УДК 519.21

М. Г. АЛЬ-МАДАНИ, асп., Киевский университет

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОЦЕНКАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕГРЕССИИ ОДНОРОДНЫХ И ИЗОТРОПНЫХ ВЕКТОРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Важные проблемы теории автоматического управления, теории распознавания образов, статистической радиофизики приводят к необходимости рассматривать оценки параметров случайных полей.

В настоящей статье указаны оптимальные в смысле минимума среднеквадратической погрешности оценки коэффициентов регрессии векторного однородного и изотропного случайного поля, наблюдаемого на сфере.

1. Спектральное разложение однородного и изотропного векторного случайного поля. Под векторами будем понимать вектор-столбцы. Придерживаясь матричных обозначений, векторы также будем рассматривать как прямоугольные матрицы и действие над векторами будем производить так же, как и над матрицами. Символ $*$ будет обозначать операцию перехода к сопряженной матрице.

Пусть $\eta(x) = \{\eta_1(x), \ldots, \eta_N(x)\}$ — N-мерное однородное и изотропное случайное поле на евклидовом пространстве R^n.

Случайное поле $\eta(x)$ называется однородным и изотропным, если $M\eta(x) = \mathrm{const}$ (будем предполагать в дальнейшем $M\eta(x) = 0$), а $M\eta(x)[\eta(y)]^* = B(|x-y|)$, где $|x-y|$ — расстояние между точками x и y. Будем предполагать, что $\eta(x)$ непрерывно в среднем квадратичном. Как известно [1], корреляционная матрица $\eta(x)$ имеет вид

$$B(r) = 2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\int\limits_0^\infty \frac{J_{(n-2)/2}(\lambda r)}{(\lambda r)^{(n-2)/2}}\,d\Phi(\lambda), \tag{1}$$

где $J_\nu(x)$ — Бесселева функция ν-го порядка, $\Phi(\cdot) = \|\Phi_{ij}(\cdot)\|$ — матричная аддитивная функция множеств на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ борелевских множеств из $(0, +\infty)$, значения которой положительно определены, $\Phi_{ij}(\cdot)$ — конечные и при $i \neq j$ обобщенные меры на $\mathfrak{B}$.

Само случайное поле представим в виде [2]

$$\eta(x) = C_n \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)} s_m^l(u)\int\limits_0^\infty J_{m+[(n-2)/2]}(\lambda r)\,[(\lambda r)^{(n-2)/2}]^{-1} Z_m^l(d\lambda), \tag{2}$$

где $u=(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-2}, \varphi)$ — сферические координаты точки x, $s_m^l(u)$ — ортонормированные сферические гармоники степени m, $c_n^2 = 2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\pi^{n/2}$, $z_m^l(s)$ — последовательность векторных случайных мер на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ такая, что

$$Mz_m^l(s) = 0,$$

$$Mz_m^l(s_1)[z_p^q(s_2)]^* = \delta_m^p \delta_e^q \Phi(s_1 \cap s_2). \tag{3}$$

2. **Об оценке коэффициента регрессии однородного и изотропного векторного поля**. Предположим, что векторное случайное поле

$$\xi(r, u) = g(r, u)\, a + \eta(r, u), \tag{4}$$

где $g(r, u)$ — известная $N \times N$ матрица, a — неизвестный вектор, наблюдается на сфере $s_n(r)$ радиуса r.

Требуется по результатам наблюдения построить оценку $\hat{a}$ неизвестного вектора a, линейно выражающуюся через результаты наблюдения, несмещенную ($M\hat{a} = a$) и имеющую минимальную среднеквадратическую погрешность

$$M[\hat{a} - a]^*[\hat{a} - a]. \tag{5}$$

Пусть $\xi_m^l(r)$, $g_m^l(r)$, $\eta_m^l(r)$ — коэффициенты Фурье разложений соответственно функций $\xi(r, u)$, $g(r, u)$, $\eta(r, u)$ по системе функций $s_m^l(u)$. Пусть также

$$B_m(r) = c_n^2 \int_0^\infty \frac{J^2_{m+[(n-2)/2]}(\lambda r)}{(\lambda r)^{n-2}}\, d\Phi(\lambda). \tag{6}$$

Будем предполагать, что при каждом m матрица $B_m(r)$ является невырожденной. Предположим также, что выполнено условие

$$\mathrm{sp}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)} g_m^{l*} B_m^{-1} g_m^l\right]^{-1} < \infty. \tag{7}$$

Пусть $K_\xi(r)$ — замкнутая (в смысле среднеквадратичной сходимости) линейная оболочка случайных векторов $\xi(r, u)$, $u \in S_n$. Каждый элемент $\gamma \in K_\xi(r)$ имеет следующий вид:

$$\gamma = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)} c_m^l \xi_m^l(r), \tag{8}$$

где c_m^l, $m = 0, 1, \ldots$; $l = \overline{1, h(m, n)}$ — некоторая последовательность $N \times N$ матриц, такая, что

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)} M[\eta_m^l]^*[c_m^l]^*[c_m^l][\eta_m^l] < \infty, \tag{9}$$

т. е. $\operatorname{sp}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)} c_m^l B_m(r)\, c_m^{l*}\right] < +\infty.$

Пусть $H(r)$ — гильбертово пространство последовательностей матриц

$$c = \left\{c_m^l : m = 0, 1, \ldots;\ l = \overline{1, h(m,n)},\ \operatorname{sp}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)} c_m^l B_m c_m^{l*} < \infty\right\},$$

в котором скалярное произведение двух последовательностей $c_1 = \{c_{1m}^l\}$, $c_2 = \{c_{2m}^l\}$ определено по формуле

$$\langle c_1, c_2\rangle = \operatorname{sp}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)} c_{1m}^l B_m c_{2m}^{l*}\right]. \tag{10}$$

Будем искать оценку $\hat{a}$ вектора a в виде

$$\hat{a} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)} c_m^l \xi_m^l(r), \tag{11}$$

где $c = \{c_m^l\} \in H(r)$.

Чтобы оценка $\hat{a}$ была несмещенной, последовательность матриц $\{c_m^l\}$ должна удовлетворять условию

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)} c_m^l g_m^l a = a, \tag{12}$$

т. е. $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)} c_m^l g_m^l(r) = E.$

В силу (12)

$$M[\hat{a} - a]^*[\hat{a} - a] = \langle c, c\rangle. \tag{13}$$

Пусть $d = \{d_m^l : m = 0, 1, \ldots;\ l = \overline{1, h(m, n)}\}$, где $d_m^l = A^{-1}[g_m^l]^* B_m^{-1}$; $A = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)} (g_m^l)^* B_m^{-1} g_m^l.$

Из условия (7) вытекает, что $d \in H(r)$. Используя условие несмещенности (12), получаем

$$\langle c, d\rangle = \langle d, d\rangle. \tag{14}$$

Отсюда следует, что

$$c_m^l = d_m^l = A^{-1}(g_m^l)^* B_m^{-1}; \tag{15}$$

$$M[\hat{a} - a]^*[\hat{a} - a] = \langle c, c\rangle = \operatorname{sp}(A^{-1}). \tag{16}$$

Из (15) получим

$$\hat{a} = A^{-1}\int_{S_n} l(r, u)\, \xi(r, u)\, m_n(du), \tag{17}$$

где

$$l(r,u)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)} s_m^l(u)\,[g_m^l(r)]^* B_m^{-1}(r), \tag{18}$$

$m_n(\cdot)$ — лебегова мера на сфере s_n.

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. Пусть векторное случайное поле $\xi(r, u) = g(r, u)\,a + \eta(r, u)$, где $u \in s_n$, a — неизвестный вектор, $g(r, u)$ — известная матричная функция, $\eta(r, u)$ — изотропное векторное случайное поле с известной корреляционной матрицей, наблюдается на сфере радиуса r. Тогда линейная, несмещенная оценка a с минимальной среднеквадратической погрешностью имеет вид (17), где $l(r, u)$ определяется по формуле (18). Среднеквадратическая погрешность оценки определяется по формуле (16).

Заметим, что соотношения (16) — (18) принимают особенно простой вид, если матричная функция $g(r, u) = g(r)$ не зависит от u. В этом случае все $g_m^l(r)$, кроме $g_0^1(r) = \sqrt{\omega_n}\,g(r)$, равны нулю, и

$$\hat{a}=\frac{1}{\omega_n}\,[(g_0^1(r))^* B_0^{-1} g_0^1(r)]^{-1}\,(g_0^1(r)^* B_0^{-1}(r)\int\limits_{s_n}\xi(r,u)\,m_n(du); \tag{19}$$

$$M\,[\hat{a}-a]^*\,[\hat{a}-a]=\mathrm{sp}\,[\omega_n\,(g_0^1(r))^*\,B_0^{-1}g_0^1(r)]^{-1}. \tag{20}$$

Вернемся теперь к рассмотрению общей задачи. Пусть векторное поле $\xi(r,u)=\sum\limits_{s=1}^{N} g_s(r,u)\,a_s+\eta(r,u)$ наблюдается на сфере радиуса r, предположим, что $\forall s=\overline{1,N}$

$$\left[\mathrm{sp}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)}(g_{ms}^l(r))^* B_m^{-1}(r)\,g_{ms}^l(r)\right]^{-1}<\infty. \tag{21}$$

Пусть $d_s = A_s^{-1}\,(g_{ms}^l)^*\,B_m^{-1}$,

$$A_s=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)}(g_{ms}^l(r))^* B_m^{-1}(r)\,g_{ms}^l(r).$$

Тогда предположение (21) означает, что $d_s \in H(r)$ $(s=\overline{1,N})$.

Будем искать оценку $\hat{a}_i$ в виде

$$\hat{a}_i=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)} c_{mi}^l\,\xi_m^l(r). \tag{22}$$

Тогда условие несмещенности $\hat{a}_i$ принимает вид

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)}\sum_{s=1}^{N} C_{mi}^l g_{ms}^l a_s = a_i. \tag{23}$$

Очевидно, что если $a_s = 0$ при $\forall\ s \neq i$, $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} c_{m_i}^l g_{m_i}^l = E$, то наша оценка будет несмещенной. Условие несмещенности принимает вид

$$\langle c_i, d_s \rangle = \delta_i^s \langle d_s, d_s \rangle \quad (s = \overline{1, N}), \tag{24}$$

где δ_i^s — символ Кронекера, $c_i = \{c_{m_i}^l\}$.

Если $\hat{a}_i$ — несмещенная оценка a_i, то

$$M[\hat{a}_i - a_i]^* [\hat{a}_i - a_i] = \langle c_i, c_i \rangle = \| c_i \|^2. \tag{25}$$

Итак, задача отыскания оценки a_i сводится к отысканию в $H(r)$ последовательности матрицы $c_i = \{c_{m_i}^l\}$, удовлетворяющей условиям (24) и имеющей наименьшую норму. Если последовательность матрицы c_i удовлетворяет условиям (24), то ее проекция на подпространство $D_N \subset H(r)$, натянутое на матрицы $d_1, \ldots, d_N$, также удовлетворяет (24) и имеет не большую норму, чем исходная матрица. Поэтому последовательность матриц $c_i = \{c_{m_i}^l\}$ следует искать в D_N. Однако в D_N есть только одна последовательность матриц, удовлетворяющая (24). Это последовательность матриц $c_i = \sum_{s=1}^{N} \alpha_{si} d_s$, где α_{si} определяются из системы уравнений

$$\sum_{s=1}^{N} \alpha_{si} \langle d_s, d_j \rangle = \delta_i^j \langle d_j, d_j \rangle \quad (j = \overline{1, N}). \tag{26}$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. Если выполнены предположения (21), то линейная несмещенная оценка a_i с минимальной дисперсией имеет вид

$$\hat{a}_i = \sum_{s=1}^{N} \alpha_{si} \int_{S_n} l_s(r, u)\, \xi(r, u)\, m_n(du),$$

где

$$l_s(r, u) = A_s^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} s_m^l(u)\, [g_{m_s}^l]^* B_m^{-1}(r);$$

α_{si} определяется из системы уравнений (26).

3. Об оценке среднего значения векторного случайного поля. Частным случаем рассмотренной выше задачи является задача об оценке неизвестного среднего значения векторного случайного поля. Предположим, что на сфере $s_n(r)$ наблюдается векторное случайное поле $\xi(r, u) = m + \eta(r, u)$, где $\eta(r, u)$ — векторное однородное и изотропное случайное поле с нулевым средним и известной матричной корреляционной функцией. Нужно найти линейную, несмещенную оценку m с минимальной дисперсией. Из теоремы 1 при $g(r, u) = E$ и $a = m$ получаем следующий результат.

Теорема 3. Среди всех линейных несмещенных оценок неизвестного среднего векторного и изотропного случайного поля, наблюдаемого на сфере, наименьшую дисперсию имеет оценка

$$\hat{m} = [G(r, u)]^{-1} \int_{S_n} G(r, u) \xi(r, u) m_n(du),$$

представляющая собой среднее поля $\xi(r, u)$ по сфере $S_n(r)$, где

$$G(r, u) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} s_m^l(u) B_m^{-1}(r), \quad M[\hat{m} - m]^*[\hat{m} - m] = \mathrm{sp}[G^{-1}].$$

Для скалярных однородных и изотропных случайных полей, а также изотропных случайных полей задачи оценки коэффициентов регрессии и неизвестного среднего значения рассматривались в работах [3—5].

Список литературы: 1. *Яглом А. М.* Некоторые классы случайных полей в n-мерном пространстве, родственные стационарным случайным процессам.— «Теория вероятностей и ее применения», 1957, 2, № 3, с. 292—337. 2. *Аль-Мадані М. Г., Ядренко М. Й.* Спектральні розклади векторних однородних ізотропних випадкових полів.— «Доповіді АН УРСР. Сер. А», 1975, № 2, с. 4—7. 3. *Yadrenko M. I.* Statistical problems for homogeneous isotropic random field observed on the sphere.— II International Symposium on Information Theory. Budapest, Hungarian Academy of Sciences, 1973, c. 75—76. 4. *Ядренко М. И.* Об оптимальных линейных оценках математического ожидания и коэффициентов регрессии однородных и изотропных случайных полей.— In: Problems of control and information theory, v. 2, 1973, c. 17—26. 5. *Ядренко М. И.* Об оптимальных линейных оценках коэффициентов регрессии изотропных случайных полей.— «Проблемы передачи информации», 1973, 9, 3, с. 68—79.

M. G. Al-Madany

ON OPTIMAL LINEAR ESTIMATIONS OF REGRESSION COEFFICIENTS OF HOMOGENEOUS AND ISOTROPIC VECTOR RANDOM FIELDS

The optimal mean-square estimations of regression coefficients of vector homogeneous and isotropic random fields observed on sphere are indicated.

Поступила в редколлегию 19.02 1975.