Yu. L. Daletsky, S. N. Paramonova

INTEGRATION BY PARTS WITH RESPECT TO MEASURES IN FUNCTIONAL SPACES. 2

This paper presents some formulas for integration by parts with respect to a Poisson measure and using these formulas for constructing stochastic integral with respect to a Poisson distributed additive set function.

Поступила в редколлегию 2.09 1976.

УДК 519.21

А. Е. ЗАСЛАВСКИЙ, ст. инж.,
Конструкторское бюро системного программирования, Новосибирск

МНОГОМЕРНАЯ МАРКОВСКАЯ ТЕОРЕМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ И БЕСКОНЕЧНАЯ СИСТЕМА ЧАСТИЦ СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА ТИПОВ

В работе [1] доказана теорема восстановления для марковского процесса восстановления $\Omega = \{(\zeta_n, \omega_n), n = \overline{0, \infty}\}$ с положительными, обладающими бесконечным математическим ожиданием приращениями за один шаг первой компоненты ζ этого процесса в предположении, что вторая его компонента ω является эргодической цепью Маркова со счетным пространством состояний. В работе [2] этот результат обобщен на случай, когда приращения первой компоненты ζ могут с положительной вероятностью принимать значения произвольного знака и не обладают конечным математическим ожиданием.

В предлагаемой работе в предположении, что первая компонента ζ принимает значения в пространстве произвольной размерности и обладает конечным математическим ожиданием, обобщаются результаты А. Стама [3], касающиеся многомерной теории восстановления с независимыми слагаемыми. Многомерный марковский процесс восстановления интерпретируется с использованием подхода И. Стоуна [4] в терминах модели развития системы частиц, что позволяет получить нетривиальный аналог результатов первой части.

1. Для $x = (x^s, s = \overline{1, r})$, $y = (y^s, s = \overline{1, r})$ будем обозначать, как обычно, $(x, y) = \sum\limits_{s=1}^{r} x^s y^s$; если $x \in X = R^r$, то $|x| = (x, x)^{1/2}$. Через c обозначим вектор $c \in X$ единичной длины $|c| = 1$; $\mathfrak{A}$ — σ-алгебру борелевских подмножеств X; $\lambda(A)$ — лебегову меру на $(X, \mathfrak{A})$; $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$ — класс ограниченных борелевских подмножеств X.

Пусть d_s, $s = \overline{1, r}$ — ортонормированный базис X. Для данного $s = \overline{1, r-1}$ через X^s будем обозначать подпространство X, порожденное ортами d_t, $t = \overline{s+1, r}$. Пусть

$$\mathbf{X}^s = \left\{ X^s + \sum_{t=1}^{s} k_t d_t; \quad k_t,\ t = \overline{1, s} — \text{целые} \right\}.$$

Условимся считать $\mathbf{X}^0 = X$. Пусть $\mathbf{X}^r = \left\{ \sum_{s=1}^{r} k_s d_s \right\} = D$ — целочи(ленная решетка пространства X. Будем говорить, что вектор $\varkappa \in$ соизмерим с X^s, если $\varkappa \in \mathbf{X}^s$.

Через λ^s обозначим меру Хаара на $\mathbf{X}^s$. $\lambda^s(A)$ при $s = \overline{1, r}$ — равно $(r — s)$-мерной лебеговой мере множества $A \cap \mathbf{X}^s$. Будем сч тать $\lambda^0(A) = \lambda(A)$. Меру $\lambda^r(A)$ будем понимать как число точе во множестве $A \cap D$. Пусть $N = \overline{1, \infty}$.

Многомерный марковский процесс восстановления определяет(как марковский процесс

$$\Omega = \{(\zeta_n, \omega_n)\}; \ \zeta_n \in X, \ \omega_n \in N$$

с дискретным временем $n = \overline{0, \infty}$, однородный по времени и г первой компоненте ζ и обладающий тем свойством, что вторая еı компонента представляет собой счетную цепь Маркова $\omega = \{\omega_n$

Марковский процесс Ω задается начальным распределением переходными вероятностями

$$P_i^0(A) = P(\zeta_0 \in A, \ \omega_0 = i),$$

$$F_{ij}(A) = P(\zeta_{n+1} \in A + x, \ \omega_{n+1} = j / \zeta_n = x, \ \omega_n = i); \ i, j \in N,$$

$$A \in \mathfrak{A}, \ x \in X, \ \overline{n = 0, \infty}.$$

Будем считать $P_i^0(A) = p_i \theta(A)$; $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, $\theta(A) = \begin{cases} 0, & 0 \notin A \\ 1, & 0 \in A \end{cases}$

Совокупность переходных вероятностей $F_{ij}(A)$ процесса Ω буде рассматривать как не зависящую от n и x матрицу счетного поря ка $F = F(A) = \| F_{ij}(A) \|$. Положим $F^0 = F^0(A) = \theta(A) \| \ _{ij} \| = E(A)$, $F^1 = F$ и зададим последовательность матриц F^n рекур рентно, используя уравнение Колмогорова — Чепмена:

$$F^{m+n} = F^m * F^n = \| F_{ij}^{m+n}(A) \| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \int_X F_{kj}^n(A - x) F_{ik}^m(dx) \right\|. \quad (1$$

Определяемую соотношением (1) бинарную операцию $*$ буде называть операцией свертки. Эта некоммутативная операция с(поставляет — в предположении абсолютной сходимости всех ин тегралов и ряда в (1) — упорядоченной паре матриц счетного п(рядка, элементы которых являются мерами на $(X, \mathfrak{A})$, треты матрицу такого же типа. $E = E(A)$ — единица относительно опе рации $*$.

Матрица F^n задает переходные вероятности марковского процесса восстановления Ω за n шагов. Элементы этой матрицы являются неотрицательными мерами на $(X, \mathfrak{A})$, нормированными условием $\sum\limits_{j=1}^{\infty} F_{ij}^n(X) = 1$. Вероятности перехода вложенной цепи Маркова ω за n шагов задаются матрицей $P^n = F^n(X)$. Будем предполагать, что однородная цепь Маркова ω непериодична и положительно регулярна. Тогда существует

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \Pi = \|\Pi_{ij}\|, \quad \Pi_{ij} = \pi_j > 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1. \tag{2}$$

Строка $\pi = \{\pi_j\}$ матрицы Π задает инвариантную меру вложенной цепи Маркова ω.

Будем предполагать, что марковский процесс восстановления Ω является строго r-мерным, т. е. для некоторых $n > 0$, $i \in N$ мера F_{ii}^n не сосредоточена ни в каком собственном подпространстве пространства $X = R^r$. Обозначим $\rho = (r - 1)/2$.

Определение 1. r-Мерный марковский процесс восстановления Ω называется s-решетчатым (s-арифметическим), если существует невырожденное однородное линейное преобразование $y = y(x)$ пространства X такое, что для преобразованного процесса $\{\eta_n = y(\zeta_n), \omega_n\}$ все меры F_{ii}^n (все меры F_{ij}^n) сосредоточены на множестве $\mathbf{X}^s$, $s = \overline{0, r}$, причем s — наименьшее из чисел, обладающих этим свойством.

Далее при рассмотрении s-решетчатого или s-арифметического марковского процесса восстановления Ω будем, не ограничивая общности, предполагать, что надлежащее линейное преобразование пространства X уже произведено.

Если r-мерный марковский процесс восстановления Ω является s-решетчатым (s-арифметическим), то приращение его первой компоненты ζ за конечное число шагов с вероятностью 1 соизмеримо с X^s на любом цикле (на любой траектории) вложенной цепи Маркова ω. Поэтому для s-решетчатого марковского процесса восстановления Ω существует система векторов $\varkappa_{ij} \in X$, i, $j \in N$ такая, что

$$F_{ij}^n(\mathbf{X}^s + \varkappa_{ij}) = F_{ij}^n(X); \quad i, j \in N, \quad n = \overline{0, \infty}; \tag{3}$$

$$\varkappa_{ij} + \varkappa_{jk} - \varkappa_{ik} \in \mathbf{X}^s; \quad i, j, k \in N. \tag{4}$$

Действительно, если не выполнено (3) или (4), то, используя (1), можно показать, что $F_{ii}^n(\mathbf{X}^s) < F_{ii}^n(X)$ при некоторых $n > 0$, $i \in N$; это противоречит определению 1.

Если $\varkappa_{ij} \in \mathbf{X}^s$; i, $j \in N$, то s-решетчатый марковский процесс восстановления Ω является s-арифметическим; в противном случае это не так. С другой стороны, свойства s-арифметического и s-решетчатого процессов достаточно близки. Учитывая (3) и (4) и проводя пресбразование, заключающееся в замене $\varkappa_{ij}$, $i, j \in N$, скажем, нул вым вектором, можно с каждым s-решетчатым марковским проце сом восстановления Ω связать s-арифметический процесс $\tilde{\Omega}$, задава мый матрицей $\tilde{F} = \|\tilde{F}_{ij}(A)\| = \|F_{ij}(A + \varkappa_{ij})\|$. В силу (3), (4) спр ведливы равенства $\tilde{F}^n_{ij}(A) = F^n_{ij}(A + \varkappa_{ij})$; $i, j \in N$, $n = \overline{0, \infty}$. Число определяется матрицей F однозначно, векторы $\varkappa_{ij}$; $i, j \in N$—с то ностью до слагаемого $\varkappa \in \mathbf{X}^s$.

0-Решетчатый марковский процесс восстановления Ω явл ется 0-арифметическим; такой процесс может быть назван впол нерешетчатым. r-Решетчатый (r-арифметический) марковский пр цесс восстановления Ω можно назвать решетчатым (арифмет ческим). Соотношение (3) справедливо с надлежащими оговорам для любого r-мерного марковского процесса восстановления Ω

Функцию восстановления U для r-мерного марковского пр цесса восстановления Ω определим как матрицу счетного порядк

$$U(A) = \sum_{n=0}^{\infty} F^n(A). \qquad (5)$$

Элемент $U_{ij}(A)$ этой матрицы равен условному (при $\omega_0 = i$) м тематическому ожиданию числа осуществлений события ($\zeta_n \in A$, $\omega_n = j$) в бесконечной последовательности моментов времени $n = \overline{0, \infty}$. Поэтому U_{ij} является неотрицательной, возможно, беск нечной мерой на $(X, \mathfrak{A})$.

Пусть

$$U^m = \sum_{n=0}^{m} F^n. \qquad (6)$$

Из (5), (6), содержащегося в (1) определения операции свертк $*$ и перестановочности относительно этой операции матриц F^m, F следует, что для r-мерной марковской функции восстановления при любом $n > 0$ справедливы равенства $U - U^{n-1} = F^n * U = U * F^n$ Полагая здесь $n = 1$, находим, что U удовлетворяет уравнени восстановления $Z = E + F * Z$. Учитывая (3) и проводя рассуждени аналогичные примененным в работе [5], можно установить, что е ли $U_{i_0 j_0}(A_0) = \infty$ при некоторых i_0, $j_0 \in N$, $A_0 \in \mathfrak{A}_0$, то $U_{ij}(A) = \infty$ тогда, когда $\lambda^s(A - \varkappa_{ij}) > 0$.

Определение 2. r-Мерный марковский процесс восстановлени Ω называется невозвратным, если $U_{ij}(A) < \infty$ при всех $i, j \in N$, $A \in \mathfrak{A}_0$.

Обобщая на случай r-мерного марковского процесса восстановл ния доказательство п. в) теоремы 2 [5], можно показать, что дл невозвратного процесса Ω функция восстановления U обладае следующим свойством.

Свойство А. Для любого $A \in \mathfrak{A}_0$ существует такое $A' \in \mathfrak{A}_0$, чт

$$U_{ij}(A + x) \leqslant U_{ij}(A'); \quad i, j \in N, \; x \in X. \qquad (7)$$

Положим

$$M = \| m_{ij} \| = \| \int_X x F_{ij}(dx) \|, \quad \mu = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \pi_i m_{ij}. \tag{8}$$

Элемент m_{ij} матрицы M является r-мерным вектором, он равен атематическому ожиданию приращения первой компоненты ζ роцесса Ω за один шаг при переходе второй его компоненты ω з состояния i в состояние j; вектор μ равен математическому ожиданию приращения за один шаг первой компоненты ζ при условии $_i = \pi_i$, $i \in N$.

Будем предполагать

$$\mu \neq 0; \tag{9}$$

$$|\mu| < \infty. \tag{10}$$

Из (9) следует невозвратность марковского процесса восстановения Ω. Действительно, достаточно рассмотреть одномерный маровский процесс восстановления $\{(\mu, \xi_n), \omega_n\}$ и воспользоваться езультатами работы [5].

Определим на марковском процессе восстановления Ω случайые векторы η_{ij}, описывающие приращение первой компоненты процесса за время от выхода второй его компоненты—вложеной цепи Маркова ω — из состояния i до первого попадания в сотояние j. Именно, положим

$$G(A) = \| G_{ij}(A) \| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} P(\zeta_n \in A, \omega_n = j, \omega_m \neq j \right.$$

$$\left. \text{для } m < n / \zeta_0 = 0, \omega_0 = i) \right\|.$$

Из (2) следует $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} (\omega_m = j)/\omega_0 = i\right) = 1$; $i, j \in N$. Поэтому $_{ij}(X) = 1$ и η_{ij} — собственный случайный вектор. Обозначим

$$\mu_{ij} = M\eta_{ij} = \int_X x G_{ij}(dx),$$

$$\Sigma_{ij} = M(\eta_{ij} - \mu_{ij})^T (\eta_{ij} - \mu_{ij}) = \int_X (x - \mu_{ij})^T (x - \mu_{ij}) G_{ij}(dx),$$

$$i, j \in N$$

атематическое ожидание и ковариационную матрицу случайного ектора η_{ij}. Из условия (10) (см. лемму 1) следует, что элемены вектора μ_{ij} конечны. Будем предполагать, что элементы атрицы Σ_{ij} также конечны. Так как марковский процесс восстаовления Ω предполагается строго r-мерным, то в силу (2) $\det \Sigma_{ij} >$ > 0, $j \in N$.

Лемма 1. $\mu_{ij}=\pi_j^{-1}\mu,\ j\in N$.

Доказательство. Аналогичное утверждение для случая $r=1$ получено в работе [6]. Нетрудно видеть, что примененное там доказательство не зависит от размерности; заменяя в надлежащих местах числа векторами, получаем требуемое. Лемма доказана.

Лемма 2. I. Если для данного $c\in X$

$$M|(c,\eta_{11})|^\rho=\int_X|(c,x)|^\rho G_{11}(dx)<\infty, \tag{11}$$

то аналогичное неравенство справедливо при всех $i,j\in N$:

$$M|(c,\eta_{ij})|^\rho=\int_X|(c,x)|^\rho G_{ij}(dx)<\infty.$$

II. Если

$$M|\eta_{11}|^\rho=\int_X|x|^\rho G_{11}(dx)<\infty, \tag{12}$$

то аналогичное неравенство справедливо при всех $i,j\in N$:

$$M|\eta_{ij}|^\rho=\int_X|x|^\rho G_{ij}(dx)<\infty.$$

Доказательство проведем для второго утверждения леммы. Первое утверждение доказывается аналогично.

Обозначим через $\eta_{ij}(k)$ приращение первой компоненты ζ марковского процесса восстановления Ω на «траектории с запретом» за время от выхода вложенной цепи Маркова ω из состояния i до первого попадания в состояние j без попадания в состояние k.

Выделяя при вычислении математического ожидания $M|\eta_{11}|^\rho$ надлежащее множество траекторий, получаем неравенство

$$M|\eta_{11}|^\rho\geqslant M|\eta_{1i}(1)+\eta_{ij}(1)+\eta_{j1}|^\rho,$$

откуда в силу (12) следует $M|\eta_{1i}(1)|^\rho<\infty$, $M|\eta_{ij}(1)|^\rho<\infty$, $M|\eta_{j1}|^\rho<\infty$.

Первое из этих неравенств, неравенство (12) и положительная регулярность вложенной цепи Маркова ω позволяют заключить, что $M|\eta_{1i}|^\rho<\infty$, $i\in N$. Поэтому, заменяя в последнем неравенстве j на i и учитывая $M|\eta_{i1}(j)|^\rho\leqslant M|\eta_{i1}|^\rho<\infty$, получаем $M|\eta_{ij}|^\rho=$ $=M|\eta_{ij}(1)|^\rho+M|\eta_{i1}(j)+\eta_{1j}|^\rho<\infty$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть G — вероятностная мера на $(X,\mathfrak{A})$. Пусть для σ-конечной меры U на $(X,\mathfrak{A})$, обладающей свойством А, при данных $c\in X$, $a>0$ и любом $A\in\mathfrak{A}_0$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty}t^\rho U(A+tc)=a\lambda(A). \tag{13}$$

Тогда σ-конечная мера

$$V=V(A)=(G*U)(A)=\int_X U(A-x)\,G(dx) \tag{14}$$

обладает аналогичным свойством:

$$\lim_{t\to\infty} t^{\rho} V(A+tc) = a\lambda(A). \tag{15}$$

Доказательство. Пусть для $\varepsilon > 0$ и $B \in \mathfrak{A}_0$

$$G(B) \geqslant 1 - \varepsilon. \tag{16}$$

Из ограниченности B, равенства $\lambda(A - x) \equiv \lambda(A)$ и условия (13) следует, что предельный переход

$$\lim_{t\to\infty} t^{\rho} U(A + tc - x) = a\lambda(A) \tag{17}$$

является равномерным относительно $x \in B$.

Выберем, используя свойство A, для данного A множество $A' \in \mathfrak{A}_0$, удовлетворяющее неравенству (7). Применяя определение (14), запишем ряд очевидных соотношений

$$\int_B t^{\rho} U(A + tc - x)\, G(dx) \leqslant t^{\rho} v(A + tc) =$$

$$= \int_X t^{\rho} U(A + tc - x)\, G(dx) = \int_B + \int_{X/B} \leqslant$$

$$\leqslant \int_B t^{\rho} U(A + tc - x)\, G(dx) + t^{\rho} U(A' + tc)\, G(X \setminus B).$$

Учитывая (17) в предельном переходе при $t \to \infty$, получаем

$$a\lambda(A)\, G(B) \leqslant \lim_{t\to\infty} t^{\rho} V(A + tc) \leqslant a\lambda(A)\, G(B) + a\lambda(A')\, G(X \setminus B).$$

Отсюда, в силу $\lambda(A') < \infty$, условия (15) и произвольности $\varepsilon > 0$ следует (15). Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $A \in \mathfrak{A}_0$ и выполнены условия (9), (10).

I. Если для $c \neq |\mu|^{-1}\mu$ выполнено условие (11), то

$$\lim_{t\to\infty} t^{\rho} U_{ij}(A + tc) = 0; \quad i, j \in N. \tag{18}$$

II. Если выполнено условие (12), то равномерно в любом замкнутом конусе $\{x : (x, \mu) \leqslant b\,|x|\,|\mu|,\ b < 1\} \subset X$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{\rho} U_{ij}(A + x) = 0; \ i, j \in N. \tag{19}$$

III. Если для $c = |\mu|^{-1}\mu$ справедливо условие (11) и $x \to \infty$ по точкам множества $\mathbf{X}^s$, отдаленным на конечное расстояние от полупрямой $y = t\mu$, $t > 0$, то при всех $i, j \in N$

$$\lim_{x\to\infty} |x|^{\rho} U_{ij}(A + \varkappa_{ij} + x) = a_j \lambda^s(A), \tag{20}$$

где

$$a_j = (2\pi)^{-\rho} \left(\det \sum_{ij}\right)^{-1/2} \pi_j^{2-\rho} |\mu|^{\rho-1}. \tag{21}$$

Доказательство. Применяя метод Деблина разбиения последовательности состояний вложенной цепи Маркова ω на циклы по моментам попадания в фиксированное состояние и используя определение случайных векторов η_{ij}, можно записать компоненту U_{ij} (элемент матрицы) r-мерной марковской функции восстановления U в следующем виде:

$$U_{ij}(A) = \delta_{ij}\theta(A) + (G_{ij} * \widetilde{U}_j)(A). \tag{22}$$

Здесь символ $*$ обозначает, как и в (14), обычную свертку мер в $X = R^r$, без указанного в (1) суммирования по N, а $\widetilde{U}_j = \sum_{n=0}^{\infty} G_{jj}^n$ — обычная (не марковская) r-мерная функция восстановления.

При $i = j$ из (22) следует $U_{jj} = \widetilde{U}_j$. Лемма 2 дает возможность использовать результаты работы [3]. Применяя теорему 5.1 этой работы для соотношений (18) и (19), комбинируя результаты теорем 5.3 и 5.4 для соотношения (20) и учитывая лемму 1 при вычислении константы a_j в (21), получаем утверждения теоремы для диагональных элементов U_{jj} матрицы U. Отсюда в силу (22) и леммы 3 следуют утверждения теоремы для всех $i, j \in N$, так как G_{ij} — вероятностная мера на $(X, \mathfrak{A})$, мера $\widetilde{U}_j = U_{jj}$ обладает свойством A и $\lim \theta(A + x) = 0$ при любом $A \in \mathfrak{A}_0$.

Теорема доказана.

2. Рассматриваемый r-мерный марковский процесс восстановления Ω можно следующим образом интерпретировать в терминах модели развивающейся в дискретном времени системы частиц счетного количества возможных типов.

В нулевой момент времени в начале координат пространства $X = R^r$ появляется частица типа $i \in N$, порождающая некоторую случайную систему частиц. Развитие системы однородно в пространстве и времени: если в момент времени n в точке x появляется частица типа i, то в следующий момент времени $n + 1$ она порождает частицу, оказывающейся частицей типа j с вероятностью $P_{ij} = F_{ij}(X)$, причем эта новая частица попадает в область $A + x$, $A \in \mathfrak{A}$ с вероятностью $F_{ij}(A)$, не зависящей от n и x; в каждый момент времени n появляется одна новая частица, навсегда остающаяся в месте своего появления и не препятствующая появлению там же других частиц в будущем.

r-Мерная марковская функция восстановления U описывает в среднем характер размещения частиц такой системы: элемент $U_{ij}(A)$ этой матричной функции задает математическое ожидание числа всех попавших в область A частиц типа j, если начальная частица имела тип i и находилась в начале координат. Полученные в п. 1 результаты относительно этой функции при $r > 1$ являются, в определенном смысле, мало интересными, так как имеет место следующая альтернатива.

1. Либо $U_{ij}(A) = \infty$ для любого $A \in \mathfrak{A}$ с $\lambda^s(A - \varkappa_{ij}) > 0$, т. е. в любую область, куда могут попадать частицы типа j, попадает в среднем бесконечное количество этих частиц, при всех $j \in N$. Достаточным для этого является, например, условие $\mu = 0$, когда новая частица попадает в среднем в ту же точку, где находилась частица, ее породившая.

2. Либо частицы рассеиваются в пространстве X столь редко, что $\lim\limits_{|x| \to \infty} U_{ij}(A + x) = 0$ для любого $A \in \mathfrak{A}_0$.

Ниже рассматривается иная модель развития системы частиц. Она является обобщением на марковский случай модели Стоуна, рассмотревшего [4] счетное множество частиц одного типа, совершающих независимо друг от друга случайное блуждание с одним и тем же распространением скачка; функция восстановления определялась как среднее число попаданий в данное множество.

Предлагаемая модель позволяет получить утверждение, которое можно считать нетривиальным аналогом теоремы 1.

Пусть уже в нулевой момент времени имеется счетное множество частиц каждого типа $i \in N$. Эти частицы располагаются в пространстве X некоторым случайным образом, $v_i(A)$ есть математическое ожидание числа частиц типа i в области A в момент времени $n = 0$.

Будем предполагать, что $v_i(\cdot)$ является σ-конечной мерой, носитель которой принадлежит $\mathbf{X}^s$. Эту меру можно считать заданной либо на измеримом пространстве $(X, \mathfrak{A})$, либо на измеримом пространстве $(\mathbf{X}^s, \mathfrak{A}^s)$, $\mathfrak{A}^s = \{A \cap \mathbf{X}^s \colon A \in \mathfrak{A}\}$; свойства совокупности мер $V = \{V_i(A)\}$ будут далее уточнены.

Каждая из имеющихся в нулевой момент времени частиц порождает случайную последовательность частиц; случайными являются типы этих частиц и их расположение в пространстве X. Вероятностные свойства последовательности при заданных типе и расположении в X начальной частицы полностью определяются марковским процессом восстановления Ω. Соответствующие различным начальным частицам случайные последовательности независимы.

Для описанной модели величина

$$(V * U)_j(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X U_{ij}(A - x) V_i(dx) \tag{23}$$

задает математическое ожидание суммарного по времени и по всем последовательностям числа частиц типа j, появившихся в области A. Нас будут интересовать условия конечности величины (23) и значение предела

$$\lim_{(x,e) \to \infty} (V * U)_j(A + x), \tag{24}$$

где $e \in X$ — фиксированный единичный вектор, а запись $(x, e) \to \infty$

означает, кроме неограниченного возрастания указанного скалярного произведения, еще и факт принадлежности $x \in \mathbf{X}^s$.

Дополним вектор e до ортонормированного базиса $e_1 = e$, $e_2, \ldots$ $\ldots, e_r$ пространства X. Пусть $-\infty < a < b < \infty$, $0 < 0 < c <$ $< \infty$. Обозначим через

$$A_{a,b} = \{x \in \mathbf{X}^s : a \leqslant (x, e) \leqslant b\}$$

плоское, а через

$$B_c = \{x \in \mathbf{X}^s : 0 \leqslant (x, e_k) \leqslant c, \; k = \overline{2, r}\}$$

цилиндрическое множество.

Пусть $\mathfrak{V}_e$ — класс векторов $V = \{V_i(A)\}$, компонентами которых являются такие σ-конечные меры $V_i(\cdot)$ на $(\mathbf{X}^s, \mathfrak{A}^s)$, что

$$V_i(\mathbf{X}^s \setminus A_{a,b}) = 0, \tag{25}$$

причем константы a, b могут зависеть от вектора $V \in \mathfrak{V}_e$, но для данного V не зависят от индекса i.

Пусть $0 < v < \infty$; обозначим через $\mathfrak{V}_{e,v} \subset \mathfrak{V}_e$ подкласс таких векторов $V = \{V_i(A)\}$, для компоненты $V_i(\cdot)$ которых существует предел

$$\lim_{c \to \infty} V_i(B_c + x)/c^{r-1} = v_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} v_i = v, \tag{26}$$

причем указанный предельный переход является равномерным относительно $i \in N$ и $x \in X^s$.

Заметим, что частицы, появляющиеся в нулевой момент времени в соответствии с мерой $V = \{V_i(A)\} \in \mathfrak{V}_{e,v}$, расположены в силу (25) в ортогональном вектору e плоском множестве конечной высоты $b - a$, причем проекции этих частиц на гиперплоскость $(x, e) = 0$ расположены асимптотически равномерно.

Марковский процесс восстановления Ω за один шаг сносит частицу в среднем на μ. Поэтому при $v \in \mathfrak{V}_{e,v}$ угол между μ и e должен существенно влиять на предел (20). Положим

$$k(e) = \begin{cases} 1/(\mu, e), & 0 < (\mu, e) < \infty, \\ \infty, & U(\{x : |(x, e)| \leqslant 1\}) = \infty, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теорема 2. Пусть $0 < v < \infty$ и $V = \{V_i(A)\} \in \mathfrak{V}_{e,v}$. Пусть r-мерный s-решетчатый марковский процесс восстановления Ω удовлетворяет условиям (9), (10). Тогда:

1) при $0 \leqslant k(e) < \infty$ имеет место равенство

$$\lim_{(x,e) \to \infty} (V * U)_j (A + x) = k(e) \pi_j \sum_{i=1}^{\infty} v_i N^s (A - \varkappa_{ij}); \tag{27}$$

2) при $k(e)=\infty$ равенство $(V*U)_j(A)=\infty$ имеет место тогда, когда существует такое $i\in N$, что $\lambda^s(A-\varkappa_{ij})>0$.

Доказательство. Учитывая (22), преобразуем (23) к виду

$$(v*U)_j(A+x)=V_j(A+x)+\sum_{i=1}^{\infty}(V_i*G_{ij})*\tilde{U}_j)(A+x). \quad (28)$$

При условии $k(e)<\infty$ первое слагаемое в правой части (28) в силу (25) обращается в нуль, когда (x, e) достаточно велико, и поэтому при вычислении предела (24) роли не играет. Рассмотрим произвольное из оставшихся слагаемых. Свертка в $X=R^r$ коммутативна и ассоциативна, поэтому

$$V_i*G_{ij}*\tilde{U}_j=G_{ij}*(V_i*\tilde{U}_j).$$

Используя свойства классической r-мерной функции восстановления $\tilde{U}_j$, лемму 1 и результаты Стоуна [4], можем записать

$$\lim_{(x,e)\to\infty}(V_i*\tilde{U}_j)(A+x)=k(e)\,\pi_jV_i\lambda^s(A). \quad (29)$$

Лемма 3 сформулирована для $\rho=(r-1)/2$; однако ее доказательство не зависит от значения ρ, так что она верна, в частности, при $\rho=0$. Используя это и учитывая, что меры $V_i*\tilde{U}_j$ и G_{ij} сосредоточены на множествах $\mathbf{X}^s$ и $\mathbf{X}^s+\varkappa_{ij}$ соответственно, получаем из (29) с учетом (28)

$$\lim_{(x,e)\to\infty}(U_i*U_{ij})(A+x)=k(e)\,\pi_jV_i\lambda^s(A-\varkappa_{ij}). \quad (30)$$

В силу свойства A меры $U_{ij}(\cdot)$ и равномерности относительно $i\in N$ предельного перехода (26) аналогичным свойством обладает предельный переход (30). Это позволяет совершить в (28) почленный переход к пределу при $(x, e)\to\infty$ и с учетом (30) получить (27).

Второе утверждение теоремы выводится аналогичным рассуждением с использованием представления (28) и результатов [4].

Теорема доказана.

Замечание. Для s-арифметического марковского процесса восстановления Ω равенство (27) принимает более простой вид

$$\lim_{(x,e)\to\infty}(V*U)_j(A+x)=k(e)\,\pi_jV\lambda^s(A).$$

Список литературы: 1. *Заславский А. Е.* Теорема восстановления для марковского процесса восстановления с бесконечным средним и счетным пространством состояний. — «Теория вероятностей и математическая статистика», 1973, 9, с. 100—109. 2. *Заславский А. Е.* Теорема восстановления для не обладающего конечным математическим ожиданием расширенного марковского процесса восстановления со счетным пространством состояний. — «Теория вероятностей и математическая статистика», 1974, 10, с. 96—98. 3. *Starr A. J.* Renewal theory in r dimensions. I.—«Compos. Math.», 1969, 21, p. 383—399. 4. *Stone Ch. J.* Infinite particle systems and multidimensional renewal theory. — «Math. and Mech.» 1968, 18, 3, p. 211—227. 5. *Заславский А. Е.* Об одном обобщении теоремы восста новления. —«Сиб. матем. ж.», 1971, 12, 3, с. 513—535. 6. *Заславский А. Е.* Оцен ка скорости сходимости в теореме восстановления для случайных величин, за данных на цепи Маркова.— «Теория вероятностей и ее применения», 1972, 17, 3

A. E. Zaslavsky

MULTI-DIMENSIONAL MARKOV RENEWAL THEOREM AND INIFINITE PARTICLE SYSTEM OF COUNTABLE SET OF TYPES

The multi-dimensional Markov renewal theorem is proved. The non-trivia analogue of this result in model of infinite particle system is obtained.

Поступила в редколлегию 2.07 1976

УДК 519.21

П. Г. ИНЖЕВИТОВ, мл. науч. сотр., Государственный оптический институт им. С. И. Вавилова

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с математическими ожиданиями, равными нулю, и конечными абсолютными моментами порядка $k \geqslant 3$, где k — целое число. Положим

$$V_j(x) = P\{X_j < x\}, \quad v_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dV_j(x), \quad \sigma_j^2 = EX_j^2,$$

$$B_n = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2, \quad F_n(x) = P\left\{\frac{1}{\sqrt{B_n}} \sum_{j=1}^{n} X_j < x\right\}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\, dy.$$

Пусть $l \geqslant 0$ и $\alpha > 0$ — фиксированные числа, причем l —целое число. Введем в рассмотрение следующие условия*):

$$\text{(I)}\ \varliminf \frac{B_n}{n} > 0, \quad \varlimsup \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} E|X_j|^k < \infty,$$

$$\text{(II)}\ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{|x| > \varepsilon\sqrt{n}} |x|^k dV_j(x) \to 0 \text{ для любого } \varepsilon > 0,$$

*) Здесь и в дальнейшем предельные переходы совершаются при $n \to \infty$.