УДК 519.21

Ю. М. КАНИОВСКИЙ, инж.,
Институт кибернетики АН УССР

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ, ПОРОЖДЕННЫХ ПРОЦЕДУРОЙ РОББИНСА — МОНРО

В этой статье для процессов, порожденных процедурой Роббинса — Монро, получены условия сходимости в $D^l[0, T]$ к стационарному процессу. Приведен вид предельного процесса как интеграла по винеровскому процессу. Полученные результаты использованы при изучении асимптотических свойств процедур математической статистики из книги [1]. В процессе исследования применен метод, развитый в работах [1, 2].

Отметим, что в статье [3] с помощью методов книги [2] исследуются условия слабой сходимости в $D[0, T]$ случайных процессов, порожденных процедурой типа Роббинса — Монро (при зависимых наблюдениях).

Будем рассматривать, следуя работе [1], последовательность $X^{\zeta}(t)$, $t \geqslant 1$, определенную рекуррентно (обозначения в настоящей работе такие же, как в книгах [1, 2]): $X^{\zeta}(t+1) = X^{\zeta}(t) + a(t)\Phi(t+1, X^{\zeta}(t), \omega)$, $X^{\zeta}(1) = \zeta$, где ζ — F_1-измеримый вектор, $\{F_t\}$, $t \geqslant 1$ — семейство σ-алгебр, определенное в работе [1] на с. 49, $\Phi(t, x, \omega) = R(x) + G(t, x, \omega)$ удовлетворяет условиям (А) § 2.3 [1].

Для $n \geqslant 1$, $T > 0$ положим $\eta_n^{(T)}(t) = \sqrt{s}(X^{\zeta}(s) - x_0)$ при $\frac{s}{n} \leqslant e^t < \frac{s+1}{n} \leqslant e^T$.

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

1) $MG(t, x, \omega) = 0$, $t \geqslant 1$, $x \in E_l$;

2) $R(x) = B(x - x_0) + \delta(x)$, $\|\delta(x)\| = o(\|x - x_0\|)$ при $x \to x_0$, x_0 — единственное решение уравнения $R(x) = 0$;

3) $\lim\limits_{t \to \infty} ta(t) = a$, $a > 0$;

4) $\|R(x)\| \leqslant K_1 \|x - x_0\|$, $M\|G(t, x, \omega)\|^2 = \operatorname{sp} A(t, x) \leqslant K_2(1 + \|x\|^2)$;

5) матрица $A = aB + J/2$ устойчива;

6) $X^{\zeta}(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} x_0$ п.н.

7) $\lim\limits_{\substack{t \to \infty \\ x \to x_0}} \|A(t, x) - S_0\| = 0$, $\det S_0 \neq 0$;

8) $\lim\limits_{R \to \infty} \sup\limits_{\|x - x_0\| < \theta} \sup\limits_{t \geqslant 1} \int\limits_{\|G(t, x, \omega)\| > R} \|G(t, x, \omega)\|^2 P\{d\omega\} = 0$.

Тогда процессы $\eta_n^{(T)}(t)$ слабо сходятся в $D^l[0, T]$ при $n \to \infty$ к случайному процессу такого вида:

$$dZ(t) = AZ(t)\,dt + a\sqrt{S_0}\,dw(t); \tag{1}$$

$$Z(0) = N(0, S), \tag{2}$$

где $\sqrt{S_0}$ — неотрицательно определенный квадратный корень из S_0, являющийся симметричной матрицей; $w(t)$ — стандартный l-мерный винеровский процесс; $N(0, S)$ — нормальный случайный вектор с нулевым средним и ковариационной матрицей $S = a^2 \int\limits_0^{\infty} e^{Av} S_0 e^{A'v}\,dv$.

Доказательство. В силу устойчивости матрицы A можно выбрать $\varepsilon_1 > 0$ так, что при $\|x - x_0\| \leqslant \varepsilon_1$ для некоторой симметричной положительно определенной матрицы C имели место соотношения

$$\langle CR(x), x - x_0 \rangle \leqslant -\lambda \langle C(x - x_0), x - x_0 \rangle; \tag{3}$$

$$2a\lambda > 1. \tag{4}$$

Зададим последовательность $\{\varepsilon_m\}$, $m \geqslant 1$, $\varepsilon_m \downarrow 0$. Для произвольного $u > 0$ выберем последовательность положительных чисел $\{u_m\}$, $m \geqslant 1$ так, чтобы $\sum_{m=1}^{\infty} u_m = u$.

В силу сходимости $X^{\zeta}(t)$ к x_0 с вероятностью 1 можно построить последовательность номеров $\{N_k\}$, $k \geqslant 1$ такого вида:

$$N_1 = \min N : P\{\sup_{t \geqslant N} \| X^{\zeta}(t) - x_0 \| > \varepsilon_1\} < u_1,$$

$$N_k = \min N > N_{k-1} : P\{\sup_{t \geqslant N} \| X^{\zeta}(t) - x_0 \| > \varepsilon_k\} < u_k.$$

Определим $R_{\varepsilon_m}(x)$ и $G_{\varepsilon_m}(t, x, \omega)$ следующим образом:

$$R_{\varepsilon_m}(x) = \begin{cases} R(x) \text{ при } \|x - x_0\| \leqslant \varepsilon_m, \\ B(x - x_0) \text{ при } \|x - x_0\| > \varepsilon_m; \end{cases}$$

$$G_{\varepsilon_m}(t, x, \omega) = \begin{cases} G(t, x, \omega) \text{ при } \|x - x_0\| \leqslant \varepsilon_m, \\ G(t, x_0, \omega) \text{ при } \|x - x_0\| > \varepsilon_m. \end{cases}$$

Положим $\Phi_u(t, x, \omega) = R_u(t, x) + G_u(t, x, \omega)$,

$$\Phi_u(t, x, \omega) = \begin{cases} \Phi(t, x, \omega) \text{ при } t < N_1, \\ R_{\varepsilon_k}(x) + G_{\varepsilon_k}(t, x, \omega) \text{ при } N_k \leqslant t < N_{k+1}. \end{cases}$$

Рассмотрим последовательность $\{X_u^{\zeta}(t)\}$, $t \geqslant 1$, определенную рекуррентно: $X_u^{\zeta}(t+1) = X_u^{\zeta}(t) + a(t)\Phi_u(t+1, X_u^{\zeta}(t), \omega)$, $X_u^{\zeta}(1) = \zeta$.

Приведем две леммы, которые могут быть доказаны стандартными в стохастической аппроксимации методами (см. например [1]).

Лемма 1. Если имеют место соотношения 1)—5), то: а) $M\|X_u^{\zeta}(t) - x_0\|^2 = O(t^{-1})$; б) $X_u^{\zeta}(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} x_0$ п.н.

Лемма 2. Пусть выполнены соотношения 1) — 8), тогда $\sqrt{t}(X_u^{\zeta}(t) - x_0) \xrightarrow[t \to \infty]{\text{сл.}} N(0, S)$.

Положим $\eta_n^{(T)}(t, u) = \sqrt{s}(X_u^{\zeta}(s) - x_0)$ при $\frac{s}{n} \leqslant e^t < \frac{s+1}{n} \leqslant e^T$.

Лемма 3. Если выполнены соотношения 1)—8), то случайные процессы $\eta_n^{(T)}(t, u)$ слабо сходятся в $D^l[0, T]$ к процессу $Z(t)$.

Доказательство. Рассмотрим случайные величины $\xi_{nk}^{(u)} = \sqrt{n+k}(X_u^{\zeta}(n+k) - x_0)$, $0 \leqslant k \leqslant [ne^T] - n$. Обозначим

$$\| R_u(s, x) - B(x - x_0) \| = \delta^{(1)}(s, x); \tag{5}$$

$$\| A_u(s, x) - S_0 \| = \delta^{(2)}(s, x). \tag{6}$$

Тогда при $N_k \leqslant s < N_{k+1}$ имеем

$$\delta^{(1)}(s, x) \leqslant \max_{\|x-x_0\| \leqslant \varepsilon_k} \| R(x) - B(x - x_0) \|; \tag{7}$$

$$\delta^{(2)}(s, x) \leqslant \sup_{\substack{s \geqslant N_k \\ \|x-x_0\| \leqslant \varepsilon_k}} \| A(s, x) - S_0 \|. \tag{8}$$

В силу предположений 2) и 7) правые части (7) и (8) стремятся к 0 при $s \to \infty$.

Применим теорему 13 [2] (с. 276) к случайным величинам $\xi_{nk}^{(u)}$. В нашем случае $a_n^{(u)}(t, x)$ и $b_n^{(u)}(t, x)$ определены так:

$$a_n^{(u)}(t, x) = \ln^{-1}(1 + s^{-1})[(\sqrt{1+s^{-1}} - 1)x + a(s)\sqrt{s+1}R_u(s, xs^{-1/2} + x_0); \tag{9}$$

$$b_n^{(u)^2}(t, x) = \ln^{-1}(1 + s^{-1})(s + 1)a^2(s) A_u(s + 1, xs^{-1/2} + x_0), \tag{10}$$

где $\frac{s}{n} \leqslant e^t < \frac{s+1}{n} \leqslant e^T$.

Из (5) — (10) получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x} \sup\limits_{t\in[0,T]} (1 + \|x\|)^{-1} (\| a_n^{(u)}(t, x) - Ax \| + \| b_n^{(u)}(t, x) - a\sqrt{S_0} \|) = 0$.

Последнее равенство, лемма 1 и предположение 8) показывают, что условия теоремы 13 [2] выполнены. Использовав приведенную выше лемму 2 и замечание 2 [2] (с. 260), можно убедиться в том, что начальные условия имеют вид (2). Таким образом, сходимость частных распределений установлена.

Компактность последовательности $\eta_n^{(T)}(t, u)$ в $D^l[0, T]$ следует из теоремы 2 [2] (с. 254), леммы 1 и соотношений (9), (10).

Лемма доказана.

Теперь, чтобы доказать теорему, достаточно установить, что

$$P\{X^\zeta(s) \neq X_u^\zeta(s),\ s \geqslant 1\} \leqslant u. \tag{11}$$

Рассмотрим множество $\{X^\zeta(s) = X_u^\zeta(s),\ s \geqslant 1\} \supseteq \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}_k$, где $\mathfrak{M}_k = \{\sup\limits_{s \geqslant N_k} \| X^\zeta(s) - x_0 \| \leqslant \varepsilon_k\}$.

Отсюда имеем

$$P\{X^\zeta(s) = X_u^\zeta(s),\ s \geqslant 1\} \geqslant P\left\{\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}_k\right\} = 1 - P\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} {}^c\mathfrak{M}_k\right\} \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P\{{}^c\mathfrak{M}_k\} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} u_k = 1 - u,$$

т. е. неравенство (11) выполняется. Из (11) и леммы 3 следуют неравенства

$$P\{Z(t_1)<z_1,\ldots,Z(t_p)<z_p\}-u\leqslant \varliminf_{n\to\infty} P\{\eta_n^{(T)}(t_1)<z_1,\ldots,\eta_n^{(T)}(t_p)<$$
$$<z_p\}\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} P\{\eta_n^{(T)}(t_1)<z_1,\ldots,\eta_n^{(T)}(t_p)<z_p\}\leqslant$$
$$\leqslant P\{Z(t_1)<z_1,\ldots,Z(t_p)<z_p\}+u, \qquad (12)$$

где $a<b$, если $a_i<b_i$, $i=1,\ldots,l$.

В силу произвольности $u>0$ неравенства (12) означают, что частные распределения $\eta_n^{(T)}(t)$ слабо сходятся к соответствующим частным распределениям процесса $Z(t)$.

Слабая компактность мер, соответствующих процессам $\eta_n^{(T)}(t)$, может быть проверена с учетом леммы 3 и соотношения (11).

Замечания. 1. Требование невырожденности матрицы S_0 не является существенным, его можно опустить.

2. Явный вид процесса $Z(t)$ как интеграла по винеровскому процессу такой [4]:

$$Z(t)=e^{At}\left(N(0,S)+a\int_0^t e^{-Au}\sqrt{S_0}\,dw(u)\right).$$

3. Для всякого измеримого на $D^l[0,T]$ и непрерывного на $C^l[0,T]$ функционала $f(x(\cdot))$ распределение $f(\eta_n^{(T)}(\cdot))$ сходится к распределению $f(Z(\cdot))$ при $n\to\infty$.

4. Теорема, подобная теореме 1, может быть доказана аналогичными приемами для процедуры, определенной следующим рекуррентным соотношением: $X^{\zeta}(t+1)=\pi_X[X^{\zeta}(t)+a(t)\Phi(t+1,X^{\zeta}(t),\omega)]$, $X^{\zeta}(1)=\zeta$, где X—выпуклое замкнутое множество в E_l, $\pi[\cdot]$— оператор проектирования на множество X. При этом нужно требовать выполнения условий теоремы 1 на X и дополнительно положить, что точка x_0 — внутренняя для множества X.

Рассмотрим, следуя [1], процедуры оценки в E_l неизвестного параметра x_0^* по наблюдениям Υ_n, $n\geqslant 1$ случайной величины, имеющей плотность распределения $f(y,x_0)$ относительно меры $d\mu(y)$:

$$V_{n+1}=\pi_X\left[V_n+\frac{a}{n+1}\Upsilon_n-m_1(V_n))\right];$$
$$Z_{n+1}=\pi_X\left[Z_n+\frac{1}{n+1}I^{-1}(Z_n)\frac{\nabla_z f(\Upsilon_{n+1},Z_n)}{f(\Upsilon_{n+1},Z_n)}\right];$$
$$V_0=\text{const},\quad Z_0=\text{const},$$

где $m_1(x)=\int yf(y,x)\,d\mu(y)$, $I(x)$ — информационная матрица Фишера, соответствующая плотности $f(y,x)$. Следующие теоремы являются частными случаями теоремы 1.

Теорема 2. Предположим, что выполнены такие условия при $x \in X$:

1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \sup\limits_{\varepsilon < \|x - x_0\| < \varepsilon^{-1}} \langle m_1(x_0) - m_1(x),\ x - x_0 \rangle < 0$;

2) $\| m_1(x) \| \leqslant K_1 \| x \| + K_2$;

3) $m_1(x_0) - m_1(x) = -\nabla m_1(x)(x - x_0) + \delta(x)$, где $\| \delta(x) \| = o\|(x - x_0\|)$ при $x \to x_0$;

4) матрица $A = -a\nabla m_1(x) + J/2$ — устойчива.

Тогда случайные процессы $V_n^{(T)}(t) = \sqrt{s}(V_n - x_0)$ при $\frac{s}{n} \leqslant e^t < \frac{s+1}{n} \leqslant e^T$ слабо сходятся в $D^l[0, T]$ к процессу $V(t) = e^{At}\left[N(0, Q) + a\int\limits_0^t e^{-Au}(m_2(x_0))^{1/2} dw(u)\right]$, где $m_2(x) = \int (y - m_1(x))(y - m_1(x))' \times f(x, y) d\mu(y)$, $Q = a^2 \int\limits_0^\infty e^{Av} m_2(x_0)\, e^{A'v} dv$.

Теорема 3. Пусть имеют место следующие условия на X: 1) функции $M(x) = \int \ln \frac{f(y, x)}{f(y, x_0)} f(y, x_0)\, d\mu(y)$ и $f(y, x)$ в окрестности множества X дважды дифференцируемы по x, а выражение для $M(x)$ и $\int f(y, x)\, d\mu(y) = 1$ можно дважды дифференцировать под знаком интеграла;

2) матрица $I(x)$ непрерывна и невырождена;

3) $\| D(X) \| \leqslant K_1 + K_2 \| x \|^2$, $\lim\limits_{x \to x_0} D(x) = D(x_0)$, где $D(x) = I^{-1}(x) \times \int ([f(y, x)]^{-1} \nabla_x f(y, x) - \nabla M(x))([f(y, x)]^{-1} \nabla_x f(y, x) - \nabla M(x))' f \times (y, x_0)\, d\mu(y) I^{-1}(x)$;

4) $\langle I^{-1}(x) \nabla M(x),\ x - x_0 \rangle < 0$;

5) $\int\limits_{\|\nabla_x f(y, x)\| \geqslant R f(y, x)} \| \nabla_x f(y, x) \|^2 f^{-2}(y, x) f(y, x_0)\, d\mu(y) \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$ равномерно по $\| x - x_0 \| \leqslant \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Тогда случайные процессы $Z_n^{(T)}(t) = \sqrt{s}(Z_s - x_0)$ при $\frac{s}{n} \leqslant e^t < \frac{s+1}{n} \leqslant e^T$ слабо сходятся в $D^l[0, T]$ к процессу

$$Z(t) = e^{-t/2} I^{-1/2}(x_0)(N(0, J) + w(1 - e^{-t})).$$

Список литературы: 1. *Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М., «Наука», 1972, 304 с. 2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 3. М., «Наука», 1975, 496 с. 3. *Анисимов В. В., Анисимова З. П.* О сходимости случайных процессов, порожденных процедурой типа Роббинса — Монро.— «ДАН УССР, Сер. А.», 1977, № 12. 4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. К., «Наукова думка», 1968, 354 с.

Yu. M. Kaniovsky

ON A LIMIT BEHAVIOR OF THE RANDOM PROCESSES GENERATED BY THE ROBBINS — MONRO PROCEDURE

The conditions of weak convergence in $D^l[0, T]$ to the stationary Gaussian Markov process are given for processes $\eta_n^{(T)}(t) = \sqrt{s}\,(X^{\zeta}(s) - x_0)$ if $\frac{s}{n} \leqslant e^t < \frac{s+1}{n} \leqslant [ne^T]$, where $X^{\zeta}(s)$ is the s—iteration of the Robbins-Monro procedure as $n \to \infty$. Some statistical applications are considered.

Поступила в редколлегию 8. 02 1977.