как и в примере Б, будем иметь представление

$$T_\Gamma(\varphi^{(m)}(x; e_1 \dots e_m)) = \int\limits_X f_L(x) \Sigma (-1)^k \varphi^{(m+k)}(x; e_1 \dots e_m, h_{i_1}, \dots,$$

$$\dots, h_{i_k}) (B^{-1/2} h_{j_1}, B^{-1/2} X) \dots (B^{-1/2} h_{j_l}, B^{-1/2} X) \mu(dx),$$

которое будет непрерывным линейным функционалом в S_{m+n}.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность А. В. Скороходу за постановку задачи и полезные советы.

Список литературы: 1. *Гаджиев В. Г.* О преобразованиях Фурье дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве. — «ДАН АзССР», 1970, 26, № 2, с. 3—8. 2. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1975. 3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. — «Обобщенные функции», 1958, вып. 2, с. 1—37. 4. *Гаджиев В. Г.* Интегралы по поверхности коразмерности n в гильбертовом пространстве. — В сб.: Вопросы статистики и управления случайными процессами. Киев, ИМ, 1973, с. 49—57.

B. G. Gadjiev

ON SOME CLASS OF GENERALIZED FUNCTIONS DETERMINED ON HILBERT SPACES WITH GAUSSIAN MEASURE

The space of test functions as intersection of spaces of functions possessing on generalized derivatives in directions of possible shifts of gaussian measure determined on Hilbert space is built.

It is shown that the functionals determined by surface integrals are generalized functions.

Поступила в редколлегию 24.11 1976

УДК 519.21

С. С. ДАВИДОВИЧ, инж., А. В. ИВАНОВ, канд. физ.-мат. наук,
Институт кибернетики АН УССР

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО ИНТЕГРАЛА

1. Рассмотрим локально интегрируемые вещественные вектор-функцию $s(t) = (s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t))$, $t \in [0, \infty)$ и стационарный случайный процесс $\varepsilon(t)$, $t \in (-\infty, \infty) = E_1$. Обозначим

$$s_T^j(\lambda) = \int\limits_0^T s_j(t) e^{i\lambda t} dt, \; j = \overline{1, N}; \; \varepsilon_T(\lambda) = \int\limits_0^T \varepsilon(t) e^{i\lambda t} dt;$$

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} |\varepsilon_T(\lambda)|^2;$$

$A_T(\Phi)$ — вектор с координатами

$$A_T^j(\Phi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T^j(\lambda)} \Phi(\lambda) d\lambda, \; j = \overline{1, N},$$

$\Phi(\lambda)$, $\lambda \in E_1$, — некоторая весовая функция; D_T — диагональная матрица с элементами $d_T^j = \left[\int\limits_0^T s_j^2(t)\,dt\right]^{\frac{1}{2}} = \| s_j(t) \|_T$ на диагонали.

В предлагаемой статье при определенных ограничениях на процесс $\varepsilon(t)$ и на функции $s(t)$ и $\Phi(\lambda)$ доказана теорема о предельном поведении корреляционной матрицы $\sigma_T(\Phi)$ вектора

$$D_T^{-1} A_T(\Phi) = D_T^{-1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda)}\, \Phi(\lambda)\, d\lambda,$$

$$s_T(\lambda) = (s_T^1(\lambda), s_T^2(\lambda), \ldots, s_T^N(\lambda))$$

и теорема об асимптотической нормальности этого же вектора. Подобные утверждения могут быть использованы для изучения асимптотических свойств введенного в работе [1] класса оценок параметра тренда стационарного процесса.

2. *Предположение 1.* $\varepsilon(t)$, $t \in E_1$ — строго стационарный непрерывный в среднем квадратичном измеримый случайный процесс, для которого выполнено условие Ю. А. Розанова ([2], с. 263).

Предположение 1 обеспечивает существование у $\varepsilon(t)$ непрерывной и ограниченной спектральной плотности $f(\lambda)$ [5].

Предположение 2. $\| s_j(t) \|_T = O(T^{\frac{\alpha_j}{2}})$, $\alpha_j \geqslant 1$, функции $s_j(t)$ — дифференцируемы и

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\| s_j'(t) \|_T}{\| s_j(t) \|_T} \leqslant c_j < \infty, \quad j = \overline{1, N}.$$

Предположение 3. Функция $s(t)$ обладает спектральной мерой

$$H^*(d\lambda) = \{H_{jk}(d\lambda)\}_{j,k=1}^N$$

(определение спектральной меры см., например, в работе [3]).

Предположение 4. Начиная с некоторого $T > 0$

$$\sup_{t\in[0,T]} | s_j(t) | \leqslant \tilde{c}_j T^{-\frac{1}{2}} \| s_j(t) \|_T, \quad j = \overline{1, N}.$$

Предположение 5. $\Phi(\lambda)$, $\lambda \in E_1$ — непрерывная ограниченная дифференцируемая функция, причем $\Phi'(\lambda) \in \mathrm{Lip}\,\beta$ на E_1 при некотором $\beta \in (0, 1]$.

Предположение 6. Матрица

$$\sigma(\Phi) = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, \Phi^2(\lambda)\, H^*(d\lambda) > 0. \tag{1}$$

3. **Теорема 1.** Если процесс $\varepsilon(t)$ обладает непрерывной и ограниченной спектральной плотностью $f(\lambda)$ и выполнены предположения 2 — 5, то $\lim\limits_{T\to\infty} \sigma_T(\Phi) = \sigma(\Phi)$.

Доказательство. Для удобства в дальнейшем будем считать, что выполняется условие

$$\lim_{\eta\to 1} \sup_{\lambda\in E_1} |\Phi(\eta\lambda) - \Phi(\lambda)| = 0. \tag{2}$$

Это избавит нас от необходимости рассматривать в качестве аппроксимирующих функцию $\Phi(\lambda)$ элементы из пространств целых функций экспоненциального типа $B_{\sigma-0}$ ([4], § 99). Тем не менее результат теоремы остается справедливым и без (2).

В силу предположения 5 для любого $\sigma_T > 0$ существует функция $\Phi_{\sigma_T}(\lambda) \in B_{\sigma_T}$ ([4], § 105) такая, что

$$\sup_{\lambda\in E_1} |\Phi(\lambda) - \Phi_{\sigma_T}(\lambda)| \leqslant \frac{c}{\sigma_T^{1+\beta}}. \tag{3}$$

Из теоремы Пэли—Винера ([4], § 83) следует, что функция $\Phi_{\sigma_T}(\lambda)$ имеет вид

$$\Phi_{\sigma_T}(\lambda) = \Phi_{\sigma_T}(0) + \lambda \int_{-\sigma_T}^{\sigma_T} e^{-i\lambda t}\Psi_T(t)\,dt, \tag{4}$$

$$\Psi_T(t) \in L_2[-\sigma_T, \sigma_T].$$

Заметим, что функция $\Phi_{\sigma_T}(\lambda)$, $\lambda \in E_1$ может быть выбрана вещественнозначной. Если сначала это не так, то функция

$$\Phi^*_{\sigma_T}(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\Phi_{\sigma_T}(\lambda) + \overline{\Phi_{\sigma_T}(\lambda)}\right)$$

вещественна, удовлетворяет (3) и является элементом B_{σ_T}, поскольку из (4) следует представление

$$\Phi^*_{\sigma_T}(\lambda) = \Phi^*_{\sigma_T}(0) + \lambda \int_{-\sigma_T}^{\sigma_T} e^{-i\lambda t}\Psi^*_T(t)\,dt,$$

$$\Psi^*_T(t) = \frac{1}{2}\left(\Psi_T(t) + \overline{\Psi_T(-t)}\right) \in L_2(-\sigma_T, \sigma_T).$$

Рассмотрим в записи

$$A^j_T(\Phi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_T(\lambda)\,\overline{s^j_T(\lambda)}\,\Phi_{\sigma_T}(\lambda)\,d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_T(\lambda)\,\overline{s^j_T(\lambda)}\,(\Phi(\lambda) - \Phi_{\sigma_T}(\lambda))\,d\lambda = A^j_{T,1} + A^j_{T,2}$$

торое слагаемое. Находим

$$\frac{1}{T^{\frac{\alpha_j}{2}}} | A^j_{T,2} | \leqslant \frac{c}{2\pi T^{\frac{\alpha_j}{2}} \sigma^{1+\beta}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} | \varepsilon_T(\lambda) s^j_T(\lambda) | d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \frac{cT^{\frac{1}{2}}}{\sigma^{1+\beta}} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} I^{\varepsilon}_T(\lambda) d\lambda \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{T^{\frac{\alpha_j}{2}}} \| s_j(t) \|_T.$$

начит, $\mathbf{M}\frac{1}{T^{\alpha_j}} | A^j_{T,2} |^2 \underset{T\to\infty}{\to} 0, \quad j = \overline{1, N}$, если

$$\frac{T^{\frac{1}{2}}}{\sigma_T^{1+\beta}} \underset{T\to\infty}{\to} 0. \tag{5}$$

Если (5) выполнено, то в дальнейшем в изучении нуждается ишь $A_{T,1}$.

Продолжим функции $s_j(t)$, $t \in [0, \infty)$, $j = \overline{1, N}$ на $(-\infty, 0)$, так тобы продолжения $s_j(t)$, $t \in E_1$ были дифференцируемы, $s_j(-\infty) = s'_j(-\infty) = 0$; $s_j(t)$, $s'_j(t) \in L_2(-\infty, 0)$, $j = \overline{1, N}$. Продолженные аким образом функции $s_j(t)$ обозначим $\tilde{s}_j(t)$ и положим $\tilde{s}^j_T(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{T} \tilde{s}_j(t) e^{i\lambda t} dt$.

Рассмотрим

$$A^j_{T,1} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_T(\lambda) (\overline{s^j_T(\lambda)} - \overline{\tilde{s}^j_T(\lambda)}) \Phi_{\sigma_T}(\lambda) d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_T(\lambda) \overline{\tilde{s}^j_T(\lambda)} \Phi_{\sigma_T}(\lambda) d\lambda = A^j_{T,3} + A^j_{T,4}, \ j = \overline{1, N}.$$

оспользовавшись представлением (4), найдем $-A^j_{T,3} = A^j_{T,5} + A^j_{T,6}$, де

$$A^j_{T,5} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_T(\lambda) \overline{\tilde{s}^j_0(\lambda)} d\lambda \Phi_{\sigma_T}(0) = 0$$

очти наверное (п. н.),

$$A^j_{T,6} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_T(\lambda) \overline{\tilde{s}^j_0(\lambda)} \lambda \int\limits_{-\sigma_T}^{\sigma_T} e^{-i\lambda t} \Psi_T(t) dt d\lambda,$$

$$\tilde{s}_0^j(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} \tilde{s}_j(t)\, e^{i\lambda t} dt.$$

Легко найти, что

$$A_{T,6}^j = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_T(\lambda) \left(\tilde{s}_j(0) - \int_{-\infty}^{0} \tilde{s}_j'(t)\, e^{-i\lambda t} dt \right) \int_{-\sigma_T}^{\sigma_T} e^{-i\lambda t} \Psi_T(t)\, dt d\lambda =$$

$$= A_{T,7}^j - A_{T,8}^j;$$

$$\frac{1}{T^{\frac{\alpha_j}{2}}} |A_{T,7}^j| = |\tilde{s}_j(0)| \frac{1}{T^{\frac{\alpha_j}{2}}} \left| \int_{0}^{\sigma_T} \varepsilon(t)\, \Psi_T(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{T^{\frac{\alpha_j - 1}{2}}} |\tilde{s}_j(0)| \left[\frac{1}{T} \int_{0}^{\sigma_T} \varepsilon^2(t)\, dt \int_{0}^{\sigma_T} |\Psi_T(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \text{ п. н.}$$

Оценим

$$I_{\sigma_T} = \int_{-\sigma_T}^{\sigma_T} |\Psi_T(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Phi_{\sigma_T}(\lambda) - \Phi_{\sigma_T}(0)}{\lambda} \right]^2 d\lambda =$$

$$= \left(\int_{-\sigma_T^{-1}}^{\sigma_T^{-1}} + \int_{E_1 \setminus \left[-\frac{1}{\sigma_T}, \frac{1}{\sigma_T} \right]} \right) \left[\frac{\Phi_{\sigma_T}(\lambda) - \Phi_{\sigma_T}(0)}{\lambda} \right]^2 d\lambda = I_{\sigma_T}^{(1)} + I_{\sigma_T}^{(2)}.$$

Используя неравенство С. Н. Бернштейна ([4], § 83), находим

$$I_{\sigma_T}^{(1)} \leqslant \frac{2}{\sigma_T} \sup_{\lambda \in E_1} |\Phi_{\sigma_T}'(\lambda)|^2 \leqslant 2\sigma_T \sup_{\lambda \in E_1} |\Phi_{\sigma_T}(\lambda)|^2 = O(\sigma_T).$$

С другой стороны,

$$I_{\sigma_T}^{(2)} \leqslant 2 \sup_{\lambda \in E_1} |\Phi_{\sigma_T}(\lambda)|^2 \int_{E_1 \setminus \left[-\frac{1}{\sigma_T}, \frac{1}{\sigma_T} \right]} \frac{d\lambda}{\lambda^2} = O(\sigma_T).$$

Таким образом, $I_{\sigma_T} = O(\sigma_T)$ и $\mathbf{M} \frac{1}{T^{\alpha_j}} |A_{T,7}^j|^2 \underset{T \to \infty}{\to} 0$, если только

$$\frac{\sigma_T^2}{T} \underset{T \to \infty}{\to} 0. \tag{6}$$

Если положить, например, $\sigma_T = \dfrac{T^{\frac{1}{2}}}{\log T}$, то соотношения (5) и (6) выполнятся одновременно.

Заметим далее, что п. н.

$$A^j_{T,8} = \int_0^T \varepsilon(\tau)\,\overline{\rho^T_j(\tau)}\,d\tau,\quad \rho^T_j(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}'_j(t)\,\Psi_T(\tau - t)\,dt,$$

если положить $\tilde{s}'_j(t) = 0,\ t > 0;\ \Psi_T(t) = 0,\ t \notin [-\sigma_T, \sigma_T]$. Но

$$\mathbf{M}\frac{1}{T^{\alpha_j}}|A^j_{T,8}|^2 = \frac{1}{T^{\alpha_j}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\left|\int_0^T e^{i\lambda\tau}\overline{\rho^T_j(\tau)}\,d\tau\right|^2 d\lambda;$$

$$\int_0^T e^{i\lambda\tau}\overline{\rho^T_j(\tau)}\,d\tau = \int_{-\infty}^{0} \tilde{s}'_j(t)\,e^{i\lambda t}\int_{-t}^{T-t} \Psi_T(\tau)\,e^{i\lambda\tau}d\tau dt =$$

$$= \int_{-\sigma_T}^{0} \tilde{s}'_j(t)\,e^{i\lambda t}\int_{-t}^{\sigma_T} \Psi_T(\tau)\,e^{i\lambda\tau}d\tau dt.$$

Поэтому

$$\mathbf{M}\frac{1}{T^{\alpha_j}}|A^j_{T,8}|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{0} |\tilde{s}'_j(t)|^2\,dt\cdot\frac{1}{T^{\alpha_j}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\int_{-\sigma_T}^{0}\left|\int_{-t}^{\sigma_T} \Psi_T(\tau)\,e^{i\lambda\tau}d\tau\right|^2 \times$$

$$\times\,dtd\lambda \leqslant \frac{2\pi}{T^{\alpha_j}}\sup_{\lambda\in E_1}|f(\lambda)|\int_{-\infty}^{0}|\tilde{s}'_j(t)|^2\,dt\int_{-\sigma_T}^{0}\left|\int_{-t}^{\sigma_T}|\Psi_T(\tau)|^2\,d\tau dt\right. =$$

$$= O\left(\frac{\sigma_T^2}{T^{\alpha_j}}\right)\underset{T\to\infty}{\to} 0,$$

если выполняется (6).

Таким образом, вместо величины $A^j_{T,1}$ можно в дальнейшем рассматривать величину

$$A^j_{T,4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_T(\lambda)\overline{\tilde{s}^j_T(\lambda)}\,\Phi_{\sigma_T}(\lambda)\,d\lambda.$$

Как и выше, используя (4), находим

$$A^j_{T,4} = A^j_{T,9} + A^j_{T,10} - A^j_{T,11}\ \text{п. н.,}$$

$$A^j_{T,9} = \int_0^T \varepsilon(t)\,\tilde{s}_j(t)\,dt\cdot\Phi_{\sigma_T}(0);$$

$$A^j_{T,11}=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_T(\lambda)\int_{-\infty}^{T}\tilde{s}'_j(t)\,e^{-i\lambda t}dt\int_{-\sigma_T}^{\sigma_T}\Psi_T(\lambda)\,e^{-i\lambda t}dtd\lambda.$$

Аналогично случаю $A^j_{T,7}$ можно показать, что $\mathbf{M}\frac{1}{T^{\alpha_j}}|A^j_{T,10}|^2=$ $=O\left(\frac{\sigma_T^2}{T^{\alpha_j}}\right)\xrightarrow[T\to\infty]{}0$ при выполнении (6). С другой стороны, $A^j_{T,11}=$ $=i\int_0^T\varepsilon(\tau)\,\overline{r^T_j}(\tau)\,d\tau$ п. н., где $r^T_j(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{s}'_j(t)\,\overline{\Psi_T(\tau-t)}\,dt$, $\tilde{s}'_j(t)=0$, $t>T$; $\Psi_T(t)=0$, $t\notin[-\sigma_T,\sigma_T]$.

Обозначим $A^j_{T,12}=\int_{-\infty}^{0}\varepsilon(\tau)\,\overline{r^T_j}(\tau)d\tau$ и покажем, что $\mathbf{M}\frac{1}{T^{\alpha_j}}|A^j_{T,12}|^2\xrightarrow[T\to\infty]{}$ $\xrightarrow[T\to\infty]{}0$. Имеем

$$\mathbf{M}\frac{1}{T^{\alpha_j}}|A^j_{T,12}|^2=\frac{1}{T^{\alpha_j}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\int_{-\sigma_T}^{\sigma_T}\tilde{s}'_j(t)\,e^{i\lambda t}\int_{-\sigma_T}^{-t}e^{i\lambda t}\Psi_T(\tau)\,d\tau dtd\lambda+$$

$$+\frac{1}{T^{\alpha_j}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\int_{-\infty}^{-\sigma_T}\tilde{s}'_j(t)\,e^{i\lambda t}dt\int_{-\sigma_T}^{\sigma_T}e^{i\lambda\tau}\Psi_T(\tau)\,d\tau d\lambda=\alpha^{(j)}_{1T}+\alpha^{(j)}_{2T};$$

$$|\alpha^{(j)}_{2T}|^2\leqslant\frac{\sup f^2(\lambda)}{T^{2\alpha_j}}\int_{-\infty}^{-\sigma_T}|\tilde{s}'_j(t)|^2\,dt\int_{-\sigma_T}^{\sigma_T}|\Psi_T(t)|^2\,dt=O\left(\frac{\sigma_T}{T^{2\alpha_j}}\right);$$

$$|\alpha^j_{1T}|\leqslant\frac{1}{2T^{\alpha_j}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\left[\int_{-\sigma_T}^{\sigma_T}|\tilde{s}'_j(t)|^2dt+\int_{-\sigma_T}^{\sigma_T}\left|\int_{-\sigma_T}^{-t}e^{i\lambda\tau}\Psi_T(\tau)\,d\tau\right|^2dt\right]d\lambda\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2T^{\alpha_j}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\,d\lambda\left(\int_{-\sigma_T}^{\sigma_T}|\tilde{s}'_j(t)|^2dt+\int_{-\sigma_T}^{\sigma_T}\int_{-\sigma_T}^{-t}|\Psi_T(\tau)|^2d\tau dt\right)=$$

$$=O\left(\frac{\sigma_T^2}{T^{\alpha_j}}\right)\xrightarrow[T\to\infty]{}0,$$

ıи справедливо (6). Легко также убедиться в том, что $\mathbf{M}\frac{1}{T^{\alpha_j}}\times$
$|A^j_{T,13}|^2 \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$, где $A^j_{T,13}=\int\limits_{-\infty}^{0}\varepsilon(t)\tilde{s}_i(t)\,dt\cdot\Phi_{\sigma_T}(0)$.

Таким образом, вместо $A^j_{T,4}$ в дальнейшем можно рассматривать ıичину

$$,_{14}=A^j_{T,9}+A^j_{T,13}-A^j_{T,11}-A^j_{T,12}=\int\limits_{-\infty}^{T}\varepsilon(\tau)\,[\tilde{s}_j(\tau)\,\Phi_{\sigma_T}(0)-i\overline{r^T_j(\tau)}]d\tau,$$

:кольку наши предыдущие рассуждения показывают, что при вы-ıнении (5) и (6)

$$\mathbf{M}\frac{1}{T^{\alpha_j}}|A^j_{T,1}-A^j_{T,14}|^2\xrightarrow[T\to\infty]{}0.$$

Рассмотрим

$$,k) = \mathbf{M}\frac{A^j_{T,14}\overline{A^k_{T,14}}}{d^j_T d^k_T}=\frac{1}{d^j_T d^k_T}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\left[\tilde{s}^j_T(\lambda)\,\Phi_{\sigma_T}(0)-i\int\limits_{-\infty}^{T}\overline{r^T_j(\tau)}e^{i\lambda\tau}d\tau\right]\times$$

$$\times\left[\overline{\tilde{s}^k_T(\lambda)}\,\Phi_{\sigma_T}(0)+i\int\limits_{-\infty}^{T}r^T_k(\tau)\,e^{-i\lambda\tau}d\tau\right]d\lambda. \qquad (7)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{T}\overline{r^T_j(\tau)}\,e^{i\lambda\tau}d\tau=\int\limits_{-\infty}^{T}\tilde{s}'_j(t)\,e^{i\lambda t}\int\limits_{-\infty}^{T-t}\Psi_T(\tau)\,e^{i\lambda\tau}d\tau dt=$$

$$=\int\limits_{-\sigma_T}^{\sigma_T}\Psi_T(\tau)\,e^{i\lambda\tau}d\tau\int\limits_{-\infty}^{T-\sigma_T}\tilde{s}'_j(t)\,e^{i\lambda t}dt+$$

$$+\int\limits_{T-\sigma_T}^{T}\tilde{s}'_j(t)\,e^{i\lambda t}\int\limits_{-\sigma_T}^{T-t}\Psi_T(\tau)\,e^{i\lambda\tau}d\tau dt=\beta^{(j)}_{1T}+\beta^{(j)}_{2T}.$$

далее,

$$\frac{1}{T^{\alpha_j}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\,|\beta^{(j)}_{2T}|\,d\lambda\leqslant\frac{1}{2T^{\alpha_j}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\,d\lambda\int\limits_{-\sigma_T}^{T}|\tilde{s}'_j(t)|^2dt+$$

$$+\frac{1}{2}\sup_{\lambda\in E_1}f(\lambda)\cdot\frac{1}{T^{\alpha_j}}\int\limits_{T-\sigma_T}^{T}\int\limits_{-\sigma_T}^{T-t}|\Psi(\tau)|^2\,d\tau dt. \qquad (8)$$

:рвое слагаемое правой части (8) при $T\to\infty$ стремится к нулю, ›рое суть $O\left(\frac{\sigma_T^2}{T^{\alpha_j}}\right)$.

С другой стороны,

$$\int\limits_{-\infty}^{T-\sigma_T} \tilde{s}_j'(t)\, e^{i\lambda t} dt = \tilde{s}_j(T-\sigma_T)\, e^{i\lambda(T-\sigma_T)} - i\lambda \int\limits_{-\infty}^{T-\sigma_T} \tilde{s}_j(t)\, e^{i\lambda t} dt;$$

$$\frac{1}{T^{\alpha_j}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \left| \int\limits_{-\sigma_T}^{\sigma_T} \Psi_T(\tau)\, e^{i\lambda\tau} d\tau \tilde{s}_j(T-\sigma_T)\, e^{i\lambda(T-\sigma_T)} \right| d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{T^{\alpha_j}} \sup_{t\in[0,T]} |s_j(t)| \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \left| \int\limits_{-\sigma_T}^{\sigma_T} \Psi_T(\tau)\, e^{i\lambda\tau} d\tau \right|^2 d\lambda \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{T^{\alpha_j}} \sup_{t\in[0,T]} |s_j(t)| \sup_{\lambda\in E_1} f^{\frac{1}{2}}(\lambda) \left[\int\limits_{-\sigma_T}^{\sigma_T} |\Psi(\tau)|^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} = O\left(\frac{\sigma_T^{\frac{1}{2}}}{T^{\frac{\alpha_j+1}{2}}} \right),$$

в силу предположения (4).

Таким образом, возвращаясь к записи (7), находим

$$\lim_{T\to\infty} \Delta_T^{(j,k)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{d_T^j d_T^k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \left[\tilde{s}_T^j(\lambda)\, \Phi_{\sigma_T}(0) - \tilde{s}_{T-\sigma_T}^j(\lambda) \lambda \int\limits_{-\sigma_T}^{\sigma_T} \Psi_T(t)\, e^{i\lambda t} dt \right] \times$$

$$\times \left[\overline{\tilde{s}_T^k(\lambda)}\, \Phi_{\sigma_T}(0) - \overline{\tilde{s}_{T-\sigma_T}^k(\lambda)}\, \lambda \int\limits_{-\sigma_T}^{\sigma_T} \overline{\Psi_T(t)}\, e^{-i\lambda t} dt \right] d\lambda =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{d_T^j d_T^k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \left[\overline{\tilde{s}_T^j(\lambda)}\, \Phi_{\sigma_T}(0) + \overline{\tilde{s}_{T-\sigma_T}^j(\lambda)}\, \lambda \int\limits_{-\sigma_T}^{\sigma_T} \Psi_T(t)\, e^{-i\lambda t} dt \right] \times$$

$$\times \left[\tilde{s}_T^k(\lambda)\, \Phi_{\sigma_T}(0) - \tilde{s}_{T-\sigma_T}^k(\lambda)\, \lambda \int\limits_{-\sigma_T}^{\sigma_T} \overline{\Psi_T(t)}\, e^{i\lambda t} dt \right] d\lambda.$$

Поскольку $\Phi_{\sigma_T}(\lambda)$, $\lambda \in E_1$ — вещественная функция, из (4) следует вещественность при $\lambda \in E_1$ интеграла $\int\limits_{-\sigma_T}^{\sigma_T} \Psi_T(t)\, e^{-i\lambda t} dt$. Поэтому

$$\lim_{T\to\infty} \Delta_T^{(j,k)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{d_T^j d_T^k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, \tilde{s}_{T-\sigma_T}^k(\lambda)\, \overline{\tilde{s}_{T-\sigma_T}^j(\lambda)}\, \Phi_{\sigma_T}^2(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, \Phi^2(\lambda)\, H_{kj}(d\lambda) = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, \Phi^2(\lambda)\, H_{jk}(d\lambda).$$

Теорема доказана.

4. **Теорема 2.** Если выполнены предположения 1—6, то вектор $D_T^{-1}A_T(\Phi)$ распределен асимптотически нормально $N(0, \sigma(\Phi))$.

Доказательство. Для любого натурального $r > 0$ найдем вещественную функцию $\Phi_m(\lambda) \in B_m$, $m = m(r)$ такую, что $\sup_{\lambda \in E_1} |\Phi(\lambda) - \Phi_m(\lambda)| < \frac{1}{r}$.

Пусть $T_n(\Phi_m; \lambda) = \sum_{q=-n}^{n} C_q^{(n)} e^{iq\frac{m}{n}\lambda}$, $n \geqslant 1$, — последовательность полиномов Левитана, отвечающая функции $\Phi_m(\lambda)$ ([4], § 85). Тогда

$$A_T(\Phi) = A_T(\Phi - \Phi_m) + A_T(\Phi_m - T_n) + A_T(T_n). \qquad (9)$$

При фиксированных m и n

$$\sigma_T(\Phi - \Phi_m) \xrightarrow[T\to\infty]{} \sigma(\Phi - \Phi_m);$$

$$\sigma_T(\Phi_m - T_n) \xrightarrow[T\to\infty]{} \sigma(\Phi_m - T_n);$$

$$\sigma_T(T_n) \xrightarrow[T\to\infty]{} \sigma(T_n),$$

причем благодаря предположению 6 числа r и m можно выбрать так, что, начиная с некоторого n, матрица $\sigma(T_n) > 0$.

Рассмотрим вектор $A_T(T_n)$ с координатами

$$A_T^j(T_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_T(\lambda)\,\overline{s_T^j(\lambda)}\,T_n(\Phi_m; \lambda)\,d\lambda =$$

$$= \sum_{q=-n}^{n} \frac{C_q^{(n)}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_T(\lambda)\,\overline{s_T^j(\lambda)}\,e^{iq\frac{m}{n}\lambda}\,d\lambda =$$

$$= \sum_{q=-n}^{n} C_q^{(n)} \int_0^{T-q\frac{m}{n}} \varepsilon(t)\,s_j\left(t + q\frac{m}{n}\right)dt =$$

$$= \int_0^T \varepsilon(t) \sum_{q=-n}^{n} C_q^{(n)} s_j\left(t + q\frac{m}{n}\right)dt - \sum_{q=-n}^{n} C_q^{(n)} \int_{T-q\frac{m}{n}}^{T} \varepsilon(t) s_j\left(t + q\frac{m}{n}\right)dt =$$

$$= A_{T,1}^j(T_n) - A_{T,2}^j(T_n) \text{ п. н.}$$

Ясно, что при изучении поведения вектора $D_T^{-1}A_T(T_n)$ достаточно ограничиться лишь вектором $D_T^{-1}A_{T,1}(T_n)$. Но последний имеет асимптотически нормальное распределение $N(0, \sigma(T_n))$, если

$\sigma(T_n)>0$. Это следует из ЦПТ, установленной в работе [5], так как выполнение условий ЦПТ гарантируется нашими предположениями. Пусть $\mu=(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N)\neq 0$ — произвольный вектор из E_N и

$$(\sigma(\Phi_m - T_n)\mu, \mu) \leqslant \varepsilon_n^3 \|\mu\|^2; \qquad (\sigma(\Phi-\Phi_m)\mu, \mu) \leqslant \delta_m^3 \|\mu\|^2,$$

причем последовательности положительных чисел $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\delta_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. По неравенству Чебышева

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} P\{|(D_T^{-1}A_T(\Phi-\Phi_m), \mu)| \geqslant \delta_m\} \leqslant \frac{(\sigma(\Phi-\Phi_m)\mu, \mu)}{\delta_m^2} \leqslant \delta_m \|\mu\|^2; \tag{10}$$

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} P\{|(D_T^{-1}A_T(\Phi_m-T_n), \mu)| \geqslant \varepsilon_n\} \leqslant \frac{(\sigma(\Phi_m-T_n)\mu, \mu)}{\varepsilon_n^2} \leqslant \varepsilon_n \|\mu\|^2. \tag{11}$$

Заметим теперь, что для произвольного $x\in E_1$

$$P\{(D_T^{-1}A_T(\Phi), \mu) < x\} \leqslant P\{(D_T^{-1}A_T(T_n), \mu) < x+\varepsilon_n+\delta_m\} + \\ + P\{(D_T^{-1}A_T(\Phi-T_n), \mu) \leqslant -(\delta_m+\varepsilon_n)\}; \tag{12}$$

$$P\{(D_T^{-1}A_T(T_n), \mu) < x-(\varepsilon_n+\delta_m)\} \leqslant P\{(D_T^{-1}A_T(\Phi), \mu) < x\} + \\ + P\{(D_T^{-1}A_T(\Phi-T_n), \mu) \geqslant \delta_m+\varepsilon_n\}. \tag{13}$$

С учетом (10), (11) и ЦПТ неравенства (12) и (13) приводят к соотношениям

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} P\{(D_T^{-1}A_T(\Phi), \mu) < x\} \leqslant R(x+\delta_m+\varepsilon_n;\ (\sigma(T_n)\mu, \mu)) + \\ + (\delta_m+\varepsilon_n)\|\mu\|^2; \tag{14}$$

$$\underline{\lim_{T\to\infty}} P\{(D_T^{-1}A_T(\Phi), \mu) < x\} \geqslant R(x-(\delta_m+\varepsilon_n);\ (\sigma(T_n)\mu, \mu)) - \\ - (\delta_m+\varepsilon_n)\|\mu\|^2, \tag{15}$$

$$\text{где } R(y, \rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{\tau^2}{2\rho}}\, d\tau.$$

Поскольку $\sigma(T_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma(\Phi_m)$ и $\sigma(\Phi_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} \sigma(\Phi)$, то, переходя к пределу в правых частях (14) и (15) сначала по n, а затем по m, находим

$$\lim_{T\to\infty} P\{(D_T^{-1}A_T(\Phi), \mu) < x\} = R(x;\ (\sigma(\Phi)\mu, \mu)),$$

что и доказывает теорему.

Список литературы: 1. *Давидович С. С., Иванов А. В.* Об оценивании тренда стационарного процесса. — ДАН УССР. Серия А, 1977, №9. 2. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы. М., Физматгиз, 1963. 3. *Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А.* Гауссовские случайные процессы. М., «Наука», 1970. 4. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М., «Наука», 1965. 5. *Холево А. С.* Об асимптотической нормальности оценок коэффициентов регрессии. — «Теория вероятностей и ее применения», 1971, **16**, 4, с. 724—728.

S. S. Davidovich, A. V. Ivanov

ON ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOME INTEGRAL

The theorems about the limit behaviour of the correlation matrix and asymptotic normality of some integral are obtained.

Поступила в редколлегию 6.09 1976.

УДК 519.21

Ю. Л. ДАЛЕЦКИЙ, д-р физ.-мат. наук, С. И. ПАРАМОНОВА, канд. физ.-мат. наук, Киевский политехнический институт

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ ПО МЕРАМ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. 2

В этой работе результаты [1] применяются к целочисленным случайным мерам с пуассоновским распределением. Для таких случайных величин приводится формула интегрирования по частям, аналогичная гауссовской, но с заменой дифференциального оператора разностным (в частности, см. [2]). Этот результат применяется для оценки расширенных стохастических интегралов по пуассоновской мере (такие интегралы введены в работе [3, 4]).

Пусть $(\mathfrak{T}, \mathfrak{A})$—измеримое пространство с алгеброй подмножеств $\mathfrak{A}$. Рассмотрим линейное пространство X, состоящее из аддитивных вещественных функций множеств на $\mathfrak{A}$. В качестве двойственного пространства X' будем рассматривать совокупность $\mathfrak{A}$-измеримых конечнозначных функций на $\mathfrak{T}$. При этом соотношение двойственности имеет вид

$$\langle \xi, f\rangle = \int\limits_{\mathfrak{T}} f(t)\, \xi(dt) = \sum_{k=1}^{n} f_k \xi(A_k) \qquad (1)$$

при $\xi \in X$; $f(t) = f_k$, $t \in A_k$; $\mathfrak{T} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, $A_k \cap A_j = \varnothing$, $k \neq j$.

Пусть ξ — случайный элемент X, определяемый характеристическим функционалом

$$\chi_\xi(f) = Me^{i\langle \xi, f\rangle} = \int\limits_X e^{i\langle x, f\rangle} \nu(dx),$$

где ν — вероятностная мера на X', представляющая собой распределение ξ.