УДК 519.21

О. К. ЗАКУСИЛО, канд. физ.-мат. наук,
Киевский университет

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ ВЗВЕШЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть ξ_k, $k \geqslant 1$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, a_{nk}, c_n, $b_n \to \infty$, $n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$ — некоторые постоянные, $S_n = b_n^{-1}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}\xi_k - c_n\right)$. Хорошо известно, что при $a_{nk} \equiv \mathrm{const}$ невырожденные распределения, предельные для S_n, являются устойчивыми [1]. В работе [2] показано, что при $a_{nk} = a_k$, $0 < a < a_k < b$ указанное свойство, вообще говоря, перестает выполняться. Вместе с тем оно сохраняется для некоторых последовательностей a_{nk} (например, $a_{nk} = k/n$), рассматриваемых в работах [3, 4]. Цель настоящей статьи — описание достаточно широкого класса последовательностей a_{nk}, для которых распределения, предельные для S_n, обязаны быть устойчивыми.

Обозначим $\delta(x) = 0$ при $x \leqslant 0$ и $\delta(x) = 1$ при $x > 0$.

Теорема. Если выполнены условия: 1) $|a_{nk}| \leqslant a$,

2) $n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\delta(x - a_{nk}) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} G(x) \not\equiv \delta(x)$,

3) $\mathbf{P}\{S_n < x\} \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} F(x)$, то $F(x)$ — устойчивая функция распределения.

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. Если $a_{nk} \leqslant a_{nk+1}$, $n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\delta(x - a_{nk}) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} G(x)$, то для любого целого $r > 0$ $rn^{-1}\sum\limits_{k=1}^{[nr^{-1}]}\delta(x - a_{nkr}) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} G(x)$.

Доказательство. При выполнении условий леммы $\delta(x - a_{nrk}) \leqslant \delta(x - a_{ni})$ для $r(k-1)+1 \leqslant i \leqslant rk$ и $\delta(x - a_{nrk}) \geqslant \delta(x - a_{ni})$ для $rk \leqslant i \leqslant r(k+1) - 1$. Отсюда

$$n^{-1}\sum_{k=r}^{n}\delta(x - a_{nk}) \leqslant rn^{-1}\sum_{k=1}^{[nr^{-1}]}\delta(x - a_{nkr}) \leqslant n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\delta(x - a_{nk}). \quad (1)$$

Поскольку $0 \leqslant \delta(x) \leqslant 1$, то из (1) следует утверждение леммы.

Лемма 2. Если $a_{nk} \leqslant a_{nk+1}$, $b_{nk} \leqslant b_{nk+1}$, $|a_{nk}| \leqslant a$, $|b_{nk}| \leqslant a$, $F_{n1}(x) = n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\delta(x - a_{nk}) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} G(x)$, $F_{n2}(x) = n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\delta(x - b_{nk}) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} G(x)$, то $n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\delta(x - a_{nk} + b_{nk}) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} \delta(x)$.

Доказательство. Поскольку для любого n $F_{n1}(x)$ и $F_{n2}(x)$ являются функциями распределений, сосредоточенных на компакте $[-a, a]$, то из теоремы Лебега следует, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F_{n1}(x) - F_{n2}(x)| \times$ $\times dx \to 0$. Очевидно, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F_{n1}(x) - F_{n2}(x)| dx = \int\limits_{L} y dx$, где L — контур области, ограниченной графиками функций $\max(F_{n1}(x), F_{n2}(x))$ и $\min(F_{n1}(x), F_{n2}(x))$. Поскольку

$$\int\limits_{L} y dx = -\int\limits_{L} x dy = -\left(\sum_{k=1}^{n} \min(a_{nk}, b_{nk}) n^{-1} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n} \max(a_{nk}, b_{nk}) n^{-1}\right) = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} |a_{nk} - b_{nk}|,$$

то $n^{-1} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{nk} - b_{nk}| \to 0$. Рассматривая $a_{nk} - b_{nk}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ как значения случайных величин η_n (заданных на одном вероятностном пространстве), принимаемые с вероятностью n^{-1}, получаем $M|\eta_n| \to$ $\to 0$. Отсюда, поскольку $\mathbf{P}\{\eta_n < x\} = n^{-1} \sum\limits_{k=1}^{n} \delta(x - a_{nk} + b_{nk})$, следует утверждение леммы.

Обозначим через $\bar{\xi}_k$, $k \geqslant 1$ независимые симметризации ξ_k.

Лемма 3. При выполнении условия 3) теоремы последовательность $b_n^{-1} \sum\limits_{k: |a_{nk}| > \varepsilon} a_{nk} \bar{\xi}_k$ слабо компактна для произвольного наперед взятого $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Из слабой сходимости S_n следует слабая сходимость последовательности $\bar{S}_n = b_n^{-1} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk} \bar{\xi}_k$. Запишем $\bar{S}_n =$ $= b_n^{-1} \sum\limits_{k: |a_{nk}| > \varepsilon} a_{nk} \bar{\xi}_k + b_n^{-1} \sum\limits_{k: |a_{nk}| \leqslant \varepsilon} a_{nk} \bar{\xi}_k = \zeta_1 + \zeta_2$. Поскольку для независимых случайных величин ζ_1 и ζ_2 с нулевыми медианами справедливо неравенство $\mathbf{P}\{\zeta_1 + \zeta_2 > x\} \geqslant 2^{-1} \mathbf{P}\{\zeta_1 > x\}$, то лемма 3 доказана.

Лемма 4. При выполнении условий теоремы последовательность $b_n^{-1} \sum\limits_{k=1}^{n} \bar{\xi}_k$ слабо компактна.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано так, что $\pm\varepsilon$ — точки непрерывности $D(x)$ и $1 - G(\varepsilon) + G(-\varepsilon) > 0$. Воспользуемся таким легко проверяемым утверждением: последовательность случайных величин ξ_n слабо компактна тогда и только тогда, когда $r_n\xi_n \xrightarrow{P} 0$ для любой последовательности $r_n \to 0$. В таком случае

$$r_n b_n^{-1} \sum_{k:|a_{nk}|>\varepsilon} a_{nk}\bar{\xi}_k \xrightarrow{P} 0. \qquad (2)$$

Так как слагаемые в (2) равномерно малы, то (2) эквивалентно условию [1] $\sum\limits_{k:|a_{nk}|>\varepsilon} \mathrm{M}\alpha_{nk}^2(1+\alpha_{nk}^2)^{-1} \to 0$, $\alpha_{nk} = r_n b_n^{-1} a_{nk}\bar{\xi}_k$. Далее, при $x>0$, $|a_{nk}|>\varepsilon$, $b=\min(\varepsilon, a)$ справедливо неравенство $a_{nk}^2x^2(1+a_{nk}^2x^2)^{-1} \geqslant b^2x^2\,(1+a^2x^2)^{-1}$, и $\sum\limits_{k:|a_{nk}|>\varepsilon} \mathrm{M}\zeta_{nk}^2(1+\zeta_{nk}^2)^{-1} \to 0$, где $\zeta_{nk} = r_n b_n^{-1}\bar{\xi}_k$. Таким образом, $\sum\limits_{k:|a_{nk}|>\varepsilon} r_n b_n^{-1}\bar{\xi}_k \xrightarrow{P} 0$ или $|\varphi^2(\lambda \times r_n b_n^{-1})|^{2n(1-G(\varepsilon)-G(-\varepsilon))} \to 1$, где $\varphi(\lambda) = Me^{i\lambda\xi_1}$. Из положительности $1-G(\varepsilon)+G(-\varepsilon)$ и критерия сходимости к нулю последовательности сумм нормированных независимых случайных величин [1] получим, что $r_n b_n^{-1} \sum\limits_{k=1}^{n} \bar{\xi}_k \xrightarrow{P} 0$.

Лемма 5. Если последовательность постоянных c_{nk} удовлетворяет условиям $|c_{nk}| \leqslant c$, $n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\delta(x-c_{nk}) \Rightarrow \delta(x)$, а m_n — медиана $b_n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n} c_{nk}\xi_k$, то при выполнении условий теоремы $b_n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n} c_{nk}\xi_k - m_n \xrightarrow{P} 0$.

Доказательство. Извлечем из слабо компактной последовательности $b_n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\bar{\xi}_k$ слабо сходящуюся подпоследовательность $b_{n(r)}^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n(r)}\bar{\xi}_k \Rightarrow \xi$. Полагая $\chi(\lambda) = \mathrm{M}e^{i\lambda\bar{\xi}_1}$, $\psi(\lambda) = \mathrm{M}e^{i\lambda\xi}$, находим $n(r) \times \ln\chi(b_{n(r)}^{-1}\lambda) = \ln\psi(\lambda)(1+o(1))$ равномерно в любой ограниченной области изменения λ. Поэтому

$$\ln \mathrm{M}\exp\left\{i\lambda b_{n(r)}^{-1}\sum_{k=1}^{n(r)} c_{n(r)k}\bar{\xi}_k\right\} = n^{-1}(r)\sum_{k=1}^{n(r)}\ln\psi(\lambda c_{n(r)k}) + o(1) =$$

$$= \int_{-c}^{c} \ln\psi(\lambda x)\, d_x\left\{n^{-1}(r)\sum_{k=1}^{n(r)}\delta(x-c_{nk})\right\} + o(1) \to$$

$$\to \int_{-c} \ln \psi(\lambda x)\, d\delta(x) = 0,$$

или $b_{n(r)}^{-1} \sum_{k=1}^{n(r)} c_{n(r)k}\bar{\xi}_k \xrightarrow{P} 0.$

Поскольку значение предела не зависит от способа выбора подпоследовательности $n(r)$, то и вся последовательность $b_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} c_{nk}\bar{\xi}_k$ стремится к нулю по вероятности. Для завершения доказательства леммы достаточно применить неравенство симметризации.

Доказательство теоремы. Запишем

$$S_{2n} = b_n b_{2n}^{-1} \left[b_n^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{nk}\xi_{2k-1} - c_n \right) + b_n^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{nk}\xi_{2k} - c_n \right) + \right.$$

$$+ b_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} (a_{2n2k-1} - a_{nk})\xi_{2k-1} - m_{n1} +$$

$$\left. + b_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} (a_{2n2k} - a_{nk})\xi_{2k} - m_{n2} + 2c_n b_n^{-1} + m_{n1} + m_{n2} - b_n^{-1} c_{2n} \right], \tag{3}$$

где m_{n1} — медиана $b_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} (a_{2n2k-1} - a_{nk})\xi_{2k-1}$, m_{n2} — медиана $b_n^{-1} \times \sum_{k=1}^{n} (a_{2n2k} - a_{nk})\xi_{2k}$.

В силу леммы 1 $n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \delta(x - a_{2n2k-1}) \Rightarrow G(x)$ и $n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \delta(x - a_{2n2k}) \Rightarrow G(x)$. Используя лемму 2, получаем $n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \delta(x - a_{2n2k-1} + a_{nk}) \Rightarrow \delta(x)$, $n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \delta(x - a_{2n2k} + a_{nk}) \Rightarrow \delta(x)$. По лемме 5 $b_n^{-1} \times \sum_{k=1}^{n} (a_{2n2k-1} - a_{nk})\xi_{2k-1} - m_{n1} \xrightarrow{P} 0$ и $b_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} (a_{2n2k} - a_{nk})\xi_{2k} - m_{n2} \xrightarrow{P} 0.$

Так как по условию теоремы

$$\mathbf{P}\left\{ b_n^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{nk}\xi_{2k-1} - c_n \right) < x \right\} \Rightarrow F(x),$$

$$\mathbf{P}\left\{ b_n^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{nk}\xi_{2k} - c_n \right) < x \right\} \Rightarrow F(x),$$

то из (3) легко получить, переходя к пределу при $n\to\infty$, что $b_n b_{2n}^{-1}\to b$, $2c_n b_n^{-1}+m_{n1}+m_{n2}\to 2c$, и поэтому $F(x)=F^{2^*}(bx+c)$. Аналогично можно проверить, что для любого целого $r>0$ существуют постоянные b_r и c_r такие, что $F(x)=F^{r^*}(b_r x+c_r)$.

Теорема доказана.

Рассмотрим непрерывную функцию распределения

$$H(x)=\mathbf{P}\{\xi_1<x\}=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ 3x/16, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 1-3/2x+(-1)^n 3\cdot 2^{-2n-3}x+(-1)^{n+1}5\cdot 2^{-n-3}, & \\ \qquad 2^n\leqslant x\leqslant 2^{n+1}. & \end{cases}$$

Она не может принадлежать области притяжения никакого устойчивого закона, ибо выражение $(1-H(2^n))(1-H(2^{n+1}))^{-1}$ не имеет предела при $n\to\infty$. Вместе с тем при

$$a_{nk}=\begin{cases}1, & k\leqslant n/3\\ 1/2, & n/3<k\leqslant n\end{cases}$$

для сумм $b_n^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{nk}\xi_k-c_n\right)$ при определенных c_n и b_n будут выполняться условия сходимости к устойчивому закону с показателем $\alpha=1$, так как $1/3k(1-H(kx))+2/3\cdot k(1-H(2kx))=1/x$ для достаточно больших k и положительных x. Поэтому усилить теорему, а именно, доказать принадлежность $H(x)$ области притяжения устойчивого закона можно лишь при наличии дополнительной информации о $G(x)$.

Список литературы: 1. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М., «Наука», 1971, 414 с. 2. *Зингер А. А.* Предельные теоремы для нарастающих сумм независимых случайных величин, имеющих распределения ограниченного числа типов.— «Теория вероятностей и ее применения», 1971, 16, 4, с. 83—117. 3. *Закусило О. К.* Предельные теоремы для сумм Чезаро случайных величин.— «Теория вероятностей и математическая статистика», 1976, вып. 14, с. 42—45. 4. *Закусило О. К.* Некоторые свойства классов L_c предельных распределений.— «Теория вероятностей и математическая статистика», 1976, вып. 15, с. 68—73.

O. K. Zakusilo

ON STABILITY OF LIMIT DISTRIBUTIONS
OF SUMS OF WEIGHTED RANDOM VARIABLES

The paper deals with sums $S_n=b_n^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{nk}\xi_k-c_n\right)$ where ξ_k are independent identically distributed random variables. It is shown that in case $n^{-1}\times\sum_{k=1}^{n}\delta(x-a_{nk})\Rightarrow G(x)\not\equiv\delta(x)$, $\delta(x)=0$ if $x\leqslant 0$, $\delta(x)=1$ if $x>0$ the possible limit distributions for S_n are stable.

Поступила в редколлегию 30. 03 1977.