УДК 519.21

О. П. БОРОЗДИН, асп., Киевский университет,
И. И. ЕЖОВ, д-р физ.-мат. наук,
Институт математики АН УССР

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ СИЛЬНО РЕГЕНЕРИРУЮЩИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

1. Сепарабельный вещественный случайный процесс ξ_t будем называть сильно регенерирующим, если: 1) он регулярен, т. е. $P\{-\infty < \xi_t < \infty\} = 1$, $t \geqslant 0$; 2) существует такое состояние x_0 (без ограничения общности можно считать $x_0 = 0$), что

$$P\{\xi_{u+t_j} \leqslant x_j;\ j = \overline{1, n}/\xi_t,\ t < u;\ \xi_u = 0\} =$$
$$= P\{\xi_{t_j} \leqslant x_j;\ j = \overline{1, n}/\xi_0 = 0\}, \tag{1}$$
$$u \geqslant 0;\ 0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n;\ -\infty < x_j < \infty,\ j = \overline{1, n};$$
$$n = 1, 2, \ldots;$$

3) при $\xi_0 = 0$ и $\tau = \inf\{t : \xi_t \neq 0\}$ $P\{0 < \tau < \infty\} = 1$.

Согласно (1)

$$P\{\tau \geqslant x + y\} = P\{\tau \geqslant x\} P\{\tau \geqslant y\},$$

поэтому существует такое $\lambda\,(0 < \lambda < \infty)$, что

$$P\{\tau < x\} = 1 - e^{-\lambda x},\ x > 0. \tag{2}$$

2. Пусть $\varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$ — измеримая ограниченная функция, положительная в единственной точке $x = 0 : \varphi(0) = a > 0$; $\varphi(x) \leqslant 0$, $x \neq 0$. Положим

$$\eta_t = \int_0^t \varphi(\xi_u)\,du, \quad t \geqslant 0$$

(ввиду регулярности ξ_t η_t определена для всех t).

Мы будем изучать случайный процесс τ_z, $z \geqslant 0$, где

$$\tau_z = \begin{cases} \inf\{t : \eta_t = z\}, & \sup\limits_t \eta_t \geqslant z, \\ \infty, & \sup\limits_t \eta_t < z. \end{cases} \tag{3}$$

Теорема 1. Если $\xi_0 = 0$, то τ_z, $z \geqslant 0$ — неубывающий однородный процесс с независимыми приращениями.

Следствие 1. В условиях теоремы 1

$$M(e^{-s\tau_z};\ \tau_z < \infty) = e^{-z\rho},$$

где $\rho = \rho(s)$ — кумулянта процесса.

Теорема 2.

$$a\rho + \lambda M(e^{-s\theta-\rho\eta};\ \theta < \infty) - \lambda \equiv s, \quad s \geqslant 0, \tag{4}$$

где $\theta = \inf\{u - \tau : u > \tau,\ \xi_u = 0\}$,

$$\eta = -\int_{\tau}^{\tau+\theta} \varphi(\xi_u)\,du, \quad \tau = \inf\{t : \xi_t \neq 0\} \quad (\xi_0 = 0).$$

Теорема 3. При каждом фиксированном $s > 0$

$$z_s(y) = (ay - s)(1 - M(e^{-s\theta-y\eta};\ \theta < \infty))^{-1}, \quad y \geqslant \frac{s}{a}$$

монотонно возрастающая дифференцируемая функция.

Следствие 2. $\rho(s) = b_s(\lambda)$, где $b_s(y)$, $y \geqslant 0$ — функция, обратная к $z_s(y)$.

Теорема 4. Для того чтобы для всех z

$$P\{\tau_z < \infty\} = 1 \quad (\xi_0 = 0),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$P\{\theta < \infty\} = 1 \text{ и } M\eta \leqslant \frac{a}{\lambda}.$$

Теорема 5. Если $\lambda M\eta < a$, $M\tau_z^k$ и $M\theta^k$ $(\xi_0 = 0)$ конечны или бесконечны одновременно при всех $k = 1, 2, \ldots$.

Доказательство получаем последовательным дифференцированием (по s) тождества (4) с использованием неравенства $\eta \leqslant \theta \sup_x |\varphi(x)|$, выполненного на всем пространстве элементарных событий.

Следствие 3. Если $\lambda M\eta < a$ и $M\theta^2 < \infty$, то

$$\lim_{z\to\infty} P\left\{\frac{\tau_z - M\tau_z}{\sqrt{D\tau_z}} \leqslant x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du, \tag{5}$$

где

$$M\tau_z = z\frac{1 + \lambda M\theta}{a - \lambda M\eta},$$

$$D\tau_z = \lambda z\left(\frac{M\theta^2}{a - \lambda M\eta} + 2M\theta\eta\,\frac{1 + \lambda M\theta}{(a - \lambda M\eta)^2} + M\eta^2\frac{(1 + \lambda M\theta)^2}{(a - \lambda M\eta)^3}\right).$$

Теорема 6. Если $\xi_0 \neq 0$, то

$$M(e^{-s\tau_z};\quad \tau_z < \infty) = e^{-z\rho} M(e^{-s\theta^* - \rho\eta^*};\quad \theta^* < \infty), \tag{6}$$

где $\theta^* = \inf\{t : \xi_t = 0\}$, $\eta^* = -\int\limits_0^{\theta^*} \varphi(\xi_u)\, du$.

Доказательство теорем 1 — 4, 6. 1. Пусть $0 \leqslant z_0 < z < z_1$ и $\tau_z = t$. Тогда $\eta_u < z$, $u < t$; $\eta_z = t$; $\xi_t = 0$, ибо процесс η_u непрерывен и возрастает только там, где $\xi_u = 0$. Следовательно,

$$\tau_{z_0} = \inf\{v < t : \eta_v = z_0\}, \quad \tau_{z_1} = \inf\left\{v > t : \int\limits_t^v \varphi(\xi_u)\, du = z_1 - z\right\}. \tag{7}$$

Видно, что τ_{z_0} и τ_{z_1} измеримы относительно минимальных σ-алгебр $\sigma\{\xi_v,\ v < t\}$ и $\sigma\{\xi_v,\ v > t\}$, что ввиду (1) и $\xi_t = 0$ влечет их независимость. Этим обоснована марковость τ_z, $z \geqslant 0$. Из (1) и (3) следует

$$P\{\tau_{z_1} < x + t / \tau_z = t\} =$$

$$= P\left\{\inf\left(v > t : \int\limits_t^v \varphi(\xi_u)\, du = z_1 - z\right) < x + t / \xi_t = 0\right\} =$$

$$= P\left\{\inf\left(v : \int\limits_0^v \varphi(\xi_u)\, du = z_1 - z\right) < x / \xi_0 = 0\right\} = P\{\tau_{z_1 - z} < x / \tau_0 = 0\}.$$

Это означает, что марковский процесс τ_z однороден как во времени, так и по пространству состояний, т. е. является однородным процессом с независимыми приращениями. Теорема 1 доказана.

2. Распределение τ_z в предположении $\xi_0 = 0$ совпадает с распределением

$$\frac{z}{a}\, \sigma\left\{\tau \geqslant \frac{z}{a}\right\} + (\tau + \theta + \tau'_{z - a\tau + \eta})\, \sigma\left\{\tau < \frac{z}{a}\right\}, \tag{8}$$

где τ, θ, η определены в п. 2 § 2, $\sigma\{A\}$ — индикатор события A, а τ'_z, $z \geqslant 0$ — стохастически эквивалентен τ_z, $z \geqslant 0$ ($\xi_0 = 0$) и не зависит от него.

Из (1) следует, что τ и (θ, η) независимы. Согласно (2) и (8)

$$e^{-z\rho} = e^{-\frac{z}{a}(\lambda + s)} + \lambda \int\limits_0^{\frac{z}{a}} e^{-\lambda u} du \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{-(u + v_1)s - (z - au + v_2)\rho} P\{\theta \in dv_1,\ \eta \in dv_2\},$$

или

$$e^{-z\rho} - e^{-\frac{z}{a}(\lambda + s)} = (e^{-z\rho} - e^{-\frac{z}{a}(\lambda + s)}) \frac{\lambda}{\lambda + s - a\rho} M(e^{-s\theta - \rho\eta};\ \theta < \infty),$$

что равносильно (4) $(e^{-z\rho} > e^{-\frac{z}{a}(\lambda+s)})$. Теорема 2 доказана.

3. Положим $g(s, y) = M(e^{-s\theta - y\eta};\ \theta < \infty)$. Тогда $\left(y \geqslant \frac{s}{a} > 0\right)$

$$(1 - g(s, y))^2 \frac{dz_s(y)}{dy} = a(1 - g(s, y)) + (ay - s) g'_y(s, y) >$$

$$> a(g(s, 0) - g(s, y)) + ayg'_y(s, y) - sg'_y(s, y) =$$

$$= \frac{1}{2} ay^2 g''_{yy}(s, y') - sg'_y(s, y) > 0 \quad (0 < y' < y).$$

Следовательно, $z_s(y)$ на $\left[\frac{s}{a}, \infty\right)$ монотонно возрастает от 0 до ∞. Теорема 3 доказана.

Согласно (4) $\rho > \frac{s}{a}$ и $\lambda = z_s(\rho)$, потому $\rho(s) = b_s(\lambda)$.

4. Положим $z(y) = \frac{ay}{1 - g(y)}$, $y \geqslant 0$, где $g(y) = M(e^{-y\eta};\ \theta < \infty)$, $\left(\text{если } g(0) = 1, \text{ то, по определению, } z(0) = \frac{a}{M\eta}\right)$. Так как

$$(1 - g(y))^2 \frac{dz(y)}{dy} > \frac{1}{2} ay^2 g''(y'') > 0 \quad (0 < y'' < y),$$

то $z(y)$ на $[0, \infty)$ монотонно возрастает от $z(0)$ до ∞, где

$$z(0) = \begin{cases} 0, & P\{\theta < \infty\} < 1, \\ \frac{a}{M\eta}, & P\{\theta < \infty\} = 1. \end{cases}$$

Согласно (4) $z(\rho(0)) = \lambda$, а потому

$$\rho(0) = b(\lambda), \tag{9}$$

где $b(y)$, $y \geqslant z(0)$ — функция, обратная к $z(y)$, $y \geqslant 0$. Функция $b(\lambda)$ на $[z(0), \infty)$ монотонно возрастает от 0 до ∞, а потому $\rho(0) > 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda > z(0)$. Это равносильно тому, что $\rho(0) = 0$ тогда и только тогда, когда $M\eta \leqslant \frac{a}{\lambda}$. В этом случае $P\{\tau_z < \infty\} = 1$, а в остальных $P\{\tau_z < \infty\} = e^{-zb(\lambda)} < 1$. Теорема 4 доказана.

5. В предположении $\xi_0 = x$ положим

$$\tau_z^{(x)} = \inf\{t : \eta_t = z\}, \quad \theta_x^* = \inf\{t : \xi_t = 0\}, \quad \eta_x^* = -\int_0^{\theta_x^*} \varphi(\xi_u)\, du;$$

$\tau_z^{(x)}$ имеет то же распределение, что и $\theta_x^* + \tau'_{z+\eta_x^*}$, где τ'_z, $z \geqslant 0$ стохастически эквивалентен τ_z, $z \geqslant 0$ ($\xi_0 = 0$) и не зависит от (θ_x^*, η_x^*). Но тогда

$$M(e^{-s\tau_z^{(x)}};\ \tau_z^{(x)} < \infty) = e^{-z\rho} M(e^{-s\theta_x^* - \rho\eta_x^*};\ \theta_x^* < \infty). \tag{10}$$

Усредняя обе части (10) по всем $x(\xi_0 = x)$, получаем (6). Теорема 6 доказана.

§ 2. ПРИМЕРЫ

А. Полумарковские процессы. 1. Пусть $\xi_t \in \{0, 1, \ldots, n\}$—полумарковский процесс [1], переходные вероятности вложенной цепи которого $F_{kr}(x)$ ($k, r = \overline{0, n}$; $F_{kk}(x) \equiv 0$), причем

$$F_{0r}(x) = p_r(1 - e^{-\lambda x}), \quad r = \overline{1, n}.$$

Очевидно, что ξ_t удовлетворяет условиям 1) — 3) п. 1 § 1. Если $\zeta_t = \sup\{u \leqslant t : \xi_v = \xi_t,\ t - u \leqslant v \leqslant t\}$, то пара $\{\xi_t, \zeta_t\}$ — однородный марковский процесс. Пусть $\xi_0 = k > 0$, $\zeta_0 = 0$. Положим $\theta_k = \inf\{t : \xi_t = 0\}$, $\eta_k = -\int_0^{\theta_k} \varphi(\xi_u)\,du$, $M(e^{-s\theta_k - \sigma\eta_k};\ \theta_k < \infty) = g_k(s, \sigma)$. Тогда

$$M(e^{-s\theta - \sigma\eta};\ \theta < \infty) = g(s, \sigma) = \sum_{k=1}^{n} p_k g_k(s, \sigma). \tag{11}$$

Нетрудно показать, что

$$g_k(s, \sigma) = \int_0^\infty e^{(\varphi(k)\sigma - s)x} dF_{k0}(x) + \sum_{r=1}^{n} g_r(s, \sigma) \int_0^\infty e^{(u(k)\sigma - s)x} dF_{kr}(x).$$

Положим

$$\int_0^\infty e^{-sx} dF_{kr}(x) = f_{kr}(s);$$

$\vec{g}(s, \sigma) = \{g_k(s, \sigma);\ k = \overline{1, n}\}$, $\vec{f}(s, \sigma) = \{f_{k0}(s - \varphi(k)\sigma);\ k = \overline{1, n}\}$ вектор-столбцы;

$$F(s, \sigma) = \| f_{kr}(s - \varphi(k)\sigma);\quad k, r = \overline{1, n} \|.$$

Тогда $\vec{g}(s, \sigma) = \vec{f}(s, \sigma) + F(s, \sigma)\vec{g}(s, \sigma)$. Если $s, \sigma \geqslant 0$, $s\sigma \neq 0$, то существует $(I - F(s, \sigma))^{-1}$ (I — единичная матрица) и $\vec{g}(s, \sigma) = (I - F(s, \sigma))^{-1}\vec{f}(s, \sigma)$. Подставляя это выражение в (11), получаем

$$M(e^{-s\theta - \eta\sigma};\ \theta < \infty) = \vec{p}(I - F(s, \sigma))^{-1}\vec{f}(s, \sigma), \tag{12}$$

где $\vec{p} = \{p_k;\ k = \overline{1, n}\}$ — вектор-строка.

2. Предположим, что стохастическая матрица $\|F_{kr}(\infty);\ k,\ r=\overline{0,n}\|$ примитивна [2]. Это означает, что вложенная цепь Маркова ξ_j^*, $j=1,2,\ldots$ ($\xi_j^*=\xi_{t_j+0}$, где t_j — момент j-го скачка ζ_t: $\zeta_{t_j-0}>0$, $\zeta_{t_j+0}=0$) эргодична. В этом случае θ, значит и η с вероятностью 1, конечны. Их средние конечны, если

$$m_{kr}=\int_0^\infty x\,dF_{kr}(x)<\infty \qquad (k,\ r=\overline{0,n}). \tag{13}$$

Это условие для конечности $M\eta$ (в отличие от $M\theta$) не является, вообще говоря, необходимым, ибо возможны случаи

$$\int_0^\infty x\,dF_{kr}(x)=\infty, \quad \varphi(k)=0 \quad (k>0).$$

Предполагая (13) выполненным, найдем $M\eta$. Имеем

$$g_k(0,\sigma)=g_k(\sigma)=f_{k0}(-\varphi(k)\sigma)+\sum_{r=1}^n f_{kr}(-\varphi(k)\sigma)g_r(\sigma),$$

откуда

$$-g_k'(0)=\mu_k=-\varphi(k)\sum_{r=0}^n m_{kr}+\sum_{r=1}^n F_{kr}(\infty)\mu_r,$$

или $\vec{\mu}=-\vec{m}+F(0,0)\vec{\mu}$, где $\vec{\mu}=\{\mu_k;\ k=\overline{1,n}\}$, $\vec{m}=\left\{\varphi(k)\sum_{r=0}^n m_{kr};\ k=\overline{1,n}\right\}$.

Так как цепь Маркова ξ_j^*, $j\geqslant 1$ эргодична, то $\lim\limits_{k\to\infty}F^k(0,0)=0$ (0 справа — матрица $n\times n$ с нулевыми элементами), ибо цепь ξ_j^*, выходя из любого состояния $r>0$, за конечное время попадает в 0. Но тогда однородная система $\vec{x}=F(0,0)\vec{x}$ имеет только тривиальное решение и, стало быть, $I-F(0,0)$ обратима и $\vec{\mu}=-(I-F(0,0))^{-1}\vec{m}$. Согласно (11) $M\eta=\sum\limits_{k=1}^n p_k\mu_k$, или $M\eta=-\vec{p}(I-F(0,0))^{-1}\vec{m}$.

3. Найдем $M(e^{-s\theta^*-\sigma\eta^*};\ \theta^*<\infty)$, фигурирующее в теореме 6. Если $\xi_0=m>0$, $\zeta_0=x$, то $(\theta^*,\ \eta^*)=(\theta_m^*(x),\ \eta_m^*(x))$. Имеем

$$M(e^{-s\theta_m^*(x)-\sigma\eta_m^*(x)};\ \theta_m^*(x)<\infty)=$$

$$=\left(1-\sum_{r=0}^n F_{mr}(x)\right)^{-1}\left(\int_x^\infty e^{(\varphi(m)\sigma-s)(x-u)}dF_{m0}(u)+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{n} g_k(s,\sigma)\int_x^\infty e^{(\varphi(m)\sigma-s)(x-u)}dF_{mk}(x)\Bigg),$$

отсюда

$$M(e^{-s\theta^*-\sigma\eta^*};\ \theta^*<\infty)=$$

$$=M\left(1-\sum_{r=0}^{n}F_{\xi_0 r}(\zeta_0)\right)^{-1}\left(\int_{\zeta_0}^{\infty}e^{(\varphi(\xi_0)\sigma-s)(\zeta_0-u)}dF_{\xi_0 0}(u)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}g_k(s,\sigma)\int_{\zeta^0}^{\infty}e^{(\varphi(\xi_0)\sigma-s)(\zeta_0-u)}dF_{\xi_0 k}(u)\right).$$

Б. Процессы с независимыми приращениями с границей. 1. Пусть ξ_t, $t\geqslant 0$ — однородный марковский процесс, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi_t=\operatorname{sgn}\xi_t d\alpha_t+(1-\operatorname{sgn}\xi_t)d\beta_t, \tag{14}$$

где α_t — однородный процесс с независимыми приращениями без отрицательных скачков, а β_t — не зависящий от α_t, возрастающий пуассоновский процесс (без сноса) с параметрами λ, $F(x)$ (λ — интенсивность скачков, а $F(x)$ — функция распределения величины скачка).

Эволюцию процесса ξ_t можно описать так. Там, где $\xi_t>0$, его приращения суть приращения α_t; попав в 0, процесс проводит в нем показательно распределенное время со средним $\frac{1}{\lambda}$, после чего получаем положительное приращение (функция распределения которого $F(x)$) и т. д.

Процесс ξ_t очевидным образом удовлетворяет условиям 1) —3) п. 1 § 1, а потому теоремы 1—6 (применительно к нему) верны. Мы ограничимся тем частным случаем, когда

$$\varphi(x)=-b\operatorname{sgn}x+a(1-\operatorname{sgn}x).$$

Очевидно, что $\eta=b\theta$,

$$M(e^{-s\theta};\ \theta<\infty)=\int_0^\infty M(e^{-s\delta_x};\ \delta_x<\infty)\,dF(x), \tag{15}$$

где $\delta_x=\inf\{t:\alpha_t-\alpha_0=-x\}$.

Известно [3], что $M(e^{-s\delta_x};\ \delta_x<\infty)=e^{-x\varkappa(s)}$, причем, если (представление Леви—Хинчина)

$$\omega(s)=-ls+\frac{1}{2}\sigma^2s^2+\int_0^\infty\left(e^{su}-1-\frac{su}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}G(du)$$

($G(A)$ — конечная мера, сосредоточенная на $(0,\infty)$) — кумулянта процесса α_t ($Me^{s\alpha_t}=e^{t\omega(s)}$, $s\leqslant 0$,) то $\omega(-\varkappa(s))\equiv s$, $s\geqslant 0$.

Положим

$$m_k = \int_0^\infty u^k dF(u), \quad \mu_k = \int_0^\infty u^k G(du) \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots);$$

$\varkappa(0) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$M\alpha_1 = \mu_1 - l \leqslant 0. \tag{16}$$

Из (15) следует, что выполнение этого неравенства является необходимым и достаточным условием конечности θ.

Если $\mu_1 = l$, то $M\delta_x = \infty$, что влечет $M\theta = \infty$. Пусть в (16) стоит строгое неравенство. Так как

$$Me^{-s\theta} = f(\varkappa(s)), \tag{17}$$

$f(s) = \int_0^\infty e^{-su} dF(u)$ и $\omega(-\varkappa(s)) \equiv s$, то $M\theta^k$ конечен одновременно с $\max(m_k, \mu_k)$. Так, например,

$$M\theta = \frac{m_1}{l - \mu_1},$$

$$M\theta^2 = \frac{(l-\mu_1)m_2 + (\sigma^2 + \mu_0 + \mu_2)m_1}{(l-\mu_1)^3} \text{ и т. д.}$$

Отсюда делаем вывод, что $P\{\tau_z < \infty\} = 1$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{bm_1}{l - \mu_1} \leqslant \frac{a}{\lambda}. \tag{18}$$

Если в (18) стоит строгое неравенство (равенство), то $M\tau_z < \infty$ ($M\tau_z = \infty$) и $M\tau_z = z\,\dfrac{\lambda m_1 + l - \mu_1}{a(l-\mu_1) - \lambda b m_1}$.

2. Найдем $M(e^{-s\theta^* - \rho\eta^*};\ \theta^* < \infty)$, фигурирующее в теореме 6. Если $\xi_0 = x$, то (θ^*, η^*) имеет то же распределение, что и $(\delta_x, b\delta_x)$, а потому

$$M(e^{-s\theta^* - \rho\eta^*};\ \theta^* < \infty) = Me^{-\xi_0 \varkappa(s + b\rho)}.$$

Стало быть,

$$M(e^{-s\tau_z};\ \tau_z < \infty) = e^{-z\rho} Me^{-\xi_0\varkappa(s+b\rho)},$$

где

$$a\rho + \lambda(f(\varkappa(s + b\rho)) - 1) \equiv s, \quad s \geqslant 0. \tag{19}$$

3. В заключение найдем функцию распределения τ_z (считая сначала $\xi_0 = 0$). Положим $s + b\rho = \bar\rho$. Тогда

$$\bar\rho + \frac{\lambda b}{a}(f(\varkappa(\bar\rho)) - 1) \equiv \frac{a+b}{a} s.$$

Допустим, что α_t имеет плотность

$$P\{\alpha_t \in A\} = \int_A \pi_t(u)\,du.$$

Тогда ([3], с. 81)

$$f(\varkappa(\bar{\rho})) = \int_0^\infty dF(t) \int_0^\infty e^{-z\bar{\rho}} \frac{t}{z} \pi_z(-t)\,dz = \int_0^\infty e^{-z\bar{\rho}} \frac{dz}{z} \int_0^\infty t\pi_z(-t)\,dF(t)$$

(изменение порядка интегрирования законно, ибо интегрируется неотрицательная функция). Пусть

$$c(z) = \frac{1}{z} \int_0^\infty t\pi_z(-t)\,dF(t)$$

$c(z)$ — плотность распределения, сосредоточенного на $[0, \infty))$. Предположим, что $M\alpha_t \leqslant 0$. Тогда

$$\bar{\rho} + \frac{\lambda b}{a} \int_0^\infty (e^{-z\bar{\rho}} - 1)\,c(z)\,dz \equiv \frac{a+b}{a} s,$$

ибо $P\{\delta_t < \infty\} = 1$.

Введем пуассоновский процесс γ_t (со сносом), кумулянта которого

$$\bar{\omega}(s) = -s + \frac{\lambda b}{a} \int_0^\infty (e^{sz} - 1)\,c(z)\,dz.$$

Так как $\bar{\omega}(-\bar{\rho}) \equiv \frac{a+b}{a} s$, то

$$M\left(\exp\left(-s\frac{a+b}{a}\bar{\delta}_z\right);\ \bar{\delta}_z < \infty\right) = e^{-z\bar{\rho}},$$

где $\bar{\delta}_z = \inf\{t : \gamma_t - \gamma_0 = -z\}$.

Следовательно, τ_z $(M(e^{-s\tau_z};\ \tau_z < \infty) = e^{-z\rho},\ s + b\rho = \bar{\rho})$ имеет то же распределение, что и $\frac{a+b}{a}\bar{\delta}_{\frac{z}{b}} - \frac{z}{b}$. Очевидно, что

$$P\{\gamma_t \leqslant y\} = \Pi_t(y) = e^{-\frac{\lambda bt}{a}} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda bt}{a}\right)^k H^{k*}(y+t),$$

где $H^{k*}(y)$ — k-кратная свертка $\int^y c(z)\,dz$.

Следовательно ([4], с. 66),

$$P\{\bar{\delta}_z \leqslant t\} = \int_t^z \frac{z}{y}\, dy \Pi_y(-z) \quad (0 < z \leqslant t),$$

а потому

$$P\{\tau_z \leqslant t\} = \frac{z}{b} \int_{\frac{z}{b}}^{\frac{a}{b}\frac{z+bt}{a+b}} \frac{1}{y}\, dy \Pi_y\left(-\frac{z}{b}\right) \quad (0 < z \leqslant at). \tag{20}$$

Заметим, что мера $\int_A dy \Pi_y\left(-\frac{z}{b}\right)$ $(A \subset [0, \infty))$ в точке $\frac{z}{b}$ имеет атом $P\left\{\gamma_{\frac{z}{b}} = -\frac{z}{b}\right\} = e^{-\frac{\lambda z}{a}}$, так что $P\left\{\tau_z = \frac{z}{a}\right\} = e^{-\frac{\lambda z}{a}}$ (факт, непосредственно следующий из определения τ_z).

Пусть теперь $M\alpha_t > 0$. В этом случае $\varkappa(0) = q > 0$, где q — максимальный корень $\omega(-x) = 0$, а потому $\int_0^\infty c(z)\, dz = f(q) < 1$ и

$$\bar{\rho} + \frac{\lambda b}{a} \int_0^\infty (e^{-z\bar{\rho}} - 1)\, c(z)\, dz \equiv \frac{a+b}{a} s + \frac{\lambda b}{a}(1 - f(q)). \tag{21}$$

Если γ_t — тот же пуассоновский процесс, что и выше, то $\Pi_t^*(y) = P\{\gamma_t \leqslant y\}$ несколько отлична от $\Pi_t(y)$:

$$\Pi_t^*(y) = \exp\left(-\frac{btf(q)}{a}\right) \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda bt}{a}\right)^k H^{k*}(y+t).$$

Согласно (21),

$$M\left(\exp\left\{-\left(\frac{a+b}{a} s + \frac{\lambda b}{a}(1 - f(q)\bar{\bar{\delta}}_z\right\}; \quad \bar{\bar{\delta}}_z < \infty\right) = e^{-z\bar{\rho}},$$

где

$$P\{\bar{\bar{\delta}}_z \leqslant t\} = \int_z^t \frac{z}{y}\, d_y \Pi_y^*(-z) \quad (0 < z \leqslant t),$$

а потому

$$P\{\tau_z \leqslant t\} = \frac{z}{b} \int_{\frac{z}{b}}^{\frac{a}{b}\frac{z+bt}{a+b}} \frac{1}{y} \exp\left\{\frac{\lambda b(f(q) - 1)}{a} y\right\} d_y \Pi_y^*\left(-\frac{z}{b}\right) \quad (0 < z \leqslant at).$$

4. Пусть теперь $\xi_0 \neq 0$. Вероятность $\{\tau_z \leqslant t\}$ зависит от ξ_0 как от параметра. Обозначим ее $P^{\xi_0}\{\tau_z \leqslant t\}$, оставляя для $\xi_0=0$ обычное обозначение $P\{\tau_z \leqslant t\}$. Тогда (п. 2)

$$P^{\xi_0}\{\tau_z \leqslant t\} = \int_0^{t-\frac{z}{a}} P\{\tau_z \leqslant t-y\}\, dG^{\xi_0}(y),$$

где $\int_0^\infty e^{-sy} dG^{\xi_0}(y) = e^{-\xi_0 \varkappa(\bar{\rho})}$, $P\{\tau_z \leqslant t\}$ известна (п. 3).

Остается найти $G^{\xi_0}(y)$. Ограничимся случаем $M\alpha_t \leqslant 0$. Имеем $e^{-\xi_0\varkappa(\bar{\rho})} = Me^{-\bar{\rho}\delta_{\xi_0}}$. Так как в точке t плотность $\delta_{\xi_0} = \frac{\xi_0}{t}\pi_t(-\xi_0)$ и

$$e^{-t\bar{\rho}} = M\left(\exp\left(-\frac{a+b}{a} s\bar{\delta}_t\right);\quad \bar{\delta}_t < \infty\right),\quad P\{\bar{\delta}_t \leqslant z\} =$$

$$= \int_t^z \frac{t}{y} d_y\Pi_y(-t),$$

то

$$G^{\xi_0}(y) = \iint\limits_{0 \leqslant t \leqslant u \leqslant \frac{ay}{a+b}} \frac{\xi_0}{u}\pi_t(-\xi_0)\, d_u\Pi_u(-t)\, dt.$$

Список литературы: 1. *Ежов И. И., Королюк В. С.* Полумарковские процессы и их применения.— «Кибернетика», 1967, 5, с. 58—65. 2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., «Наука», 1967. 3. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М., «Наука», 1972. 4. *Такач Л.* Комбинаторные методы в теории случайных процессов. М., «Мир», 1971.

O. P. Borozdin, I. I. Ezhov

ON SOME CLASS OF BOUNDARY FUNCTIONALS FOR STRONGLY REGENERATING RANDOM PROCESSES

In this paper the definition of the strongly regenerating process ξ_u is given. The process $\tau_z = \inf\left\{t: \int_0^t \varphi(\xi_u)\, du \geqslant z\right\}$, $z \geqslant 0$ is studied. In some cases the explicit form for the distribution of τ_z is obtained.

Поступила в редколлегию 18.11 1976.