Список литературы: 1. *Давидович С. С., Иванов А. В.* Об оценивании тренда стационарного процесса. — ДАН УССР. Серия А, 1977, №9. 2. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы. М., Физматгиз, 1963. 3. *Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А.* Гауссовские случайные процессы. М., «Наука», 1970. 4. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М., «Наука», 1965. 5. *Холево А. С.* Об асимптотической нормальности оценок коэффициентов регрессии. — «Теория вероятностей и ее применения», 1971, **16**, 4, с. 724—728.

S. S. Davidovich, A. V. Ivanov

ON ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOME INTEGRAL

The theorems about the limit behaviour of the correlation matrix and asymptotic normality of some integral are obtained.

Поступила в редколлегию 6.09 1976.

УДК 519.21

Ю. Л. ДАЛЕЦКИЙ, д-р физ.-мат. наук, С. И. ПАРАМОНОВА, канд. физ.-мат. наук, Киевский политехнический институт

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ ПО МЕРАМ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. 2

В этой работе результаты [1] применяются к целочисленным случайным мерам с пуассоновским распределением. Для таких случайных величин приводится формула интегрирования по частям, аналогичная гауссовской, но с заменой дифференциального оператора разностным (в частности, см. [2]). Этот результат применяется для оценки расширенных стохастических интегралов по пуассоновской мере (такие интегралы введены в работе [3, 4]).

Пусть $(\mathfrak{T}, \mathfrak{A})$—измеримое пространство с алгеброй подмножеств $\mathfrak{A}$. Рассмотрим линейное пространство X, состоящее из аддитивных вещественных функций множеств на $\mathfrak{A}$. В качестве двойственного пространства X' будем рассматривать совокупность $\mathfrak{A}$-измеримых конечнозначных функций на $\mathfrak{T}$. При этом соотношение двойственности имеет вид

$$\langle \xi, f\rangle = \int\limits_{\mathfrak{T}} f(t)\,\xi(dt) = \sum_{k=1}^{n} f_k \xi(A_k) \tag{1}$$

при $\xi \in X$; $f(t) = f_k$, $t \in A_k$; $\mathfrak{T} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, $A_k \cap A_j = \varnothing$, $k \neq j$.

Пусть ξ — случайный элемент X, определяемый характеристическим функционалом

$$\chi_\xi(f) = Me^{i\langle \xi, f\rangle} = \int\limits_X e^{i\langle x, f\rangle} \nu(dx),$$

где ν — вероятностная мера на X', представляющая собой распределение ξ.

При этом

$$M|\langle\xi, f\rangle|^2 = \sum_{k,j=1}^{n} f_k f_j M\xi(A_k)\xi(A_j) = \iint\limits_{\mathfrak{T}\mathfrak{T}} f(t) f(\tau)\rho(dt, d\tau), \quad (2)$$

где $\rho(A, B) = M\xi(A)\xi(B)$ — корреляционная мера случайной величины ξ и, кроме того,

$$M\langle\xi, f\rangle = \int\limits_{\mathfrak{T}} f(t)\sigma(dt), \quad M\xi(A) = \sigma(A).$$

(Мы предполагаем, что эти моменты существуют).

Рассматривая правую часть (2) как скалярное произведение на X' и пополняя его, получаем пространство $L_2(\mathfrak{T}, \rho)$ с нормой

$$\|f\|_\rho^2 = \iint\limits_{\mathfrak{T}\mathfrak{T}} f(t) f(\tau)\rho(dt, d\tau)$$

и аналогично пространство $L_1(\mathfrak{T}, \sigma)$ с нормой

$$\|f\|_\sigma = \int\limits_{\mathfrak{T}} |f(t)|\sigma(dt).$$

Для $f \in L_1(\mathfrak{T}, \sigma) \cap L_2(\mathfrak{T}, \rho)$ определен стохастический интеграл $\langle\xi, f\rangle = \int\limits_{\mathfrak{T}} f(t)\xi(dt)$, понимаемый как замыкание линейного функционала (1).

С другой стороны, можно рассмотреть центрированную случайную величину $\xi_0 = \xi - \sigma$, для которой $M\xi_0 = 0$, $M\xi_0(A)\xi_0(B) = \rho(A, B) - \sigma(A)\sigma(B) = \rho_0(A, B)$.

Стохастический интеграл $\langle\xi_0, f\rangle = \int\limits_{\mathfrak{T}} f(t)\xi_0(dt)$ определяется на $\mathfrak{H} = L_2(\mathfrak{T}, \rho_0)$, которое, вообще говоря, шире пересечения $L_1(\mathfrak{T}, \sigma) \cap L_2(\mathfrak{T}, \rho)$. При этом и характеристические функционалы $\chi_\xi(f)$, $\chi_{\xi_0}(f)$ расширяются на соответствующие пространства.

Будем рассматривать множество Φ функций на X, представимых в виде $f(x) = \int\limits_{X'} e^{i\langle x, \theta\rangle}\beta(d\theta)$, где $\beta \in \mathfrak{B}(X')$—множеству вещественнозначных аддитивных мер ограниченной вариации на X'.

Рассмотрим псевдодифференциальный оператор с ядром $G(\theta)$

$$G\left(\frac{1}{i} D\right) f(x) = \int\limits_{X'} G(\theta) e^{i\langle x, \theta\rangle}\beta(d\theta)$$

на множестве $\Phi_G \subset \Phi$, определяемом условием $\int\limits_{X'} |G(\theta)|\,\|\beta\|(d\theta) < \infty$.

Пусть $g \in \mathfrak{H}$ и

$$G(\theta) = \frac{\int\limits_X g(x)\, e^{i\langle x, \theta\rangle} \nu(dx)}{\int\limits_X e^{i\langle x, \theta\rangle} \nu(dx)}.$$

При $f \in \Phi_G$ имеет место формула (см. [1, 5])

$$\int\limits_X g(x) f(x) \nu(dx) = \int\limits_X G\left(\frac{1}{i} D\right) f(x) \nu(dx), \tag{3}$$

; в важном частном случае $g(x) = \langle x, \varphi\rangle$

$$G(\theta) = \frac{1}{i} \langle [\ln \chi_\xi(\theta)]', \varphi\rangle. \tag{4}$$

Рассмотрим частный случай, когда ξ принимает независимые значения на непересекающихся множествах $\rho(A, B) = \sigma(A)\sigma(B)$ $(A \cap B = \varnothing)$, $\tilde{\rho}_0(A) = \rho_0(A, A) = M\xi^2(A) - \sigma^2(A)$. Если при этом ξ— лочисленная мера с пуассоновским распределением ν, то $\tilde{\rho}_0 = \sigma(A)$ потому $\mathfrak{H} = L_2(\mathfrak{T}, \sigma)$.

Посмотрим, во что превратятся приведенные выше соотношения. ія пуассоновской случайной величины $\xi(A)$ имеем

$$Me^{it\xi(A)} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{itm} P\{\xi(A) = m\} =$$

$$= e^{-\sigma(A)} \sum_{m=0}^{\infty} e^{itm} \frac{[\sigma(A)]^m}{m!} = e^{(e^{it}-1)\sigma(A)}$$

потому для $f \in X'$

$$\chi_{\xi_0}(f) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} (e^{if_k} - if_k - 1)\, \sigma(A_k)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\int\limits_{\mathfrak{T}} (e^{if(t)} - if(t) - 1)\, \sigma(dt)\right\}.$$

ак как $(e^{if(t)} - if(t) - 1) \in L_1(\mathfrak{T}, \sigma)$ при $f \in \mathfrak{H}$, то это соотношение спространяется на все $f \in \mathfrak{H}$)).

Вычислим теперь псевдодифференциальный оператор $G\left(\frac{1}{i} D\right)$ для ѓнкции $g(x) = \langle x, \varphi\rangle$. Так как

$$\ln \chi_{\xi_0}(\theta) = \int\limits_{\mathfrak{T}} [e^{i\theta(t)} - i\theta(t) - 1]\, \sigma(dt),$$

то

$$G(\theta)=\frac{1}{i}\frac{d}{d\varepsilon}\ln\chi_{\xi_0}(\theta+\varepsilon\varphi)\,|_{\varepsilon=0}=\int_{\mathfrak{T}}(e^{i\theta(t)}-1)\,\varphi(t)\,\sigma(dt).$$

Поэтому

$$G\left(\frac{1}{i}D\right)f(x)=\int_{X'}G(\theta)e^{i\langle x,\theta\rangle}\beta(d\theta)=$$

$$=\int_{\mathfrak{T}}\left\{\int_{X'}e^{i\langle x+\delta_t,\theta\rangle}\beta(d\theta)-\int_{X'}e^{i\langle x,\theta\rangle}\beta(d\theta)\right\}\varphi(t)\,\sigma(dt)=$$

$$=\int_{\mathfrak{T}}\{f(x+\delta_t)-f(x)\}\,\varphi(t)\,\sigma(dt),$$

где δ_t — сосредоточенная в точке t вероятностная мера, и $\langle\delta_t,\theta\rangle=\theta(t)$.

Таким образом, формула (3) принимает вид

$$\int_X\langle x,\varphi\rangle f(x)\,\nu_0(dx)=\int_X\nu_0(dx)\int_{\mathfrak{T}}\{f(x+\delta_t)-f(x)\}\,\varphi(t)\,\sigma(dt)=$$

$$=\int_X\langle\sigma,\varphi S_{(\cdot)}f(x)\rangle\,\nu_0(dx), \tag{5}$$

где $S_tf(x)=f(x+\delta_t)-f(x)$.

Формулу (5) можно переписать в виде

$$M\{\langle\xi_0,f(\xi_0)\varphi\rangle-\langle\sigma,S_{(\cdot)}f(\xi_0)\varphi\rangle\}=0.$$

Выражение $\langle\xi_0,f(\xi_0)\varphi\rangle$ можно рассматривать как стохастический интеграл от простейшей случайной функции

$$F(\xi_0,t)=f(\xi_0)\,\varphi(t). \tag{6}$$

Обозначим через Ψ_0 класс функций, представимых в виде

$$F(\xi_0)=F(\xi_0,t)=\sum_{k=1}^{n}f_k(\xi_0)\,\varphi_k(t), \tag{6'}$$

$$f_k\in\Phi,\quad\varphi_k\in\mathfrak{H},\quad k=1,2,\ldots,n.$$

Для $F\in\Psi_0$ имеет место равенство

$$M\{\langle\xi_0,F(\xi_0)\rangle-\langle\sigma,S_{(\cdot)}F(\xi_0)\rangle\}=0,$$

где $S_tF(\xi_0)=F(\xi_0+\delta_t,t)-F(\xi_0,t)$.

Укажем оценку второго момента случайной величины

$$\eta(F)=\langle\xi_0,F(\xi_0)\rangle-\langle\sigma,S_{(\cdot)}F(\xi_0)\rangle \tag{7}$$

((7) назовем регуляризованным стохастическим интегралом), а затем распространим случайный функционал $\eta(F)$ на более широкий класс функций.

Лемма. Для $F_1, F_2 \in \Psi_0$ имеет место формула

$$M\eta(F_1)\eta(F_2) = \int_{\mathfrak{T}}\int_{\mathfrak{T}} M\{[F_1(\xi_0+\delta_t+\delta_\tau, t) - F_1(\xi_0+\delta_t, t)] \times$$

$$\times [F_2(\xi_0+\delta_t+\delta_\tau, \tau) - F_2(\xi_0+\delta_\tau, \tau)]\}\sigma(dt)\sigma(d\tau) +$$

$$+ \int_{\mathfrak{T}} MF_1(\xi_0+\delta_t, t)F_2(\xi_0+\delta_t, t)\sigma(dt). \qquad (8)$$

Доказательство. Пользуясь формулой (5), вычислим величину

$$M\langle\xi_0, \varphi\rangle\langle\xi_0, \psi\rangle f(\xi_0) = M\langle\sigma, \varphi S_{(\cdot)}\{\langle\xi, \psi\rangle f(\xi_0)\}\rangle =$$

$$= \langle\sigma, \varphi M\{\langle\xi_0+\sigma_{(\cdot)}, \psi\rangle f(\xi_0+\delta_{(\cdot)}) - \langle\xi_0, \psi\rangle f(\xi_0)\}\rangle =$$

$$= M\langle\sigma, \varphi\psi f(\xi_0+\delta_{(\cdot)})\rangle + \langle\sigma, \varphi M\langle\xi_0, \psi\rangle S_{(\cdot)}f(\xi_0)\rangle =$$

$$= M\left\{\int_{\mathfrak{T}} \varphi(t)\psi(t) f(\xi_0+\delta_t)\sigma(dt) + \int_{\mathfrak{T}}\int_{\mathfrak{T}} [f(\xi_0+\delta_t+\delta_\tau) -\right.$$

$$\left. - f(\xi_0+\delta_\tau) - f(\xi_0+\delta_t) + f(\xi_0)]\varphi(t)\psi(\tau)\sigma(dt)\sigma(d\tau)\right\}.$$

Далее,

$$M\{\langle\xi_0, \varphi_1\rangle f_1(\xi_0) - \langle\sigma, \varphi_1 S_{(\cdot)} f_1(\xi_0)\rangle\}\times$$

$$\times\{\langle\xi_0, \varphi_2\rangle f_2(\xi_0) - \langle\sigma, \varphi_2 S_{(\cdot)} f_2(\xi_0)\rangle\} = M\langle\xi_0, \varphi_1\rangle\langle\xi_0, \varphi_2\rangle f_1(\xi_0) f_2(\xi_0) +$$

$$+ M\langle\sigma, \varphi_1 S_{(\cdot)} f_1(\xi_0)\rangle\langle\sigma, \varphi_2 S_{(\cdot)} f_2(\xi_0)\rangle -$$

$$- M\langle\sigma, \varphi_1 S_{(\cdot)} f_1(\xi_0)\rangle\langle\xi_0, \varphi_2\rangle f_2(\xi_0) - M\langle\sigma, \varphi_2 S_{(\cdot)} f_2(\xi_0)\rangle\langle\xi_0, \varphi_1\rangle f_1(\xi_0) =$$

$$= M\int_{\mathfrak{T}} \varphi_1(t)\varphi_2(t) f_2(\xi_0+\delta_t) f_1(\xi_0+\delta_t)\sigma(dt) +$$

$$+ M\int_{\mathfrak{T}}\int_{\mathfrak{T}} [f_2(\xi_0+\delta_t+\delta_\tau) f_1(\xi_0+\delta_t+\delta_\tau) - f_1(\xi_0+\delta_\tau) f_2(\xi_0+\delta_\tau) -$$

$$- f_1(\xi_0+\delta_t) f_2(\xi_0+\delta_t) + f_1(\xi_0) f_2(\xi_0)]\varphi_1(t)\varphi_2(\tau)\sigma(dt)\sigma(d\tau) +$$

$$+ M\int_{\mathfrak{T}} \varphi_1(t)[f_1(\xi_0+\delta_t) - f_1(\xi_0)]\sigma(dt)\int_{\mathfrak{T}} \varphi_2(\tau)[f_2(\xi_0+\delta_\tau) - f_2(\xi_0)]\sigma(dt) -$$

$$- M\int_{\mathfrak{T}}\int_{\mathfrak{T}} [f_1(\xi_0+\delta_t+\delta_\tau) f_2(\xi_0+\delta_\tau) - f_1(\xi_0+\delta_\tau) f_2(\xi_0+\delta_\tau) -$$

$$- f_1(\xi_0+\delta_t) f_2(\xi_0) + f_1(\xi_0) f_2(\xi_0)]\varphi_1(t)\varphi_2(\tau)\sigma(dt)\sigma(d\tau) -$$

$$- M\int_{\mathfrak{T}}\int_{\mathfrak{T}} [f_2(\xi_0+\delta_t+\delta_\tau) f_1(\xi_0+\delta_\tau) - f_2(\xi_0+\delta_\tau) f_1(\xi_0+\delta_\tau) -$$

$$-f_2(\xi_0+\delta_t)f_1(\xi_0)+f_1(\xi_0)f_2(\xi_0)]\,\varphi_2(t)\,\varphi_1(\tau)\,\sigma(dt)\,\sigma(d\tau)=$$

$$=M\int\limits_{\mathfrak{T}}\int\limits_{\mathfrak{T}}[f_1(\xi_0+\delta_t+\delta_\tau)-f_1(\xi_0+\delta_t)]\,[f_2(\xi_0+\delta_t+\delta_\tau)-f_2(\xi_0+\delta_\tau)]\times$$

$$\times\varphi_1(t)\,\varphi_2(\tau)\,\sigma(dt)\,\sigma(d\tau)+M\int\limits_{\mathfrak{T}}f_1(\xi_0+\delta_t)\,f_2(\xi_0+\delta_t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,\sigma(dt)$$

Эту формулу можно переписать в виде

$$M\eta(F_1)\,\eta(F_2)=M\int\limits_{\mathfrak{T}}F_1(\xi_0+\delta_t,t)\,F_2(\xi_0+\delta_t,t)\,\sigma(dt)+$$

$$+M\int\limits_{\mathfrak{T}}\int\limits_{\mathfrak{T}}[F_1(\xi_0+\delta_t+\delta_\tau,t)-F_1(\xi_0+\delta_t,t)]\,[F_2(\xi_0+\delta_t+\delta_\tau,\tau)-$$

$$-F_2(\xi_0+\delta_\tau,\tau)]\,\sigma(dt)\,\sigma(d\tau)$$

для функций (6), а затем и для их линейных комбинаций.

Следствие. При $F_1=F_2=F$ имеем квадратичный вариант формулы

$$M\,|\,\eta(F)\,|^2=M\int\limits_{\mathfrak{T}}F^2(\xi_0+\delta_t,t)\,\sigma(dt)+$$

$$+M\int\limits_{\mathfrak{T}}\int\limits_{\mathfrak{T}}[F(\xi_0+\delta_\tau+\delta_t,t)-F(\xi_0+\delta_t,t)]\,[F(\xi_0+\delta_\tau+\delta_t,\tau)-$$

$$-F(\xi_0+\delta_\tau,\tau)]\,\sigma(dt)\,\sigma(d\tau)\leqslant M\int\limits_{\mathfrak{T}}F^2(\xi_0+\delta_t,t)\,\sigma(dt)+$$

$$+M\left[\int\limits_{\mathfrak{T}}\sup_\tau|\,F(\xi_0+\delta_t+\delta_\tau,t)-F(\xi_0+\delta_t,t)\,|\,\sigma(dt)\right]^2. \qquad (9$$

Введем в пространстве Ψ_0 норму

$$\|F\|^2=\int\limits_X\Bigg\{2\int\limits_{\mathfrak{T}}F^2(x,t)\,\sigma(dt)+2\int\limits_{\mathfrak{T}}[F(x+\delta_t,t)-F(x,t)]^2\sigma(dt)+$$

$$+\left[\int\limits_{\mathfrak{T}}\sup_\tau|\,F(x+\delta_t+\delta_\tau,t)-F(x+\delta_t,t)\,|\,\sigma(dt)\right]^2\Bigg\}\,\nu_0(dx).$$

Пусть Ψ—пополнение Ψ_0 по этой норме. Рассмотрим некоторы свойства введенной нормы:

а) из неравенства $\|F\|^2\geqslant\int\limits_X\int\limits_{\mathfrak{T}}F^2(x,t)\,\sigma(dt)\,\nu_0(dx)$ следует, чт $\Psi\subset L_2(X\times\mathfrak{T},\sigma\times\nu_0)$;

б) если $\mathfrak{T}$ упорядочено с потоком σ-алгебр $\mathfrak{F}_t=\mathfrak{F}_{t-0}$ и $F(x,t)\in\mathfrak{F}_t$, то $F(x+\delta_t,t)=F(x,t)$ и $\|F\|^2=\int\limits_X\int\limits_{\mathfrak{T}}F^2(x,t)\,\sigma(dt)\,\nu_0(dx)$

(таким образом, если U — множество неупреждающих функционалов, то $\Psi \cap U = L_2 \cap U$);

в) если $F(x, t)$ дифференцируема по x и вариационная производная определена формулой

$$\frac{d}{d\alpha} F(x + \alpha y, t)\Big|_{\alpha=0} = \int\limits_{\mathfrak{T}} \frac{\delta F(x, t)}{\delta x(\tau)} y(d\tau),$$

то

$$\|F\|^2 \leqslant \int\limits_X \int\limits_{\mathfrak{T}} |F(x, t)|^2 \sigma(dt)\, \nu(dx) +$$

$$+ \int\limits_{\mathfrak{T}} \sup_{x,\tau} \left| \frac{\delta F(x, t)}{\delta x(\tau)} \right|^2 \sigma(dt) + \left[\int\limits_{\mathfrak{T}} \sup_{x,\tau} \left[\frac{\delta F(x, t)}{\delta x(\tau)} \right] \sigma(dt) \right]^2.$$

Поэтому в Ψ содержатся функции из L_2, для которых

$$\sup_{x,\tau} \frac{\delta F(x, t)}{\delta x(\tau)} \in L_1(\sigma) \cap L_2(\sigma).$$

Теорема. Для функций из Ψ_0 из формулы (9) очевидно следует оценка

$$M|\eta(F)|^2 \leqslant \|F\|^2. \tag{10}$$

Она естественным образом переносится на функции из Ψ. При этом справедлива формула (8).

Доказательство путем замыкания получаем из (10). Нужно при этом учесть, что все функционалы, входящие в (8), непрерывны в норме пространства Ψ.

Формула (3) может быть использована и в других случаях, когда известен характеристический функционал случайной величины. Примеры такого рода представляют собой процессы с независимыми приращениями. В этом случае, однако, проще получить соответствующий результат из (5), пользуясь выражением процесса через пуассоновскую меру.

Пусть $\zeta(t)$ — процесс с независимыми приращениями в R^n, представимый в виде [6]

$$\zeta(t) = \zeta_0(t) + \int\limits_{|x| \leqslant 1} x\,[\mu(t, dx) - \Pi(t, dx)] + \int\limits_{|x|>1} x\mu(t, dx),$$

где $\zeta_0(t)$ — сначала неслучайная функция, $\mu(t, A)$ — случайная мера, равная числу точек $s \in R^1$, для которых $\zeta(s) - \zeta(s - 0) \in A$ при $s \leqslant t$, $M\mu(t, A) = \Pi(t, A)$.

Из (5) путем простых вычислений при некоторой финитной непрерывной на R^1 функции φ получаем

$$M \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, \zeta(dt) f(\zeta) = M \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, \zeta_0(dt) f(\zeta) + \right.$$

$$+\int\limits_{|x|\leqslant 1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,x\,[f(\zeta+xI_{[0,t]})-f(\zeta)]\,\Pi(dt\times dx)+$$

$$+\int\limits_{|x|<1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,xf(\zeta+xI_{[0,t]})\,\Pi(dt\times dx),$$

где $\Pi([t,\,t+\Delta t),\,A)=\Pi(t+\Delta t,\,A)-\Pi(t,\,A)$,

$$I_{[0,t]}(\tau)=\begin{cases}1, & \tau\in[0,\,t]\\ 0, & \tau\bar{\in}[0,\,t].\end{cases}$$

Если теперь $\zeta_0(t)$ — случайная независимая гауссовская компонента с нулевым средним и корреляционной функцией $R(t,\,\tau)=M\zeta_0(t)\,\zeta_0(\tau)$, то, проводя дополнительное усреднение по этому процессу и пользуясь соответствующей формулой из [1, 7], получаем

$$M\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,\zeta(dt)\,f(\zeta)=M\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,\frac{\delta f(\zeta)}{\delta\zeta_0(\tau)}\,\beta(dt\times d\tau)+\right.$$

$$+\int\limits_{|x|\leqslant 1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,[f(\zeta+xI_{[0,t]})-f(\zeta)]\,\Pi(dt\times dx)+$$

$$\left.+\int\limits_{|x|>1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,xf(\zeta+I_{[0,t]})\,\Pi(dt\times dx)\right\},$$

где

$$\beta([t,\,t+\Delta t)\times[\tau,\,\tau+\Delta\tau))=d_\tau d_t R(t,\,\tau)=$$

$$=R(t+\Delta t,\,\tau+\Delta\tau)-R(t+\Delta t,\,\tau)-R(t,\,\tau+\Delta\tau)+R(t,\,\tau).$$

Таким же путем можно свести к общей формуле (5) и рассмотренный в работе [2] случай обобщенного пуассоновского процесса.

Список литературы: 1. *Далецкий Ю. Л., Парамонова С. Н.* Интегрирование по частям по мерам в функциональных пространствах. 1. — «Теория вероятностей и математическая статистика», 1977, вып. 17, с. 34—45. 2. *Кляцкин В. И.* Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М., «Наука», 1975. 3. *Скороход А. В., Кабанов Ю. М.* Расширенные стохастические интегралы. — Труды школы-семинара по теории случайных процессов (Друскенинкай, 1974). Вильнюс, 1975, с. 123—166. 4. *Кабанов Ю. М.* Обобщенная формула Ито для расширенного стохастического интеграла по пуассоновской случайной мере. — «УМН», 1974, **29**, 4, с. 167—168. 5. *Далецкий Ю. Л.* Диффузионные процессы в бесконечномерных пространствах и дифференциальные уравнения с бесконечномерным аргументом. — Материалы Всесоюзной школы-семинара по дифференциальным уравнениям с бесконечным числом независимых переменных и по динамическим системам с бесконечным числом степеней свободы. Ереван, 1974, с. 10—20. 6. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М., «Наука», 1964. 7. *Далецкий Ю. Л., Парамонова С. Н.* Об одной формуле теории гауссовых мер и оценке стохастических интегралов. — «Теория вероятностей и ее применения», 1974, **19**, 4, с. 844—848.

Yu. L. Daletsky, S. N. Paramonova

INTEGRATION BY PARTS WITH RESPECT TO MEASURES IN FUNCTIONAL SPACES. 2

This paper presents some formulas for integration by parts with respect to a Poisson measure and using these formulas for constructing stochastic integral with respect to a Poisson distributed additive set function.

Поступила в редколлегию 2.09 1976.

УДК 519.21

А. Е. ЗАСЛАВСКИЙ, ст. инж.,
Конструкторское бюро системного программирования, Новосибирск

МНОГОМЕРНАЯ МАРКОВСКАЯ ТЕОРЕМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ И БЕСКОНЕЧНАЯ СИСТЕМА ЧАСТИЦ СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА ТИПОВ

В работе [1] доказана теорема восстановления для марковского процесса восстановления $\Omega = \{(\zeta_n, \omega_n), \ n = \overline{0, \infty}\}$ с положительными, обладающими бесконечным математическим ожиданием приращениями за один шаг первой компоненты ζ этого процесса в предположении, что вторая его компонента ω является эргодической цепью Маркова со счетным пространством состояний. В работе [2] этот результат обобщен на случай, когда приращения первой компоненты ζ могут с положительной вероятностью принимать значения произвольного знака и не обладают конечным математическим ожиданием.

В предлагаемой работе в предположении, что первая компонента ζ принимает значения в пространстве произвольной размерности и обладает конечным математическим ожиданием, обобщаются результаты А. Стама [3], касающиеся многомерной теории восстановления с независимыми слагаемыми. Многомерный марковский процесс восстановления интерпретируется с использованием подхода И. Стоуна [4] в терминах модели развития системы частиц, что позволяет получить нетривиальный аналог результатов первой части.

1. Для $x = (x^s, \ s = \overline{1, r})$, $y = (y^s, \ s = \overline{1, r})$ будем обозначать, как обычно, $(x, y) = \sum_{s=1}^{r} x^s y^s$; если $x \in X = R^r$, то $|x| = (x, x)^{1/2}$. Через c обозначим вектор $c \in X$ единичной длины $|c| = 1$; $\mathfrak{A}$ — σ-алгебру борелевских подмножеств X; $\lambda(A)$ — лебегову меру на $(X, \mathfrak{A})$; $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$ — класс ограниченных борелевских подмножеств X.

Пусть d_s, $s = \overline{1, r}$—ортонормированный базис X. Для данного $s = \overline{1, r-1}$ через X^s будем обозначать подпространство X, порожденное ортами d_t, $t = \overline{s+1, r}$. Пусть