величин при наличии нормирующего множителя n^{-2}, изучались в работе [5].

В заключение автор благодарит Д. С. Сильвестрова за руководство работой.

Список литературы: 1. *Dharmadnikari S. W., Yogdeo K.* Bounds on moments of certain random variables.— «Annals of Mathem. Stat»., 1969, 40, N 4, p. 1506—1508. 2. *Billingsley P.* Convergence of probability measures. N. Y., 1968. 3. *Чжун Кай-лай.* Однородные цепи Маркова. М., «Мир», 1964. 4. *Сильвестров Д. С.* Автореферат докт. дис. Киевский университет, 1972. 5. *Полещук В. С.* Предельные распределения для двойных сумм случайных величин, определенных на счетной цепи Маркова.— «Теория вероятностей и математическая статистика», 1975, вып. 13, с. 131—141.

Yu. S. Mishura

ON CONVERGENCE OF THE STOCHASTIC FIELDS OF STEPPED SUMS IN UNIFORM TOPOLOGY

The conditions of convergence of the stochastic fields that are the fields of the stepped sums in uniform topology are considered and applied to the sums of random variables defined on Markov chain.

Поступила в редколлегию 25.02 1977.

УДК 519.21

М. П. МОКЛЯЧУК, ассист.,
М. И. ЯДРЕНКО, канд. физ.-мат. наук,
Киевский университет

ЛИНЕЙНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ПО ВРЕМЕНИ ИЗОТРОПНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА СФЕРЕ II.

Настоящая статья является продолжением работы [1].

4. Задачи линейной экстраполяции для однородных по времени изотропных случайных полей на сфере. Предположим, что на множестве $E \subset R \times S_n$ наблюдается однородное по времени изотропное случайное поле на сфере $\xi(t, x)$. Задача линейной экстраполяции поля $\xi(t, x)$ заключается в том, чтобы по заданным наблюдениям поля найти линейную оценку неизвестного значения поля в точке $(y, x) \overline{\in} E$ с минимальным среднеквадратичным отклонением от истинного значения. Такая оценка — это проекция $\hat{\xi}(y, x)$ в гильбертовом пространстве H случайных величин второго порядка [2] величины $\xi(y, x)$ на замкнутое линейное многообразие $H_\xi(E)$ в H, порожденное величинами $\xi(u, v)$ при $(u, v) \in E$, и определяется она единственным образом из уравнения ортогональности величин $\xi(y, x) - \hat{\xi}(y, x)$ и $\xi(u, v)$, $(u, v) \in E$ в пространстве H

$$M(\xi(y, x) - \widehat{\xi}(y, x))\,\xi(u, v) = 0, \quad (u, v) \in E. \tag{4.1}$$

А. Предположим, что поле $\xi(t, x)$ наблюдается на множестве $E = T \times S_n$, где T — некоторое подмножество $R = (-\infty, \infty)$. Используя свойства спектрального разложения однородного по времени изотропного случайного поля на сфере [1], замкнутое линейное многообразие $H_\xi(E)$ можно представить в таком виде:

$$H_\xi(E) = \bigoplus_{m \in K(F)} \bigoplus_{l=1}^{h(m,n)} H_{\xi_m^l}(T), \quad K(F) = \{m : b_m(0) > 0\},$$

где $H\xi_m^l(T)$ — замкнутое линейное многообразие в H, порожденное значениями стационарного случайного процесса $\xi_m^l(t)$ в точках множества T. Из этой формулы вытекает, что оптимальный линейный прогноз имеет вид

$$\widehat{\xi}(y, x) = \sum_{m \in K(F)} \sum_{l=1}^{h(m,n)} S_m^l(x)\, \widehat{\xi_m^l}(y), \tag{4.2}$$

где $\widehat{\xi_m^l}(y)$ — проекция $\xi_m^l(y)$ на $H_{\xi_m^l}(T)$.

Следовательно, справедлива такая теорема.

Теорема 5. Для того чтобы решить задачу линейной экстраполяции для однородного по времени изотропного случайного поля на сфере $\xi(t, x)$ по множеству вида $E = T \times S_n$, необходимо и достаточно решить задачу линейной экстраполяции для каждого стационарного случайного процесса $\xi_m^l \in (t)$, $m \in K(F)$, $l = \overline{1, h(m, n)}$ по множеству T. Оптимальная оценка неизвестных значений поля $\xi(t, x)$ вычисляется по формуле (4.2).

Эта теорема показывает, в частности, как можно применить методы Н. Винера [2, 3] и А. М. Яглома [4] для решения задач экстраполяции поля $\xi(t, x)$ по множеству $E = T \times S_n$ при $T = [0, u]$ или $T = (-\infty, u]$, где u — некоторое фиксированное число, а также дает способ применения общих результатов теории прогнозирования стационарных случайных процессов [2, 5] к решению соответствующих задач для поля $\xi(t, x)$.

Пример 7. Пусть $\xi(t, x)$ — однородное по времени изотропное случайное поле на сфере с корреляционной функцией

$$B(t, \cos\langle x, y\rangle) = \frac{1}{\omega_n} \sum_{m=0}^{\infty} h(m, n) \frac{C_m^{(n-2)/2}(\cos\langle x, y\rangle)}{C_m^{(n-2)/2}(1)} b_m e^{-m|t|},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} h(m, n) b_m < \infty. \tag{4.3}$$

Для такого поля плотность $f_m(\lambda)$ меры $dF_m(\lambda)$ имеет вид $f_m(\lambda) = m b_m \pi^{-1}(m^2 + \lambda^2)^{-1}$, $m = 0, 1, \ldots$ и выполняются все условия, при которых можно применять метод А. М. Яглома для решения задачи экстраполяции поля $\xi(t, x)$ по множеству $E = \{(t, x) : t \leqslant u,$

$x \in S_n\}$. В силу теоремы 5 оптимальная оценка значения поля в точке $(u+\tau, x)$ равна

$$\hat{\xi}(u+\tau, x)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)} S_m^l(x)\, e^{-m\tau}\xi_m^l(u).$$

Если учесть соотношения (1.3) и (2.6) [1], то оптимальную оценку можно записать в таком виде:

$$\hat{\xi}(u+\tau, x)=\frac{1}{\omega_n}\sum_{m=0}^{\infty} h(m, n)\, e^{-m\tau}\int_{S_n}\frac{C_m^{(n-2)/2}(\cos\langle x, y\rangle)}{C_m^{(n-2)/2}(1)}\times$$
$$\times\,\xi(u, y)\, m_n(dy).$$

Б. Метод А. М. Яглома можно использовать и при решении задач экстраполяции поля $\xi(t, x)$ по множеству вида $E_1^M=\{(t, x): : u-T\leqslant t\leqslant u,\ x=x_k\in S_n,\ k=\overline{1, M}\}$. Будем предполагать, что спектральная мера поля $\xi(t, x)$ абсолютно непрерывна и функция $f_{(x,x)}(\lambda)$ ограничена. Здесь $f_{(x,y)}(\lambda)$ — плотность меры $dF_{(x,y)}(\lambda)$, определенной по формуле

$$dF_{(x,y)}(\lambda)=\frac{1}{\omega_n}\sum_{m=0}^{\infty} h(m, n)\frac{C_m^{(n-2)/2}(\cos\langle x, y\rangle)}{C_m^{(n-2)/2}(1)}\, dF_m(\lambda).$$

В силу свойств спектрального разложения поля $\xi(t, x)$ [1] оптимальная оценка значения поля в точке $(u+\tau, x)$ будет иметь вид

$$\hat{\xi}(u+\tau, x)=\sum_{k=1}^{M}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)} S_m^l(x_k)\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\lambda}\Phi_k^\tau(\lambda)\, Z_m^l(d\lambda). \qquad (4.4)$$

Функции $\Phi_k^\tau(\lambda)$ принадлежат замкнутому линейному многообразию в $L_2(f_{(x,x)}(\lambda)\, d\lambda)$, порожденному функциями $e^{it\lambda}$, $0\leqslant t\leqslant T$ и определяются из условия $\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_j(\lambda)\, e^{it\lambda}d\lambda=0$, $j=\overline{1, M}$, $0\leqslant t\leqslant T$, где $\Psi_j(\lambda)=e^{i\tau\lambda}f_{(x,x_j)}(\lambda)-\sum_{k=1}^{M}\Phi_k^\tau(\lambda)\, f_{(x_k,x_j)}(\lambda)$. В силу ограниченности $f_{(x,x)}(\lambda)$ функции $\Phi_k^\tau(\lambda)$ будут удовлетворять всем требованиям, если выполняются условия [4]:

1) $\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_k^\tau(\lambda)|^2 f_{(x,x)}(\lambda)\, d\lambda<\infty$, $k=\overline{1, M}$;

2) функции $\Phi_k^\tau(\lambda)$ являются граничными значениями целых функций $\Phi_k^\tau(z)$, представимых в виде

$$\Phi_k^\tau(z)=\Phi_k^{\tau,1}(z)+e^{-iTz}\Phi_k^{\tau,2}(z), \qquad (4.5)$$

где $\Phi_k^{\tau,1}(z)$, $\Phi_k^{\tau,2}(z)$ — рациональные функции;

3) функции $\Psi_j(\lambda)$ являются граничными значениями функций $\Psi_j(z)$, представимых в виде $\Psi_j(z)=\Psi_j^{(1)}(z)+e^{-iTz}\Psi_j^{(2)}(z)$, где $\Psi_j^{(1)}(z)$, $\Psi_j^{(2)}(z)$ аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях функции, убывающие при $|z|\to\infty$ быстрее $|z|^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$.

Если корреляционную функцию случайного поля $\xi(t, x)$ можно представить в виде

$$B(t, \cos\langle x, y\rangle)=R_1(t)\,R_2(\cos\langle x, y\rangle) \tag{4.6}$$

и

$$f_1(\lambda)=A\frac{\left|\prod_{k=1}^{q}(\lambda-\alpha_k)\right|^2}{\left|\prod_{j=1}^{p}(\lambda-\beta_j)\right|^2},\quad q<p,\quad \operatorname{Im}\alpha_k>0,\quad \operatorname{Im}\beta_j>0, \tag{4.7}$$

то можно положить

$$\Psi_j^{(1)}(\lambda)=\left[e^{i\tau\lambda}R_2(\cos\langle x, x_j\rangle)-\sum_{k=1}^{M}\Phi_k^{\tau,1}(\lambda)\,R_2(\cos\langle x_k, x_j\rangle)\right]f_1(\lambda),$$

$$\Psi_j^{(2)}(\lambda)=-\sum_{k=1}^{M}\Phi_k^{\tau,2}(\lambda)\,R_2(\cos\langle x_k, x_j\rangle)\,f_1(\lambda).$$

Условия 1)—3) будут выполняться, если

$$\Phi_k^{\tau,l}(\lambda)=\varphi_k^{(l)}(\lambda)\left[\prod_{j=1}^{q}(\lambda-\alpha_j)(\lambda-\bar{\alpha}_j)\right]^{-1},\quad k=\overline{1, M},\quad l=1, 2, \tag{4.8}$$

где $\varphi_k^{(l)}(\lambda)$ — полиномы степени не выше $p+q-1$, коэффициенты которых определяются из системы уравнений

$$\frac{d^r}{d\lambda^r}\left[\varphi_k^{(1)}(\lambda)+e^{-iT\lambda}\varphi_k^{(2)}(\lambda)\right]\Big|_{\lambda=\alpha_m,\bar{\alpha}_m}=0,$$

$$\frac{d^v}{d\lambda^v}\left[e^{i\tau\lambda}R_2(\cos\langle x, x_j\rangle)\left|\prod_{k=1}^{q}(\lambda-\alpha_k)\right|^2-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{M}\varphi_k^{(1)}(\lambda)\,R_2(\cos\langle x_k, x_j\rangle)\right]\Bigg|_{\lambda=\beta_l}=0,$$

$$\frac{d^v}{d\lambda^v}\varphi_k^{(2)}(\lambda)\Big|_{\lambda=\bar{\beta}_l}=0, \tag{4.9}$$

$$r=\overline{0, r_m-1},\ m=\overline{1,\sigma},\ \sum_{m=1}^{\sigma} r_m=q,\ v=\overline{0, b_l-1},\ l=\overline{1,\delta},$$

$$\sum_{l=1}^{\delta} b_l=p,\ j=\overline{1, M},$$

где r_m — кратность α_m, а b_l — кратность β_l.

Функции $\Phi_k^\tau(\lambda)$ при $\tau<-T$ можно получить по формуле

$$\Phi_k^\tau(\lambda)=e^{-iT\lambda}\overline{\Phi_k^{-\tau-T}(\lambda)}, \tag{4.10}$$

где $\Phi_k^{-\tau-T}(\lambda)$ — функции, полученные из спектральной характеристики экстраполяции при $\tau>0$ при помощи замены параметра τ.

При $-T\leqslant\tau\leqslant 0$ достаточно положить $\Psi_j(\lambda)\equiv 0$, чтобы все условия выполнялись. В этом случае функции $\Phi_k^\tau(\lambda)$ будут иметь вид $\Phi_k^\tau(\lambda)=e^{i\tau\lambda}Q_k(x)$, где $Q_k(x)$ — решение системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{M} Q_k(x) R_2(\cos\langle x_k, x_j\rangle)=R_2(\cos\langle x, x_j\rangle),\quad j=\overline{1, M}. \tag{4.11}$$

Следовательно, при $-T\leqslant\tau\leqslant 0$

$$\widehat{\xi}(u+\tau, x)=\sum_{k=1}^{M} Q_k(x)\,\xi(u+\tau, x_k). \tag{4.12}$$

Учитывая, что функции $\Phi_k^\tau(\lambda)$, $\tau>0$ можно представить в виде [4]

$$\Phi_k^\tau(\lambda)=\sum_{r=0}^{p-q-l}(A_{r,k}+e^{-iT\lambda}B_{r,k})(i\lambda)^r+\int_0^T e^{-is\lambda}C_k(s)\,ds,$$

формулу оптимального прогноза (4.4) при $\tau>0$ можно записать в таком виде:

$$\widehat{\xi}(u+\tau, x)=\sum_{k=1}^{M}\left\{\sum_{r=0}^{p-q-1}\left[\frac{d^r}{du^r}\xi(u, x_k)A_{r,k}+\frac{d^r}{du^r}\xi(u-T, x_k)B_{r,k}\right]+\right.$$

$$\left.+\int_0^T C_k(s)\,\xi(u-s, x_k)\,ds\right\}. \tag{4.13}$$

Мы показали, что справедлива такая теорема.

Теорема 6. Если спектральная мера однородного по времени изотропного случайного поля на сфере абсолютно непрерывна и функция $f_{(x,x)}(\lambda)$ ограничена, то оптимальный прогноз значения поля в точке $(u+\tau, x)$, $\tau>0$ по наблюдениям на множестве точек E_1^M вычисляется по формуле (4.4). Функции $\Phi_k^\tau(\lambda)$, $k=\overline{1, M}$ определяются достаточными условиями 1)—3). В том случае, когда корреляционная функция поля удовлетворяет условиям (6), (7) функции $\Phi_k^\tau(\lambda)$, $k=\overline{1, M}$ вычисляются в явном виде ((5), (8), (9)). Оптимальный прогноз при $\tau>0$ можно вычислять и по формуле (4.13). Функции $\Phi_k^\tau(\lambda)$ при $\tau<-T$ вычисляются по формуле (4.10). При $-T\leqslant\tau\leqslant 0$ оптимальный прогноз вычисляется по формуле (4.12), где $Q_k(x)$ — решение системы уравнений (4.11).

Пример 8. Пусть $\xi(t, x)$ — однородное по времени изотропное случайное поле на сфере, корреляционная функция которого имеет вид (4.6)

$$R_2(\cos\langle x, y\rangle)=\frac{1}{\omega_n}\sum_{m=0}^{\infty} h(m, n)\frac{C_m^{(n-2)/2}(\cos\langle x, y\rangle)}{C_m^{(n-2)/2}(1)}a_m;$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} h(m, n)\,a_m<\infty,\quad f_1(\lambda)=(\lambda^2+\alpha^2)(\lambda^4+\alpha^4)^{-1},$$

и поле наблюдается на множестве E_1^1. Тогда $\Phi_1^{\tau,1}(\lambda)=A_1+B_1(\lambda-i\alpha)^{-1}+C_1(\lambda+i\alpha)^{-1}$, $\Phi_1^{\tau,2}(\lambda)=A_1'+B_1'(\lambda-i\alpha)^{-1}+C_1'(\lambda+i\alpha)^{-1}$, где

$$D_1=\frac{R_2(\cos\langle x, x_1\rangle)}{R_2(\cos\langle x, x\rangle)}=\frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty} h(m, n)\dfrac{C_m^{(n-2)/2}(\cos\langle x, x_1\rangle)}{C_m^{(n-2)/2}(1)}a_m}{\sum\limits_{m=0}^{\infty} h(m, n)\,a_m},$$

$A_1=D_1A$, $B_1=D_1B$, $C_1=D_1C$, $A_1'=D_1A'$, $B_1'=-e^{-\alpha T}B_1$, $C_1'=-e^{\alpha T}C_1$, а коэффициенты A, B, C, A' определены в работе [4] (с. 347). Формулы оптимального прогноза в этом случае будут такие:

$$\hat\xi(u+\tau, x)=A_1\xi(u, x_1)+A_1'\xi(u-T, x_1)+$$
$$+\int_0^T(iB_1e^{-\alpha s}+iC_1e^{\alpha s})\,\xi(u-s, x_1)\,ds,\quad \tau>0;$$

$$\hat\xi(u+\tau, x)=A_1\xi(u-T, x_1)+A_1'\xi(u, x_1)+$$
$$+\int_0^T(iB_1e^{-\alpha s}+iC_1e^{\alpha s})\,\xi(u-T-s, x_1)\,ds,\quad \tau<-T;$$

$$\hat\xi(u+\tau, x)=D_1\xi(u+\tau, x_1),\quad -T\leqslant\tau\leqslant 0.$$

В. Предположим, что поле $\xi(t, x)$ наблюдается в точках множества $E_2^M=\{(t, x): t\in N,\ -\infty<t<\infty,\ x=x_k\in S_n,\ k=\overline{1, M}\}$.

Из спектрального представления поля $\xi(t, x)$ вытекает, что оптимальная линейная оценка значения поля в точке $(y, x) \in E_2^M$ будет иметь вид

$$\hat{\xi}(y, x) = \sum_{k=1}^{M} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} S_m^l(x_k) \int_{-\infty}^{\infty} C_k(\lambda) Z_m^l(d\lambda), \qquad (4.14)$$

где $C_k(\lambda)$ — 2π-периодические функции, принадлежащие пространству $L_2(dF^0_{\langle x,x\rangle}(\lambda))$, $dF^s_{\langle x,y\rangle}(\lambda)$ — мера, полученная из спектральной меры поля по формуле

$$dF^s_{\langle x,y\rangle}(\lambda) = \frac{1}{w_n} \sum_{m=0}^{\infty} h(m, n) \frac{C_m^{(n-2)/2}(\cos\langle x, y\rangle)}{C_m^{(n-2)/2}(1)} dF_m^s(\lambda), \quad (4.15)$$

$$dF_m^s(\lambda) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{i\cdot 2\pi ps} d\,[F_m(\lambda + 2\pi p) - F_m(2\pi p - \pi)].$$

Функции $C_k(\lambda)$ определяются из уравнения ортогональности (4.1), которое в данном случае приобретает вид

$$\frac{1}{w_n} \sum_{k=1}^{M} \sum_{m=0}^{\infty} h(m, n) \frac{C_m^{(n-2)/2}(\cos\langle x_k, x_j\rangle)}{C_m^{(n-2)/2}(1)} \int_{-\infty}^{\infty} C_k(\lambda) e^{-iv\lambda} dF_m(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{w_n} \sum_{m=0}^{\infty} h(m, n) \frac{C_m^{(n-2)/2}(\cos\langle x, x_j\rangle)}{C_m^{n-2/2}(1)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(y-v)\lambda} dF_m(\lambda),$$

$$j = \overline{1, M}, \; v \in N, \; -\infty < v < \infty.$$

Используя введенные обозначения, это уравнение можно записать так:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iv\lambda} \sum_{k=1}^{M} C_k(\lambda)\, dF^0_{\langle x_k, x_j\rangle}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(y-v)\lambda} dF^y_{\langle x, x_j\rangle}(\lambda),$$

$$j = \overline{1, M}, \; v \in N, \; -\infty < v < \infty.$$

Мера $dF^y_{\langle x,s\rangle}(\lambda)$ абсолютно непрерывна относительно меры $dF^0_{\langle x,x\rangle}(\lambda)$, поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=1}^{M} C_k(\lambda) \frac{dF^0_{\langle x_k, x_j\rangle}(\lambda)}{dF^0_{\langle x,x\rangle}(\lambda)} - e^{iy\lambda} \frac{dF^y_{\langle x, x_j\rangle}(\lambda)}{dF^0_{\langle x,x\rangle}(\lambda)} \right] e^{-iv\lambda} dF^0_{\langle x,x\rangle}(\lambda) = 0,$$

$$j = \overline{1, M}, \; v \in N, \; -\infty < v < \infty.$$

Так как это равенство возможно тогда и только тогда, когда почти всюду на $[-\pi, \pi]$ по мере $dF^0_{(x,x)}(\lambda)$

$$\sum_{k=1}^{M} C_k(\lambda)\frac{dF^0_{(x_k,x_j)}(\lambda)}{dF^0_{(x,x)}(\lambda)} = e^{ig\lambda}\frac{dF^g_{(x,x_j)}(\lambda)}{dF^0_{(x,x)}(\lambda)}, \quad j=\overline{1, M}, \quad (4.16)$$

то мы получили систему M уравнений, из которой находятся функции $C_k(\lambda)$, $k=\overline{1, M}$ при $\lambda \in [-\pi, \pi]$. В силу того, что $C_k(\lambda)$, $k=\overline{1, M}$ 2π-периодические, этого достаточно для их вычисления. При $M=1$

$$C_1(\lambda) = e^{ig\lambda}\frac{dF^g_{(x,x_1)}(\lambda)}{dF^0_{(x,x)}(\lambda)}. \quad (4.17)$$

Теорема 7. Оптимальный линейный прогноз значения однородного по времени изотропного случайного поля на сфере $\xi(t, x)$ в точке $(y, x) \overline{\in} E_2^M$ по наблюдениям поля в точках множества E_2^M вычисляется по формуле (4.14). Функции $C_k(\lambda)$, $k=\overline{1, M}$ 2π-периодические и для $\lambda \in [-\pi, \pi]$ определяются из системы уравнений (4.16). В том случае, когда меры $dF_m(\lambda)$, $m=0, 1, 2, \ldots$ абсолютно непрерывны по мере Лебега, функции $C_k(\lambda)$, $k=\overline{1, M}$ находятся из системы уравнений (почти для всех $\lambda \in [-\pi, \pi]$ по мере Лебега)

$$\sum_{k=1}^{M} C_k(\lambda) f^0_{(x_k,x_j)}(\lambda) = e^{iy\lambda} f^g_{(x,x_j)}(\lambda), \quad j=\overline{1, M}.$$

Следствие 1. Если функции $C_k(\lambda)$, $k=\overline{1, M}$ можно представить как сумму абсолютно сходящегося ряда Фурье $C_k(\lambda) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_k(s)\times$ $\times e^{is\lambda}$, $\sum_{s=-\infty}^{\infty} |c_k(s)| < \infty$, то формулу линейной экстраполяции (4.14) можно записать в виде $\hat{\xi}(y, x) = \sum_{k=1}^{M}\sum_{s=-\infty}^{\infty} c_k(s)\,\xi(s, x_k)$.

Пример 9. Пусть $\xi(t, x)$ — однородное по времени изотропное случайное поле на сфере с корреляционной функцией (4.3). Тогда

$$f^y_m(\lambda) = \frac{b_m e^{-i\{y\}\lambda}\,[e^{i\lambda}\,\mathrm{sh}\,\{y\}\,m + \mathrm{sh}\,(1-\{y\})\,m]}{\pi e^m\,|e^{i\lambda} - e^{-m}|^2},$$

$$f^0_m(\lambda) = b_m(1-e^{-2m})(2\pi)^{-1}\,|e^{i\lambda} - e^{-m}|^{-2}.$$

Подставляя эти выражения в формулы (4.15), (4.17), (4.14), получаем оптимальную оценку значения поля в точке $(y, x) \overline{\in} E_2^1$ по наблюдениям в точках множества E_2^1.

Г. Рассмотрим задачу линейной экстраполяции однородного по времени изотропного случайного поля на сфере с дискретным временем по наблюдениям в точках множества $E_3^M = \{(m, x) : m \leqslant t, x = x_k \in S_n, k = \overline{1, M}\}$. Если предположить, что оптимальная оценка значения поля в точке $(t+q, x)$, $q > 0$ имеет вид $\hat{\xi}(t+q, x) = \sum_{k=1}^{M} \sum_{s=-\infty}^{t} c_k^t(s) \xi(s, x_k)$ и выполняются условия, при которых этот ряд сходится в среднем квадратичном, то уравнение ортогональности (4.1) можно представить следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{M} \sum_{s=-\infty}^{t} c_k^t(s) B(s-m, \cos\langle x_k, x_j\rangle) = B(t+q-m, \cos\langle x, x_j\rangle),$$

$$m \in N, \ m \leqslant t, \ j = \overline{1, M}.$$

Замена переменных $t - m = u$, $t - s = v$ позволяет записать это уравнение так:

$$\sum_{k=1}^{M} \sum_{v=0}^{\infty} c_k(v) B(u-v, \cos\langle x_k, x_j\rangle) = B(u+q, \cos\langle x, x_j\rangle),$$

$$u \in N, \ u \geqslant 0, \ j = \overline{1, M}. \tag{4.18}$$

Здесь $c_k(v) = c_k^t(t-v)$, так как $c_k^t(t-v)$ не зависит от t.

Формулу линейной экстраполяции теперь можно записать в таком виде:

$$\hat{\xi}(t+q, x) = \sum_{k=1}^{M} \sum_{v=0}^{\infty} c_k(v) \xi(t-v, x_k). \tag{4.19}$$

Предположим, что меры $dF_m(\lambda)$ абсолютно непрерывны и выполняются условия

$$f_{\langle x,x\rangle}(\lambda) = |h(\lambda)|^2; \ f_{\langle x_k,x_j\rangle}(\lambda) / \overline{h(\lambda)} = (2\pi)^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} g_{\langle x_k,x_j\rangle}(m) e^{-im\lambda},$$

$$k, j = \overline{1, M}.$$

Это имеет место в том случае, когда $\int_{-\pi}^{\pi} \log f_{\langle x_k,x_j\rangle}(\lambda) d\lambda > -\infty$, $k, j = \overline{1, M}$. Учитывая, что $f_{\langle x,y\rangle}(\lambda)/\overline{h(\lambda)} \in L_2[-\pi, \pi]$, корреляционную функцию поля можно представить следующим образом:

$$B(u, \cos\langle x, y\rangle) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iu\lambda} f_{\langle x,y\rangle}(\lambda) d\lambda = \sum_{m=0}^{\infty} g_{\langle x,y\rangle}(m+u) \overline{g_{\langle x,x\rangle}(m)}.$$

Отсюда вытекает, что уравнение (4.18) можно записать так:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{M}\sum_{v=0}^{\infty} c_k(v)\, g_{(x_k,x_j)}(m+u-v)-g_{(x,x_j)}(u+m+q)\right]\times$$
$$\times\overline{g_{(x,x)}(m)}=0,\quad u\geqslant 0,\ j=\overline{1,M}.$$

Чтобы решить это уравнение, достаточно найти решение уравнения ($g_{(x_k,x_j)}(m)=0$ при $m<0$, $k,j=\overline{1,M}$) $\sum_{k=1}^{M}\sum_{v=0}^{\theta} c_k(v)\, g_{(x_k,x_j)}(\theta-v)=$ $=g_{(x,x_j)}(\theta+q)$, $j=\overline{1,M}$, $\theta\in N$, $\theta\geqslant 0$ $(\theta=u+m)$. Это уравнение при помощи производящих функций сводится к следующему уравнению:

$$\sum_{k=1}^{M} C_k(z)\, G_{(x_k,x_j)}(z,0)=G_{(x,x_j)}(z,q),\quad j=\overline{1,M}, \tag{4.20}$$

где $C_k(z)=\sum_{v=0}^{\infty} c_k(v)\, e^{-zv}$; $G_{(x,y)}(z,q)=\sum_{v=0}^{\infty} g_{(x,y)}(v+q)\, e^{-zv}$, причем при $\mathrm{Re}\, z>0$

$$G_{(x,y)}(z,q)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iq\lambda} f_{(x,y)}(\lambda)\,\overline{h^{-1}(\lambda)}\,(1-e^{i\lambda-z})^{-1}\, d\lambda.$$

Если мы нашли некоторое решение $C_k(z)$, $k=\overline{1,M}$ системы уравнений (4.20), то оптимальную оценку $\widehat{\xi}(t+q,x)$ можно вычислить по формуле (4.19), где $c_k(v)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C_k(i\lambda)\, e^{iv\lambda}\, d\lambda$, или по формуле

$$\widehat{\xi}(t+q,x)=\sum_{k=1}^{M}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{h(m,n)} S_m^l(x_k)\int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} C_k(i\lambda)\, Z_m^l(d\lambda).$$

Решение задачи упрощается, когда $B(u,\cos\langle x,y\rangle)=R_1(u)R_2\times$ $\times(\cos\langle x,y\rangle)$, где спектральная мера функции $R_1(u)$ абсолютно непрерывна и плотность $f(\lambda)$ допускает факторизацию: $f(\lambda)=$ $=|h(\lambda)|^2$, $h(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=0}^{\infty} g(m)\, e^{-im\lambda}$. Функции $C_k(z)$, $k=\overline{1,M}$ в этом случае определяются из системы уравнений $\sum_{k=1}^{M} R_2(\cos\langle x_k,$ $x_j\rangle)\, C_k(z)=R_2(\cos\langle x,x_j\rangle)\, G_q(z)\, G_0^{-1}(z)$, $j=\overline{1,M}$, где $G_q(z)=$ $=\sum_{m=0}^{\infty} g(m+q)\, e^{-zm}$.

Пример 10. Рассмотрим задачу линейной экстраполяции по данному множеству E_3^M однородного по времени изотропного поля на сфере, корреляционная функция которого имеет вид

$$B(u, \cos\langle x, y\rangle) = e^{-\alpha|u|}(1 - 2a\cos\langle x, y\rangle + a^2)^{-(n-2)/2},$$
$$0 < a < 1, \ \alpha > 0.$$

Тогда

$$R_1(u) = e^{-\alpha|u|}, \ R_2(\cos\langle x, y\rangle) = (1 - 2a\cos\langle x, y\rangle + a^2)^{-(n-2)/2};$$

$$h(\lambda) = (1-\beta^2)^{1/2}(2\pi)^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\beta^m e^{-im\lambda}, \ \beta = e^{-\alpha} \text{ и } G_q(z)\,G_0^{-1}(z) = e^{-\alpha q}.$$

Система уравнений (4.20) будет иметь такой вид:

$$\sum_{k=1}^{M} C_k(z)(1 - 2a\cos\langle x_k, x_j\rangle + a^2)^{-(n-2)/2} =$$
$$= e^{-\alpha q}(1 - 2a\cos\langle x, x_j\rangle + a^2)^{-(n-2)/2}, \ j = \overline{1, M}.$$

При $M = 1$ получим $C_1(z) = e^{-\alpha q}(1-a)^{n-2}(1 - 2a\cos\langle x, x_1\rangle + a^2)^{-(n-2)/2}$.

Следовательно, формула оптимального прогноза будет такой:

$$\hat{\xi}(t+q, x) = e^{-\alpha q}(1-a)^{n-2}(1 - 2a\cos\langle x, x_1\rangle + a^2)^{-(n-2)/2}\xi(t, x_1).$$

Список литературы: 1. *Моклячук М. П., Ядренко М. И.* Линейные статистические задачи для однородных по времени изотропных случайных полей на сфере. 1.— «Теория вероятностей и математическая статистика», 1978, вып. 18, с. 106—115. 2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 1. М., «Наука», 1971, 664 с. 3. *Wiener N.* Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. N. Y., 1949. 4. *Яглом А. М.* Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью.—«Труды Московского математического общества», 1955, 4, с. 333—375. 5. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы. М., Физматгиз, 1963. 284 с.

M. P. Moklyachuk, M. I. Yadrenko

ON THE LINEAR STATISTICAL PROBLEMS FOR TIME HOMOGENEOUS ISOTROPIC RANDOM FIELDS ON SPHERE. II

Some linear extrapolation problems for time homogeneous isotropic random fields on sphere which are observed on the sets of points $E = E_1 \times S_n$, $E_1^M = \{(t, x) : u - T \leqslant t \leqslant u, \ x = x_k \in S_n, \ k = \overline{1, M}\}$, $E_2^M = \{(t, x) : t \in N, \ -\infty < t < \infty, \ x = x_k \in S_n, \ k = \overline{1, M}\}$, $E_3^M \{(t, x) : t \in N, \ t \leqslant u, \ x = x_k \in S_n, \ k = \overline{1, M}\}$, where u, T — constants, E_1 — some sets of points of R^1, are considered.

Поступила в редколлегию 22. 12 1976.