, h_2 \to 0} \sup_{\tilde{f}} \delta^2(\tilde{f}) = \sigma^2,$$

где sup берется по всем сп. пл. $\tilde{f}(\lambda)$, удовлетворяющим условию (3) и (4). Там же установлен аналогичный результат для процесса $\xi(t)$ с дискретным временем t.

В работе [3] для регулярного стационарного процесса $\xi(t)$ с дискретным временем и с $E = \{\ldots, -1, 0, 1\}$ установлено обратное: достаточная малость разности $\delta^2(\tilde{f}) - \sigma^2$ и интеграла (3) (с заменой пределов интегрирования на $-\pi, \pi$) обеспечивает достаточную малость интеграла (4) (также взятого в пределах от $-\pi$ до π).

Здесь мы будем считать, что выполнено условие

(А): множество E — ограниченное.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (А), (3), (4) и

$$d_1(1+\lambda^2)^{-n} \leqslant \tilde{f}(\lambda) \leqslant d_2(1+\lambda^2)^{-n}, \tag{5}$$

$n \geqslant 1$ — целое, $0 < d_1 < d_2 < \infty$. Тогда $\lim\limits_{\substack{h_1 \to 0 \\ d_1^{-1} d_2 h_2 \to 0}} \sup\limits_{\tilde{f}} \delta^2(\tilde{f}) = \sigma^2$,

где sup — берется по всем сп. пл. $\tilde{f}(\lambda)$, удовлетворяющим условиям (3) — (5).

Примечание. Как видно из формулировки теоремы 1, величины d_1, d_2 могут варьировать: допускается, что $d_1 \to 0$, $d_2 \to \infty$, однако с условием, что $d_1^{-1} d_2 h_2 \to 0$.

Доказательство. В дальнейшем через C будем обозначать величины, постоянные по отношению к h_1, h_2, d_1, d_2. С учетом обозначений (1), (2), как и в работе [2], можем записать неравенство:

$$\sigma^2 \leqslant \delta^2(\tilde{f}) \leqslant \tilde{\sigma}^2 + R(\tilde{f}), \tag{6}$$

где

$$R(\tilde{f}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |e^{i\lambda\tau} - \tilde{\varphi}(\lambda)|^2 |\tilde{f}(\lambda) - f(\lambda)| \, d\lambda. \tag{7}$$

Как показано в работе [1], из условия (3) следует, что

$$\lim_{h_1 \to 0} \sup_{\tilde{f}} \tilde{\sigma}^2 \leqslant \sigma^2. \tag{8}$$

Для исследования поведения величины $R(\tilde{f})$ используем некоторые рассуждения, примененные в доказательстве теоремы 1 [5] с учетом [6].

Пусть Δ — конечный интервал длины $|\Delta|$ такой, что

$$E \subset \Delta. \tag{9}$$

Используем обозначения

$$f_0(\lambda) = \frac{1}{(1+\lambda^2)^n}, \quad a_0(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda} \tilde{\varphi}(\lambda) f_0(\lambda) \, d\lambda$$

и рассмотрим интегральное уравнение типа Винера — Хопфа

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda}\tilde{\varphi}(\lambda) f_0(\lambda)\,d\lambda = a_0(t), \quad t \in \Delta. \tag{10}$$

Введем гильбертово пространство функций $\{\varphi(\lambda)\}$ со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_g = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda)\overline{\psi(\lambda)}\, g(\lambda)\,d\lambda,$$

где $g(\lambda)$ — какая-либо сп. пл., и его подпространство $L_G(g)$, являющееся замыканием линейных комбинаций $\sum\limits_k c_k e^{i\lambda t_k}$, $t_k \in G$, относительно этого скалярного произведения.

Так как $\tilde{\varphi}(\lambda)$ является проекцией $e^{i\lambda\tau}$ на $L_E(\tilde{f})$, то $\|\tilde{\varphi}(\lambda)\|^2_{\tilde{f}} \leqslant \|e^{i\lambda\tau}\|^2_{\tilde{f}}$, откуда, применяя условия (5) и (3), получаем

$$\|\tilde{\varphi}(\lambda)\|^2_{f_0} \leqslant d_1^{-1}\|\tilde{\varphi}(\lambda)\|^2_{\tilde{f}} \leqslant d_1^{-1}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,d\lambda + h_1\right). \tag{11}$$

Далее, в силу условий (5) $L_\Delta(\tilde{f}) = L_\Delta(f_0)$, поэтому с учетом (9) можем записать

$$\tilde{\varphi}(\lambda) \in L_\Delta(f_0). \tag{12}$$

Из равенства (10) следует, что $a_0(t)$ $n-1$ раз дифференцируема, причем производная $a_0^{(n-1)}(t)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет условию

$$\int_\Delta [a_0^{(n)}(t)]^2\,dt < \infty. \tag{13}$$

Последнее утверждение доказывается тем, что

$$\int_\Delta [a_0^{(n)}(t)]^2\,dt \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2n}|\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 f_0^2(\lambda)\,d\lambda \leqslant \|\tilde{\varphi}(\lambda)\|^2_{f_0},$$

и неравенством (11).

Из соотношений (12), (13) и [4] следует, что функцию $\tilde{\varphi}(\lambda)$ можно считать решением из класса $L_\Delta(f_0)$ уравнения (10) типа Винера — Хопфа, в правой части которого стоит некоторая функция $a_0(t)$, удовлетворяющая условию (13).

Следуя рассуждениям, приведенным в работе [5], с использованием результатов [4], получаем

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = 2\pi(1+i\lambda)^n\tilde{\psi}(\lambda) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j P_{n-1}^{(j)}(\lambda), \tag{14}$$

где

$$\tilde{\psi}(\lambda) = \int\limits_{\Delta} e^{i\lambda s}\left(1 + \frac{\partial}{\partial s}\right)^n a_0(s)\, ds, \tag{14'}$$

а $P_{n-1}^{(j)}(\lambda)$ — полиномы степени не выше $n-1$.

При этом функции

$$a_j(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda} P_{n-1}^{(j)}(\lambda) f_0(\lambda)\, d\lambda, \quad j = \overline{1, n}, \tag{15}$$

являются линейно-независимыми решениями однородного дифференциального уравнения

$$\left(1 + \frac{\partial}{\partial t}\right)^n a(t)\, dt = 0. \tag{16}$$

Функция же $a_0(t)$ на отрезке Δ может быть представлена в виде

$$a_0(t) = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda}(1 + i\lambda)^n \tilde{\psi}(\lambda) f_0(\lambda)\, d\lambda + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j(t). \tag{17}$$

Поскольку левая часть уравнения (16) не зависит от функции $\tilde{f}(\lambda)$, то не зависят от этой функции и коэффициенты полиномов $P_{n-1}^{(j)}(\lambda)$. Поэтому

$$|P_{n-1}^{(j)}(\lambda)| \leqslant C(1 + \lambda^2)^{\frac{n-1}{2}}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{18}$$

откуда в силу (15) следует, что

$$|a_j(t)| \leqslant C, \quad j = \overline{1, n}. \tag{19}$$

Далее, на основании линейной независимости функций $a_j(t)$ найдутся такие точки $\{t_k\}$, что $\det \| a_j(t_k) \|_{j,k=\overline{1,n}} \neq 0$, причем указанный определитель не зависит, очевидно, от $\tilde{f}(\lambda)$. Поэтому, рассматривая равенства (17) в точках t_k как систему уравнений относительно величин α_i, получаем с учетом неравенств (19) следующие оценки для решений этой системы:

$$|\alpha_j| \leqslant C\left(\max_{t \in \Delta} |a_0(t)| + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\psi}(\lambda)|}{|1 - i\lambda|^n}\, d\lambda\right). \tag{20}$$

Из равенства (10) находим

$$|a_0(t)| \leqslant \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_0(\lambda)\, d\lambda}\, \| \tilde{\varphi}(\lambda) \|_{t_0}. \tag{21}$$

Затем, используя неравенство Шварца, соотношение (14′) и равенство Парсеваля, можем записать

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\psi}(\lambda)|}{|1 - i\lambda|^n}\, d\lambda \leqslant C \left[\int_{\Delta} \left[\left(1 + \frac{\partial}{\partial t} \right)^n a_0(t) \right]^2 dt \right]^{1/2}. \tag{22}$$

Далее, из равенства (14′) и неравенства Шварца сразу следует, что

$$|\tilde{\psi}(\lambda)|^2 \leqslant |\Delta| \int_{\Delta} \left[\left(1 + \frac{\partial}{\partial t} \right)^n a_0(t) \right]^2 dt. \tag{23}$$

Представление (10) для функции $a_0(t)$ и равенство Парсеваля дают нам

$$\int_{\Delta} \left[\left(1 + \frac{\partial}{\partial t} \right)^n a_0(t) \right]^2 dt \leqslant C \| \tilde{\varphi}(\lambda) \|_{f_0}^2. \tag{24}$$

Из соотношений (20) — (22), (24) приходим к неравенству

$$|\alpha_j| \leqslant C \| \tilde{\varphi}(\lambda) \|_{f_0}, \tag{25}$$

а из соотношений (23), (24) — к неравенству

$$|\tilde{\psi}(\lambda)|^2 \leqslant C \| \tilde{\varphi}(\lambda) \|_{f}^2. \tag{26}$$

Соотношения (14), (18), (25), (26) приводят к оценке

$$|\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 \leqslant C (1 + \lambda^2)^n \| \tilde{\varphi}(\lambda) \|_{f_0}^2,$$

которая в силу неравенства (11) дает нам

$$|\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 \leqslant C (1 + \lambda^2)^n d_1^{-1} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\lambda + h_1 \right).$$

На основании последнего неравенства и условий (3) — (5) получаем следующую оценку величины (7):

$$R(\tilde{f}) \leqslant 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(\lambda) - f(\lambda)|\, d\lambda + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 |\tilde{f}(\lambda) - f(\lambda)|\, d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant C \left[h_1 + d_1^{-1} d_2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\lambda + h_1 \right) h_2 \right]. \tag{27}$$

Соотношения (6), (8), (27) завершают доказательство нашей теоремы.

Список литературы: 1. *Розанов Ю. А.* Об устойчивости решений линейных задач для стационарных процессов. — «Теория вероятностей и ее применения», 1964, **9**, 3, с. 528—529. 2. *Малевич Т. Л.*, *Мирзахмедов М. А.* Об устойчивости в задачах линейного прогноза. — В сб.: Случайные процессы и смежные вопросы, вып. 1. Ташкент, 1970, с. 61—64. 3. *Шатских С. Я.* Об устойчивости решения задачи линейного прогноза для стационарных процессов с дискретным параметром. — «Известия вузов. Математика», 1975, № 1 (152), с. 71—81. 4. *Розанов Ю. А.* О плотности гауссовских распределений интегральных уравнений Винера—Хопфа.—«Теория вероятностей и ее применения», 1966, **11**, с. 170—179. 5. *Малевич Т. Л.* Некоторые оценки для вероятностей событий, порождаемых гауссовскими процессами и полями, и применение к вопросам пересечения уровня. — «Теория вероятностей и ее применения», 1974, **19**, 1, с. 140—151. 6. *Малевич Т. Л.* Письмо в редакцию. — «Теория вероятностей и ее применения», 1977, 22, 1.

S. Faisullaeva

TO THE QUESTION ON THE STABILITY IN PROBLEMS OF THE LINEAR PREDICTION

Let $\xi(t)$ be a stationary process with spectral density $f(\lambda)$, $\tilde{f}(\lambda)$ — another spectral density. Let σ^2 be the error of the linear prediction $\xi(\tau)$ on observations $\xi(t)$, $t \in T$ (T is a boundied set), $\tilde{\varphi}(\lambda)$ be spectral characteristic of the prediction corresponding to $\tilde{f}(\lambda)$ and $\delta^2(\tilde{f}) = \int |e^{i\lambda\tau} - \varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda$. The conditions are stated under which $\delta^2(f)$ uniformly converges to σ^2.

Поступила в редколлегию 15.09 1976.