УДК 519.21

В. Г. ГАДЖИЕВ, ст. науч. сотр.,
Институт кибернетики АН АзССР

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ГАУССОВОЙ МЕРОЙ

1. Пространство основных функций. Пусть $(X, \mathfrak{B})$ — измеримое гильбертово пространство с гауссовой мерой μ со средним нуль и корреляционным оператором B. Пусть $\varphi(x)$ — вещественная функция, определенная на X и измеримая относительно $\mathfrak{B}$. Будем говорить, что $\varphi(x)$ обладает в точке x слабым дифференциалом k-го порядка по направлению векторов $h_1, h_2, \ldots, h_k \in X$, если конечна величина

$$D\varphi(x; h_1, h_2, \ldots, h_k) = \frac{\partial^k}{\partial t_1 \ldots \partial t_k} \varphi\left(x + \sum_{i=1}^{k} t_i h_i\right)\Bigg|_{t_1=\ldots=t_k=0.}$$

Если $D\varphi(x; h_1, \ldots, h_k)$ линеен по каждому из h_i, то говорят, что $\varphi(x)$ обладает в точке x слабой производной, которая обозначается через $\varphi^{(k)}(x; h_1, \ldots, h_k)$ и представляет собой k-линейную форму относительно $h_1, h_2, \ldots, h_k$ при фиксированном x. Производные можно складывать и умножать на числа. Под произведением двух производных $\varphi^{(k)}(x; h_1, \ldots, h_k)$ и $\psi^{(l)}(x; h'_1, \ldots, h'_l)$ будем понимать $(k+l)$-линейную форму $\varphi^{(k)}(x; h_1, \ldots, h_k) \times \psi^{(l)}(x; h'_1, \ldots, h'_l)$.

Рассмотрим выражение

$$\sum_{i_1, \ldots, i_k=1}^{\infty} [\varphi^{(k)}(x; h_{i_1}, \ldots, h_{i_k})]^2,$$

где суммирование проводится по некоторому ортонормированному базису $\{h_i\}$ пространства X. Если эта сумма конечна для всех базисов, то величина ее не зависит от выбора базиса и называется следом 2 k-линейной формы и обозначается через $\mathrm{sp}[\varphi^{(k)}(x; \cdot)]^2$. Если конечны $\mathrm{sp}[\varphi_1^{(k)}(x; \cdot)]^2$ и $\mathrm{sp}[\varphi_2^{(k)}(x; \cdot)]^2$, то конечна и сумма

$$\sum_{i_1, \ldots, i_k=1}^{\infty} \varphi_1^{(k)}(x; h_{i_1}, \ldots, h_{i_k})\, \varphi_2^{(k)}(x; h_{i_1}, \ldots, h_{i_k}),$$

которая обозначается через $\mathrm{sp}\, \varphi_1^{(k)}(x; \cdot)\, \varphi_2^{(k)}(x; \cdot)$. Обозначим через D_k множество всех k раз непрерывно дифференцируемых в каждой точке $x \in X$ и по любым направлениям $h_1, \ldots, h_k \in X$ функций $\varphi(x)$, таких что $\mathrm{sp}[\varphi^i(x; \cdot)]^2 < \infty$, $i = \overline{0, k}$ в каждой точке $x \in X$ и

$$\int_X \mathrm{sp}\, \varphi^{(i)}(x; \cdot)\, \varphi^{(i)}(x; \cdot)\, \mu(dx) < \infty, \ i = \overline{0, k}; \ D = \bigcap_1^{\infty} D_k.$$

Введем на D_k скалярное произведение

$$(\varphi_1, \varphi_2)_k = \sum_{i=0}^{k} \int \operatorname{sp} \varphi_1^{(i)}(x; \cdot)\, \varphi_2^{(i)}(x; \cdot)\, \mu(dx).$$

Очевидно, $(\varphi_1, \varphi_2)_k$ удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения и нормы $\|\varphi\|_k = \sqrt{(\varphi, \varphi)_k}$ удовлетворяют условию $\|\cdot\|_1 \leqslant \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant \ldots \leqslant \|\cdot\|_k \leqslant \ldots$. Эта система норм — согласованная. Пространства D_k с нормой $\|\cdot\|_k$ неполные. Для их дополнения введем понятие обобщенной производной функционалов, используя формулу «интегрирования по частям». Эта формула справедлива тогда и только тогда, когда направления дифференцирования принадлежат $B^{1/2}X$, т. е. множеству допустимых сдвигов меры μ.

Пусть сначала $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют производные до n-го порядка по любым направлениям $h_1, \ldots, h_n \in B^{1/2}X$ и интегрируемы в квадрате вместе со своими производными. Тогда, применив несколько раз интегрирование по частям, получим (см. [1]):

$$\int f^{(n)}(x; h_1, \ldots, h_n)\, \varphi(x)\, \mu(dx) = \int f(x) \sum (-1)^k \varphi^{(k)}(x; h_{i_1} \ldots h_{i_k}) \times$$

$$\times \prod_{l=1}^{m} (b_{j_l}, B^{-1/2}x)\, \mu(dx), \tag{1}$$

где $b_{j_l} = B^{-1/2} h_{j_l}$ и суммирование проводится по наборам индексов $(i_1, \ldots, i_k) \cap (j_1, \ldots, j_m) = \varnothing$ и дополняющих друг друга до $(1, 2, \ldots \ldots, n)$, $k + m = n$.

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция из $L_2(\mu)$. Тогда правая часть (1) определяет некоторый функционал на D, линейный по $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Этот функционал назовем обобщенной производной порядка n по направлению $h_1, h_2, \ldots, h_n$ функции $f(x)$.

Рассмотрим случай, когда обобщенные производные являются обычными функциями из $L_2(\mu)$. Пусть S_k — класс функций, имеющих обобщенные производные до k-го порядка и $\int \operatorname{sp} \varphi^{(i)}(x; \cdot) \times \times \varphi^{(i)}(x; \cdot)\, \mu(dx) < \infty$, $i = \overline{0, k}$. Введем на S_k скалярное произведение

$$(\varphi_1 \varphi_2)_k = \sum_{i=0}^{k} \int \operatorname{sp} \varphi_1^{(i)}(x; \cdot)\, \varphi_2^{(i)}(x; \cdot)\, \mu(dx).$$

S_k с нормой $\|\varphi\|_k = \sqrt{(\varphi, \varphi)_k}$ превращается в гильбертово пространство. Легко видеть, что $D_k \subset S_k$. Множество функций $\varphi(x) \in D_k$ с непрерывными $\operatorname{sp}[\varphi^{(i)}(x; \cdot)]^2$ плотно в гильбертовом пространстве с нормой $\int \operatorname{sp}[\varphi^{(i)}(x; \cdot)]^2 \mu(dx)$, $i = \overline{0, k}$. Следовательно, множество функций с непрерывными $\operatorname{sp}[\varphi^{(i)}(x; \cdot)]^2$, $i = \overline{0, k}$ плотны также и в S_k. Значит, $\overline{D_k} = S_k$.

Теорема. Замыкание D_k в норме $\|\cdot\|_k$ совпадает с S_k.

Поскольку $\|\cdot\|_0 \leqslant \|\cdot\|_1 \leqslant \ldots \leqslant \|\cdot\|_n \leqslant \ldots$, то отождествив элементы пространства S_k с соответствующими элементами S_{k-1}, можно считать, что S_k есть часть S_{k-1}, $S_0 \supset S_1 \supset \ldots \supset S_k \supset \ldots \ldots \supset S \supset D = \bigcap D_k$, D является неполным счетно-нормированным пространством. Если его рассматривать как метрическое пространство с метрикой

$$\rho(\varphi, \psi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|\varphi - \psi\|_k}{1 + \|\varphi - \psi\|_k}$$

и пополнить в этой метрике, то получим $S = \bigcap S_k$.

S будем считать пространством основных функций. Оно является полным счетно-нормированным пространством со счетной системой согласованных норм $\|\cdot\|_k = \sqrt{(\cdot,\cdot)_k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Пространство D является всюду плотным линейным многообразием в S.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ — собственные векторы оператора B и X_n —конечномерное пространство, натянутое на $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а X^n — ортогональное дополнение к X_n до всего пространства X.

Известно [2], что мера μ эквивалентна мере $\mu_n \times \mu^n$, где μ_n — проекция меры μ на X_n, μ^n — на X^n.

Пусть $\varphi(x) \in D$, тогда цилиндрическая функция

$$\varphi_n(x) = \int_{X^n} \varphi(x+y)\, \mu^n(dy), \quad x \in X_n$$

и ее производные

$$\varphi_n^{(k)}(x; h_1, \ldots, h_k) = \int_{X^n} \varphi^{(k)}(x+y; h_1, \ldots, h_k)\, \mu^n(dy),$$

где $k = \overline{1, n}$ и $h_1 \ldots h_k \in X_n$, сходятся соответственно к $\varphi(x)$ и $\varphi^{(k)}(x; h_1 \ldots h_k)$ при каждом фиксированном $x \in X$.

Далее,

$$\sum_{i_1 \ldots i_k = 1}^{m} [\varphi_n^{(k)}(x; h_1, \ldots, h_k)]^2 \to \sum_{i_1 \ldots i_k = 1}^{m} [\varphi^{(k)}(x; h_1 \ldots h_k)]^2, \quad n \to \infty$$

для любого конечного $m \geqslant 0$.

Тогда

$$\operatorname{sp}[\varphi_n^{(k)}(x; \cdot)]^2 = \sum_{i_1 \ldots i_k = 1}^{n} [\varphi_n^{(k)}(x; h_{i_1} \ldots h_{i_k})]^2 \to$$

$$\to \sum_{i_1 \ldots i_k = 1}^{\infty} [\varphi^{(k)}(x; h_{i_1} \ldots h_{i_k})]^2 = \operatorname{sp}[\varphi^{(k)}(x; \cdot)]^2$$

при $n \to \infty$, и, значит, множество гладких цилиндрических функций $\varphi_n(x)$ плотно в S_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Следствие. Множество бесконечно дифференцируемых цилиндрических функций плотно в S.

2. Пространство обобщенных функций. Поскольку S — счетно-нормированное пространство, то к нему применима вся теория о сопряженном пространстве. Пусть S' — сопряженное пространство всех линейных непрерывных функционалов на S. Очевидно, всякий линейный непрерывный функционал на S_n является также функционалом на S. Поэтому $\bigcup_n S'_n \subset S'$, где S'_n — сопряженное к S_n.

Известно [3], что если f — линейный непрерывный функционал на S, то он непрерывен по некоторой норме $\|\cdot\|_k$, (наименьшее такое k называется порядком функционала), и, значит, принадлежит S'_k. Отсюда $S' = \bigcup_n S'_n$. Нетрудно видеть, что совокупность линейных непрерывных функционалов на S_n имеет порядок не более n. Пусть $\|f\|_n = \sup_{\|\varphi\|_n \leqslant 1} |f(\varphi)|$ — норма функционала из S'_n. Поскольку при $m < n$ $\|\cdot\|_m \leqslant \|\cdot\|_n$, то из ограниченности f на шаре $\|\cdot\|_m \leqslant 1$ вытекает ограниченность и в шаре $\|\cdot\|_n \leqslant 1$. Поэтому $\|f\|_m \geqslant \|f\|_n$, т. е. из $f \in S'_m$ вытекает $f \in S'_n$ и, значит, $S'_m \subset S'_n$. Отсюда следует, что пространства S'_n образуют возрастающую цепочку пространств.

Аналогично [3] можно ввести сильную и слабую топологию в S'. Пространство S' полно относительно слабой сходимости. Очевидно, всякая суммируемая в квадрате функция по мере μ порождает линейный непрерывный функционал на S

$$f(\varphi) = \int f(x)\,\varphi(x)\,\mu(dx). \tag{2}$$

Запас функций в S достаточен для различения двух суммируемых в квадрате функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Поэтому обычные функции будут отождествлены с линейными непрерывными функционалами на S. Если функционал представлен формулой (2), то назовем его регулярным, а если нет — сингулярным. Формулу (1) положим в основу определения производной обобщенной функции. Каждая обобщенная функция дифференцируема бесконечное число раз по любым направлениям из $B^{1/2}X$.

3. Примеры сингулярных обобщенных функций. А. В работе [2] для достаточно гладкой коразмерности единица поверхности Γ в X и для функции $\varphi(x)$, определенной в некоторой ε-окрестности Γ, был определен поверхностный интеграл

$$T_\Gamma(\varphi) = \int_\Gamma \varphi(x)\,\mu^\Gamma(dx),$$

где μ^Γ — поверхностная мера. Пусть $h \in B^{1/2}X$ — нормированный вектор и $L + h$ — подпространство, на которое проектируется Γ

вдоль h; P_h — проектирование вдоль h и $P_h\Gamma$ — проекция Γ на L. Определим функцию

$$f_L(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in P_h^{-1}(P_h\Gamma) \text{ и хотя бы для одной точки } y\in\Gamma,\\ & (x, n(y))\geqslant 0, \text{ где } n(y) \text{ — нормаль к } \Gamma \text{ в } y.\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Рассмотрим выражение

$$I(\varepsilon)=\int\limits_X f_L(x+\varepsilon h)\,\varphi(x)\,\mu(dx).$$

Известно [2], что

$$\frac{I(\varepsilon)-I(-\varepsilon)}{2\varepsilon}\to\int\limits_\Gamma \varphi(x)\,\mu^\Gamma(dx),\quad \varepsilon\to 0.$$

Тогда $\left.\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int\limits_\Gamma \varphi(x)\,\mu^\Gamma(dx)$. Но

$$I(\varepsilon)=\int\limits_X f_L(x+\varepsilon h)\,\mu(dx)=\int\limits_X f_L(x)\,\varphi(x-\varepsilon h)\,\mu(d(x-\varepsilon h)).$$

Отсюда

$$\left.\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int\limits_X f_L(x)\,[\varphi(x)\,(B^{-1/2}h, B^{-1/2}x)-\varphi^{(1)}(x;h)]\,\mu(dx).$$

Следовательно, поверхностный интеграл порождает функционал

$$T_\Gamma(\varphi)=\int\limits_X f_L(x)\,[\varphi(x)\,(B^{-1/2}h, B^{-1/2}x)-\varphi^{(\prime)}(x;h)]\,\mu(dx).$$

Очевидно, функционал $T_\Gamma(\varphi)$, определяемый поверхностным интегралом, является линейным непрерывным в S_1, и обобщенная функция $T_\Gamma(x)$ (равна нулю при $x\notin\Gamma$ и не определена при $x\in\Gamma$) является производной от обычной функции $f_L(x)$, т. е. $T_\Gamma(x)=f'_L(x;\cdot)$.

Выбор функции $f_L(x)$ зависит от h, но значение функционала $f'_L(x;\cdot)$ в S_1 на основных функциях не зависит от h и L, ибо в представлении поверхностного интеграла через обычный выбор h и L не влияет на значение интеграла, потому что различные h ортогональным преобразованием можно перевести друг в друга, и значение интеграла не изменится, что видно из представления в работе [4].

Далее, легко можно сформулировать утверждение, что обобщенная функция с носителем D, лежащим на поверхности Γ коразмерности единица, имеет представление

$$T_D(\varphi)=\int\limits_X f_{\Gamma_\varepsilon}(x)\,[\varphi(x)\,(B^{-1/2}h, B^{-1/2}x)-\varphi'(x;h)]\,\mu(dx),$$

де Γ_ε — ε-окрестность множества D на поверхности Γ, $f_{\Gamma_\varepsilon}(x)$ — бычная функция, построенная так же, как $f_L(x)$.

Б. Рассмотрим функционал, определенный поверхностным интегалом по поверхности коразмерности h: $T_\Gamma(\varphi) = \int\limits_\Gamma \varphi(x)\,\mu(dx)$. Опреeление и условия существования этого интеграла даны в работе [4].

Пусть $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \ldots \cap \Gamma_n$ — поверхность коразмерности n; $_i$ — поверхности коразмерности 1; $h_1, \ldots, h_n \in B^{1/2}X$ — ортонормиованные векторы, вдоль которых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ соответственно проекируются на подпространство $L_i \perp h_i$. Тогда Γ проектируется на $= L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_n$. Пусть

$$_{L_i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in P_{h_i}^{-1}(P_{h_i}\Gamma_i) \text{ и хотя бы для одного вектора } y_i \in \Gamma_i, \\ & (x, n(y_i)) \geqslant 0,\ n(y_i) \text{ — нормаль к } \Gamma_i \text{ в } y_i. \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$f_L(x) = f_{L_1}(x)\ldots f_{L_n}(x)$. Рассмотрим $I(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \int\limits_X f_L(x + \Sigma\varepsilon_i h_i)\,\varphi(x)\,\mu(dx)$. Нетрудно видеть, что

$$\left.\frac{\partial^n I(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)}{\partial\varepsilon_1 \ldots \partial\varepsilon_n}\right|_{\substack{\varepsilon_1=0\\ \cdots\\ \varepsilon_n=0}} = C\int\limits_\Gamma \varphi(x)\,\mu^\Gamma(dx),\ C = \text{const}.$$

Io

$$I(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \int\limits_X f_L(x)\,\varphi\left(x - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i h_i\right)\mu_{\Sigma\varepsilon_i h_i}(dx).$$

'огда

$$T_\Gamma(\varphi) = \left.\frac{\partial^n I(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n)}{\partial\varepsilon_1 \ldots \partial\varepsilon_n}\right|_{\substack{\varepsilon_1=0\\ \cdots\\ \varepsilon_n=0}} = \int\limits_X f_L(x) \sum_{\substack{i_1 \ldots i_k\\ j_1 \ldots j_m\\ k+m=n}} (-1)^k \varphi^{(k)}(x;\ h_{i_1}, \ldots$$

$$\ldots, h_{i_k}) \prod_{l=1}^m (B^{-1/2}h_{j_l}, B^{-1/2}x)\,\mu(dx).$$

)тсюда видно, что $T_\Gamma(\varphi)$ непрерывен в метрике S_n и обобщенная)ункция $T_\Gamma(x)$ имеет представление S_n через обычную функцию.

В. Для поверхностного интеграла на поверхности коразмерности вида

$$T_\Gamma(\varphi^{(m)}(x;\ e_1 \ldots e_m)) = \int\limits_\Gamma \varphi^{(m)}(x;\ e_1 \ldots e_m)\,\mu^\Gamma(dx),$$

как и в примере Б, будем иметь представление

$$T_{\Gamma}(\varphi^{(m)}(x; e_1 \dots e_m)) = \int_X f_L(x) \Sigma (-1)^k \varphi^{(m+k)}(x; e_1 \dots e_m, h_{i_1}, \dots,$$

$$\dots, h_{i_k}) (B^{-1/2} h_{j_1}, B^{-1/2} X) \dots (B^{-1/2} h_{j_l}, B^{-1/2} X) \mu (dx),$$

которое будет непрерывным линейным функционалом в S_{m+n}.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность А. В. Скороходу за постановку задачи и полезные советы.

Список литературы: 1. *Гаджиев В. Г.* О преобразованиях Фурье дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве. — «ДАН АзССР», 1970, 26, № 2, с. 3—8. 2. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1975. 3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. — «Обобщенные функции», 1958, вып. 2, с. 1—37. 4. *Гаджиев В. Г.* Интегралы по поверхности коразмерности *n* в гильбертовом пространстве. — В сб.: Вопросы статистики и управления случайными процессами. Киев, ИМ, 1973, с. 49—57.

B. G. Gadjiev

ON SOME CLASS OF GENERALIZED FUNCTIONS DETERMINED ON HILBERT SPACES WITH GAUSSIAN MEASURE

The space of test functions as intersection of spaces of functions possessing on generalized derivatives in directions of possible shifts of gaussian measure determined on Hilbert space is built.

It is shown that the functionals determined by surface integrals are generalized functions.

Поступила в редколлегию 24.11 1976

УДК 519.21

С. С. ДАВИДОВИЧ, инж., А. В. ИВАНОВ, канд. физ.-мат. наук,
Институт кибернетики АН УССР

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО ИНТЕГРАЛА

1. Рассмотрим локально интегрируемые вещественные вектор-функцию $s(t) = (s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t))$, $t \in [0, \infty)$ и стационарный случайный процесс $\varepsilon(t)$, $t \in (-\infty, \infty) = E_1$. Обозначим

$$s_T^j(\lambda) = \int_0^T s_j(t) e^{i\lambda t} dt, \quad j = \overline{1, N}; \quad \varepsilon_T(\lambda) = \int_0^T \varepsilon(t) e^{i\lambda t} dt;$$

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} |\varepsilon_T(\lambda)|^2;$$

$A_T(\Phi)$ — вектор с координатами

$$A_T^j(\Phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T^j(\lambda)} \Phi(\lambda) d\lambda, \quad j = \overline{1, N},$$