УДК 519.21

М. РИХТЕР, стажер,
Киевский университет

УСТОЙЧИВОСТЬ ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

В данной работе исследуем устойчивость оценки максимального правдоподобия регрессионных параметров гауссовских процессов.

Пусть: 1) на измеримом (по Лебегу) множестве T наблюдается n независимых реализаций случайного процесса $X_t(\omega)=\sum_{i=1}^{N}\beta_i f_i(t)+V_t(\omega)$, где $f_1(t), \ldots, f_N(t)$ линейно-независимые функции из пространства $L^2(T)$ всех интегрируемых с квадратом функций (на мере μ) на множестве T;

2) $X_t(\omega)$—измеримый случайный гауссовский процесс со средней функцией $EX_t(\omega)=\sum_{i=1}^{N}\beta_i f_i(t)$ и известной корреляционной функцией $K(t, s)$;

3) корреляционный оператор K

$$(Kq)(t)=\int_T K(t, s)\, q(s)\, \mu(ds), \quad q(s)\in L^2(T) \tag{1}$$

обладает свойством

$$\int_T K(t, t)\, \mu(dt)<\infty; \tag{2}$$

4) у каждого интегрального уравнения

$$f_i(t)=\int_T K(t, s)\, q_i(s)\, \mu(ds) \tag{3}$$

есть решение $q_i\in L^2(T)$, $i=1, \ldots, N$.

Прежде, чем мы займемся устойчивостью оценки, приведем результат оценки регрессионных параметров.

Теорема 1. Если выполняются условия 1—4, существует оценка максимального правдоподобия параметров регресии β и она имеет вид

$$\hat{\beta}=M^{-1}R, \tag{4}$$

где

$$M=\left(\int_T f_i(t)\, q_j(t)\, \mu(dt)\right)_{i,j=1}^{N},$$

$$R=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_T X_t^{(k)}(\omega)\, q_j(t)\, \mu(dt)\right)_{j=1}^{N},$$

$X_t^{(k)}(\omega)$ обозначает k-е наблюдение процесса $X_t(\omega)$; $\hat{\beta}$—несмещенная и эффективная оценка β с ковариационной матрицей

$$\operatorname{cov}\hat{\beta} = M^{-1}/n. \tag{5}$$

Доказательство теоремы следует из работы [2].

Неравенство (2) является необходимым условием существования оценки максимального правдоподобия. Из (2) и оценки

$$\int_T\int_T K^2(t, s)\,\mu(dt)\,\mu(ds) \leqslant \left(\int_T K(t, t)\,\mu(dt)\right)^2 < \infty$$

следует, что K — оператор Гильберта — Шмидта. Так как всякий оператор Гильберта — Шмидта вполне непрерывен в пространстве $L^2(T)$, получается полная непрерывность оператора K, и решения интегральных уравнений (3) не являются устойчивыми. Принимаем следующие обозначения: $\tilde{q}_i(t)$ — приближенное решение уравнения (3), $\tilde{f}_i(t) = \int_T K(t, s)\,\tilde{q}_i(s)\,\mu(ds)$,

$$\tilde{M} = \left(\int_T f_i(t)\,\tilde{q}_j(t)\,\mu(dt)\right)_{i,j=1}^N, \quad \overline{M} = \left(\int_T \tilde{f}_i(t)\,\tilde{q}_j(t)\,\mu(dt)\right)_{i,j=1}^N,$$

$$\tilde{R} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(\int_T X_t^{(k)}(\omega)\,\tilde{q}_j(t)\,\mu(dt)\right).$$

$\|\cdot\|_E$ — норма Евклида, m_{ij} — определитель матрицы, полученной из M вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, I — тождественный оператор.

Пусть, кроме условий 1 — 4, имеют место условия:

5) для всех $i = 1, \ldots, N$ существуют константы b, Q и c со свойствами

$$\|q_i(t)\|_{L^2} \leqslant Q; \qquad \|\tilde{q}_i(t)\|_{L^2} \leqslant Q; \tag{6}$$

$$\|f_i(t)\|_{L^2} \leqslant c; \qquad |\beta_i| \leqslant b; \tag{7}$$

6) матрица $\tilde{M}$ несингулярна.

С помощью условий 1 — 6 доказываем такую теорему.

Теорема 2. Оценки $\hat{\tilde{\beta}} = \tilde{M}^{-1}\tilde{R}$ и $\sum_{i=1}^N \hat{\tilde{\beta}}_i f_i(t)$, являются несмещенными и ковариационная матрица от $\hat{\tilde{\beta}}$ имеет вид

$$\operatorname{cov}\hat{\tilde{\beta}} = n^{-1}\tilde{M}^{-1}\overline{M}(\tilde{M}^{-1})'. \tag{8}$$

Доказательство. Из равенств $E\hat{\tilde{\beta}} = \tilde{M}^{-1}E\tilde{R} = \tilde{M}^{-1}\tilde{M}\beta$ и $\operatorname{cov}\hat{\tilde{\beta}} = E\hat{\tilde{\beta}}\hat{\tilde{\beta}}' - E\hat{\tilde{\beta}}E\hat{\tilde{\beta}}' = \tilde{M}^{-1}(E\tilde{R}\tilde{R}' - E\tilde{R}E\tilde{R}')(\tilde{M}^{-1})' =$

$= n^{-1}\widetilde{M}^{-1}\left(\int\limits_T\int\limits_T K(t,s)\widetilde{q}_i(t)\widetilde{q}_j(s)\,\mu(dt)\,\mu(ds)\right)_{i,j=1}^N(\widetilde{M}^{-1})'$ следует справедливость теоремы.

Исследуем устойчивость оценки $\widehat{\beta}$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1—6. Тогда существует для любого числа $\varepsilon > 0$ такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства

$$\| f_i(t) - \widetilde{f}_i(t) \|_{L^2} \leqslant \delta(\varepsilon), \quad i = 1, \ldots, N \tag{9}$$

получаем следующие свойства:

$$E \| \widehat{\beta} - \widehat{\widetilde{\beta}} \|_E^2 < \varepsilon; \tag{10}$$

$$\| \operatorname{cov} \widehat{\beta} - \operatorname{cov} \widehat{\widetilde{\beta}} \|_E < \varepsilon; \tag{11}$$

$$\left| \sum_{i=1}^N \int\limits_T D^2 (\widehat{\beta}_i f_i(t))\,\mu(dt) - \sum_{i=1}^N \int\limits_T D^2 (\widehat{\widetilde{\beta}}_i f_i(t)\,\mu(dt) \right| < \varepsilon. \tag{12}$$

Для доказательства теоремы применяем следующие леммы.

Лемма 1. $||M| - |\widetilde{M}|| \leqslant k_1\delta$, где $k_1 = N!NQ^Nc^{N-1}$.

Доказательство. Пусть $J = (i_1, \ldots, i_N)$ — перестановка чисел $1, \ldots, N$, $d_0^J = \widetilde{d}_{N+1}^J = 1$, $\widetilde{d}_k^J = \sum\limits_{r=k}^N \int\limits_T f_{i_r}(t)\,\widetilde{q}_r(t)\,\mu(dt)$,

$$d_k^J = \prod_{r=1}^k \int\limits_T f_{i_r}(t)\,q_r(t)\,\mu(dt), \quad k = 1, \ldots, N.$$

Тогда

$$||M| - |\widetilde{M}|| \leqslant \sum_J |d_N^J - d_1^J| = \sum_J \left| \sum_{s=1}^N (d_{s-1}^J \widetilde{d}_s^J - d_s^J \widetilde{d}_{s+1}^J) \right| =$$

$$= \sum_J \left| \sum_{s=1}^N d_{s-1}^J \int\limits_T f_{i_s}(t)\,[\widetilde{q}_s(t) - q_s(t)]\,\mu(dt)\,\widetilde{d}_{s+1}^J \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_J \left| \sum_{s=1}^N Q^{s-1}c^{s-1} \int\limits_T\int\limits_T K(t,u)\,q_{i_s}(u)\,[\widetilde{q}_s(t) - q_s(t)]\,\mu(dt)\mu(ds)(Qc)^{N-s} \right| =$$

$$= Q^{N-1}c^{N-1} \sum_J \left| \sum_{s=1}^N \int\limits_T [\widetilde{f}_s(u) - f_s(u)]\,q_{i_s}(u)\,\mu(du) \right| \leqslant$$

$$\leqslant Q^{N-1}c^{N-1} \sum_J |NQ\delta| = N!\,NQ^Nc^{N-1}\delta.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Матрица $\widetilde{M}$ удовлетворяет оценке $\| M^{-1} - \widetilde{M}^{-1} \|_E^2 \leqslant k_2 \delta^2$, причем

$$k_2 = 2 (N!\, Q^{N-1} c^{N-2})^2 \left[(N-1)^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{m_{ij}}{|M|} NQc \right)^2 \right].$$

Доказательство. Так как

$$\| M^{-1} - \widetilde{M}^{-1} \|_E^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{m_{ij}}{|M|} - \frac{\widetilde{m}_{ij}}{|\widetilde{M}|} \right)^2 = (|M|\,|\widetilde{M}|)^{-2} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} [m_{ij} (|\widetilde{M}| - |M|) + |M| (m_{ij} - \widetilde{m}_{ij})]^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 (|M|\,|\widetilde{M}|)^{-2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \{ [m_{ij} (|\widetilde{M}| - |M|)]^2 + [|M| (m_{ij} - \widetilde{m}_{ij})]^2 \},$$

то из леммы 1 следует

$$\| M^{-1} - \widetilde{M}^{-1} \|_E^2 \leqslant 2 (|M|\,|\widetilde{M}|)^{-2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \{ m_{ij}^2 (N!\, N Q^N c^{N-1} \delta)^2 +$$

$$+ |M|^2 ((N-1)!\, (N-1)\, Q^{N-1} c^{N-2} \delta)^2 \}.$$

Доказательство теоремы 4.1. Проверим первое утверждение. На основе теорем 1 и 2 и свойств нормы Евклида

$$E \| \hat{\beta} - \hat{\tilde{\beta}} \|_E^2 = E \| M^{-1} R - \widetilde{M}^{-1} \widetilde{R} \|_E^2 = E \| M^{-1} (R - \widetilde{R}) +$$

$$+ (M^{-1} - \widetilde{M}^{-1}) R \|_E^2 \leqslant 2 \| M^{-1} \|_E^2 E \| R - \widetilde{R} \|_E^2 +$$

$$+ 2 \| M^{-1} - \widetilde{M}^{-1} \|_E^2 E \| \widetilde{R} \|_E^2.$$

Так как

$$E \| R - \widetilde{R} \|_E^2 = \sum_{i=1}^{N} E \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_T X_t^{(k)} (\omega) (q_i(t) - \widetilde{q}_i(t)) \mu(dt) \right]^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{N} \left\{ n \int_T \int_T K(t, s) [q_i(t) - \widetilde{q}_i(t)] [q_i(s) - \widetilde{q}_i(s)] \mu(dt) \mu(ds) + \right.$$

$$\left. + (n-1)^2 \left(\sum_{j=1}^{N} \beta_j \int_T f_j(t) [q_i(t) - \widetilde{q}_i(t)] \mu(dt) \right)^2 \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{N}\{n\delta\,\|q_i(t)-\tilde{q}_i(t)\|_{L^2}+(n-1)^2N^2b^2Q^2\delta^2\}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n^2}\{2nQN\delta+(n-1)^2N^2b^2Q^2\delta^2\}=k_3\delta+k_4\delta^2,$$

$\|M^{-1}\|_E\leqslant k_5$ и $E\|\tilde{R}\|_E^2\leqslant k_6$, то из леммы 2 следует $E\|\hat{\beta}-\hat{\tilde{\beta}}\|_E^2\leqslant$ $\leqslant 2k_5(k_3\delta+k_4\delta^2)+2k_6k_2\delta^2$.

Если $\delta^2(2k_2k_6+2k_4k_5)+2\delta k_5k_3\leqslant\varepsilon$, то

$$\delta(\varepsilon)=-\frac{k_5k_3}{2(k_2k_6+k_4k_5)}+\sqrt{\left(\frac{k_5k_3}{2(k_2k_6+k_4k_5)}\right)^2+\varepsilon\frac{1}{2(k_2k_6+k_4k_5)}}$$

и неравенство (10) доказано.

2. Теперь докажем неравенство (11). Используя (5), (8), (11) и лемму 2, получаем

$$\|\operatorname{cov}\hat{\beta}-\operatorname{cov}\hat{\tilde{\beta}}\|_E=\|n^{-1}[M^{-1}-\tilde{M}^{-1}\overline{M}(\tilde{M}^{-1})']\|_E=$$

$$=n^{-1}\|M^{-1}-(\tilde{M}^{-1}-M^{-1})\overline{M}(\tilde{M}^{-1})'-M^{-1}\overline{M}(\tilde{M}^{-1})'\|_E=$$

$$=n^{-1}\|M^{-1}(\tilde{M}'-\overline{M})(\tilde{M}^{-1})'-(\tilde{M}^{-1}-M^{-1})\overline{M}(\tilde{M}^{-1})'\|_E\leqslant$$

$$\leqslant n^{-1}(\|M^{-1}\|_E\cdot\|\tilde{M}^{-1}\|_E\|\tilde{M}'-\overline{M}\|_E+\|\overline{M}\|_E\|\tilde{M}^{-1}\|_E\|\tilde{M}^{-1}-M^{-1}\|_E\leqslant$$

$$\leqslant n^{-1}(\|M^{-1}\|_E\|\tilde{M}^{-1}\|_E\|\tilde{M}'-\overline{M}\|_E+\|\overline{M}\|_E\|\tilde{M}^{-1}\|_Ek_2\delta^2. \quad (13)$$

Так как

$$\|\tilde{M}'-\overline{M}\|_E^2\leqslant\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\int_T f_i(t)\tilde{q}_j(t)-\tilde{f}_i(t)q_j(t)\mu(dt)\right]^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\int_T(f_i(t)-\tilde{f}_i(t))\tilde{q}_j(t)\mu(dt)\right]^2\leqslant N^2\delta^2Q^2,$$

то из (13) следует $\|\operatorname{cov}\hat{\beta}-\operatorname{cov}\hat{\tilde{\beta}}\|_E\leqslant n^{-1}(k_5k_7k_8\delta+k_9k_7k_2\delta^2)$, где $\|\tilde{M}^{-1}\|_E\leqslant k_7$, $QN=k_8$, $k_9\geqslant\|\overline{M}\|_E$. Из $\delta^2(n^{-1}k_2k_7k_9)+\delta(n^{-1}k_5k_7k_8)\leqslant\varepsilon$ следуют

$$\delta(\varepsilon)=-\frac{k_5k_8}{2k_2k_9}+\sqrt{\left(\frac{k_5k_8}{2k_2k_9}\right)^2+\varepsilon\frac{n}{k_2k_7k_9}}$$

и, таким образом, неравенство (11) выполнено.

3. Для доказательства неравенства (12), обозначив $f'(t) = (f_1(t), \ldots, f_N(t))$, оценим следующее выражение:

$$\left| \int_T f'(t) \widetilde{M}^{-1} [\widetilde{M} - \overline{M}] M^{-1} f(t) \mu(dt) \right| =$$

$$= \left| \int_T \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N f_i(t) \frac{\widetilde{m}_{ij}}{|\widetilde{M}|} \int_T (f_j(s) - \widetilde{f}_j(s)) \widetilde{q}_k(s) \mu(ds) \frac{m_{kl}}{|M|} \times \right.$$

$$\left. \times f_l(t) \mu(dt) \right| \leqslant \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N c^2 \frac{|\widetilde{m}_{ij}|}{|\widetilde{M}|} \delta Q \frac{|m_{kl}|}{|M|}. \qquad (14)$$

Кроме того, из леммы 1 следует

$$\left| \int_T f'(t) \widetilde{M}^{-1} \overline{M} [M^{-1} - (\widetilde{M}^{-1})'] f(t) \mu(dt) \right| =$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \int_T f_i(t) \frac{m_{ij}}{|\widetilde{M}|} \int_T f_j(s) \widetilde{q}_k(s) \mu(ds) \left(\frac{m_{lk}}{|M|} - \frac{\widetilde{m}_{lk}}{|\widetilde{M}|} \right) \times \right.$$

$$\times f_l(t) \mu(dt) \leqslant \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N c^2 \left| \frac{\widetilde{m}_{ij}}{|\widetilde{M}|} \right| cQ \left| \frac{m_{lk}[|\widetilde{M}| - |M|] + |M| [m_{lk} - \widetilde{m}_{lk}]}{|\widetilde{M}| \, |M|} \right| \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N c^3 Q \frac{|\widetilde{m}_{ij}|}{|\widetilde{M}^2| \, |M|} (|m_{lk} k_1 \delta + |M| k_{10} \delta, \qquad (15)$$

причем $k_{10} = (N-1)! \, (N-1) \, Q^{N-1} c^{N-2}$.

Из выражений (8), (14) и (15) получаем

$$\left| \sum_{i=1}^N \int_T D^2 (\hat{\beta}_i f_i(t)) \mu(dt) - \sum_{i=1}^N \int_T D^2 (\hat{\hat{\beta}}_i f_i(t)) \mu(dt) \right| =$$

$$= \frac{1}{n} \left| \int_T f'(t) [M^{-1} - \widetilde{M}^{-1} \overline{M} (\widetilde{M}^{-1})'] f(t) \mu(dt) \right| =$$

$$= \frac{1}{n} \left| \int_T f'(t) \widetilde{M}^{-1} [(\widetilde{M} - \overline{M}) M^{-1} + \overline{M} (M^{-1} - (\widetilde{M}^{-1})')] f(t) \mu(dt) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n} \left| \int_T f'(t) \widetilde{M}^{-1} (\widetilde{M} - \overline{M}) M^{-1} f(t) \mu(dt) \right| +$$

$$+ \frac{1}{n} \left| \int_T f'(t) \widetilde{M}^{-1} \overline{M} [M^{-1} - (\widetilde{M}^{-1})'] f(t) \mu(dt) \right| \leqslant \frac{1}{n} k_{11} \delta, \qquad (16)$$

где

$$k_{11}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\left(c^2Q\left|\frac{\widetilde{m}_{ij}}{|\widetilde{M}|}\right|\frac{|m_{lk}|}{|M|}+c^3Q\,\frac{|\widetilde{m}_{ij}|}{|\widetilde{M}|^2}\left[\frac{|m_{lk}|}{|M|}k_1+k_{10}\right]\right).$$

Если в выражении (16) $\frac{1}{n}k_{11}\delta=\varepsilon$, то $\delta(\varepsilon)=\frac{n\varepsilon}{k_{11}}$.

Теорема доказана.

Из неравенства Чебышева вытекает следствие.

Следствие. Для любых двух чисел $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$ можно указать такое число $\delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2)>0$, что из (9) следует $P(\|\hat{\beta}-\hat{\tilde{\beta}}\|_E^2>\varepsilon_1)<\varepsilon_2$.

Список литературы: 1. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения неконкретных задач. М., «Наука», 1974, 250 с. 2. *Richter M.* Versuchsplannung bei gausschen zefälligen Prozessen.— «Freiberger Forschungshefte. Serie D.», 1977.

M. Richter

STABILITY OF THE MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION BY THE WAY OF THE GAUSSIAN PROCESSES

Stability of the maximum likelihood estimation of the regression coefficients by the way of the gaussian processes is studied. The influence of the aproximated solution of the integral equation in the properties of the estimation is shown.

Поступила в редколлегию 11.05 1977.