УДК 519.21

Н. Н. АМОСОВА, канд. физ.-мат. наук,
Ленинградский политехнический институт

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ УМЕРЕННЫХ УКЛОНЕНИЙ ПРИ МОМЕНТНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

В настоящей статье обобщаются и дополняются некоторые результаты Дейвиса [1], Рохатги [2] и Михеля [3] для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин X_n.

Обозначим через $L(\cdot)$ неотрицательную, неубывающую медленно меняющуюся функцию.

Теорема 1. Пусть существует случайная величина X и такие положительные постоянные a и b, что при достаточно больших $x > 0$ и всех $n = 1, 2, \ldots$

$$n^{-1} \sum_{j=1}^{n} P(|X_j| > x) \leqslant aP(|X| > bx). \qquad (1)$$

Если $E(|X|^r L(|X|^r)) < \infty$ для некоторого r, $1 < r \leqslant 2$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\text{[illegible]}\, L(n)/n]\, P(|S_n - ES_n| > \varepsilon (n \log n)^{1/r}) < \infty$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Замечание. Теорема 1 остается справедливой, если условие $E(|X|^r L(|X|^r)) < \infty$ заменить условием $E(|X|^r L(|x|^r/\log(2+|X|))) < \infty$.

Теорема 2. Пусть существует некоторая постоянная $\gamma > 0$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$, достаточно больших n и $k < n$

$$P(|S_n - S_k| < \varepsilon (n \log n)^{1/r}) \geqslant \gamma. \qquad (2)$$

Тогда следующие условия равносильны:

$$\text{(а)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^u L(n)\, P(|S_n| > \varepsilon (n \log n)^{1/r}) < \infty,$$

$$\text{(б)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^u L(n)\, P(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| > \varepsilon (n \log n)^{1/r}) < \infty,$$

$$\text{(в)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^u L(n)\, P(\sup_{k \geqslant n} (|S_k|/(k \log k)^{1/r}) > \varepsilon) < \infty,$$

$$1 < r \leqslant 2, \quad \varepsilon > \varepsilon_0 \geqslant 0, \quad u > -1.$$

Теорема 3. Пусть $EX_j = 0$, $EX_j^2 = \sigma_j^2\ (j = 1, 2, \ldots)$,

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 = B_n^2,\ 0 < d \leqslant (1/n)\, B_n^2 \leqslant D < \infty,\ \varepsilon_0 > 0,$$

выполнено условие (1) и $E\,|X|^{\varepsilon_0^2+2} < \infty$, $\varepsilon_0 > 0$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\varepsilon_0^2/2-1} (\log n)^{\varepsilon_0^2/2+1}\, P\,(\sup_{k \geqslant n} (|\,S_k\,|/B_k \sqrt{\log k}) > \varepsilon) < \infty$$

для любого $\varepsilon > \varepsilon_0$.

Далее через c будем обозначать положительные постоянные, не обязательно одни и те же.

Доказательство теоремы 1. Без ограничения общности положим $EX_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Пусть

$$X_{kn} = \begin{cases} X_k, & \text{если } |\,X_k\,| \leqslant \varepsilon\,(n \log n)^{1/r}, \\ 0, & \text{если } |\,X_k\,| > \varepsilon\,(n \log n)^{1/r} \end{cases} \quad (k = 1, \ldots, n),$$

$S_{nn} = \sum_{k=1}^{n} X_{kn}$. Тогда

$$P\,(|\,S_n\,| > \varepsilon\,(n \log n)^{1/r}) \leqslant P\,(|\,S_{nn}\,| > \varepsilon\,(n \log n)^{1/r}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} P\,(|\,X_k\,|) > \varepsilon\,(n \log n)^{1/r}) \leqslant P\,(|\,S_{nn} - ES_{nn}\,| > \varepsilon_1\,(n \log n)^{1/r}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} P\,(|\,X_k\,| > \varepsilon\,(n \log n)^{1/r}). \tag{3}$$

Последнее неравенство в (3) справедливо, так как $|\,ES_{nn}\,| \times (n \log n)^{-1/r} \to 0$*). Покажем это. Если обозначить $G_k(x) = 1 - F_k(x) + F_k(-x)$, $G(x) = 1 - F(x) + F(-x)$, где $F_k(x)$ — функция распределения (ф. р.), x_k, а $F(x)$—ф. р. X, то неравенство (1) при всех достаточно больших $x > 0$ примет вид

$$n^{-1} \sum_{k=1}^{n} G_k(x) \leqslant aG(bx). \tag{4}$$

Из (4) с помощью интегрирования по частям, учитывая, что $G(x)\, x^r L(x^r) \to 0$ при $x \to \infty$, получаем

$$|\,ES_{nn}\,| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| > \varepsilon(n \log n)^{-1/r}} |\,x\,|\, dF_k(x) = -\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\varepsilon(n \log n)^{1/r}} x dG_k(x) \leqslant$$

*) Здесь и далее, если не оговорено особо, предельный переход совершается при $n \to \infty$.

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \varepsilon (n \log n)^{1/r} G_k (\varepsilon (n \log n)^{1/r}) + an \int\limits_{\varepsilon (n \log n)^{1/r}} G(bx)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c (n \log n)^{1/r} n G (b\varepsilon (n \log n)^{1/r}) + (an/b)\, G(x)\, x \,\Big|_{b\varepsilon(n \log n)^{1/r}}^{\infty} -$$

$$- anb^{-1} \int\limits_{b\varepsilon(n \log n)^{1/r}} x dG(x) = o((n \log n)^{1/r} / \log n L(n)).$$

Отсюда $(n \log n)^{-1/r} \,|\, ES_{nn} \,| = o(1)$.

Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log n\, L(n)\, n^{-1} \sum_{k=1}^{n} P(|\, X_k \,| > \varepsilon (n \log n)^{1/r}) < \infty; \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log n L(n)\, n^{-1} P(|\, S_{nn} - ES_{nn} \,| > \varepsilon_1 (n \log n)^{1/r} < \infty. \tag{6}$$

Рассмотрим ряд (5). Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log n L(n)\; n^{-1} \sum_{k=1}^{n} P(|X_k| > \varepsilon (n \log n)^{1/r} \leqslant c +$$

$$+ c \sum_{n=n_0}^{\infty} \log n\, L(n)\, P(|\, X \,| > \varepsilon_1 (n \log n)^{1/r}) \leqslant c +$$

$$+ c \sum_{n=n_0}^{\infty} \log n L(n) \sum_{k=n}^{\infty} (G(\varepsilon_1 (k \log k)^{1/r}) - G(\varepsilon_1 ((k+1) \log (k+1))^{1/r})) =$$

$$= c + c \sum_{n=n_0}^{\infty} \log k L(k)\, k\, (G(\varepsilon_1 (k \log k))^{1/r}) - G(\varepsilon_1 (k+1) \log (k+1))^{1/r})) \leqslant$$

$$\leqslant c + c \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\, x \,|^r L(|\, x \,|^r)\, dF(x) < \infty.$$

Докажем сходимость ряда (6). Если $1 < r < 2$, то по неравенству Чебышева

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log n L(n)/n)\, P(|S_{nn} - ES_{nn}\,| > \varepsilon_1 (n \log n)^{1/r}) \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{n=1}^{\infty} \log n L(n)/n\, (n \log n)^{2/r} \sum_{k=1}^{n} EX_{kn}^2 \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{n=1}^{\infty} \log n L(n)/n\, (n \log n)^{2/r} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=2}^{n} (j \log j)^{2/r} P((j-1) \log (j-1))^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant |X_k| < (j\log j)^{1/r}) \leqslant c + c\sum_{n=1}^{\infty} \log n\, L(n)\, n\, (n\log n)^{-2/r} n \times$$

$$\times \sum_{j=2}^{n} (j\log j)^{2/r} j^{-1} P(|X| > b((j-1)\log(j-1))^{1/r}) =$$

$$= c + c\sum_{j=2}^{n} (j\log j)^{2/r} j^{-1} P(|X| > b((j-1)\log(j-1))^{1/r} \times$$

$$\times \sum_{n=j}^{\infty} \log nL(n)(n\log n)^{-2/r} \leqslant c + c\sum_{j=2}^{n} L(j)\log jP(|X| >$$

$$> b((j-1)\log(j-1))^{1/r}) < \infty.$$

Если $r = 2$, то

$$P(|S_{nn} - ES_{nn}| > \varepsilon_1 \sqrt{n\log n}) \leqslant E(S_{nn} - ES_{nn})^6 \varepsilon_1^{-6} (n\log n)^{-3} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1^{-6}(n\log n)^{-3} \Bigg(\sum_{k=1}^{n} E(X_{kn} - EX_{kn})^6 + 15 \sum_{\substack{k,m=1\\ k\neq m}}^{n} E(X_{kn} - EX_{kn})^4 \times$$

$$\times E(X_{mn} - EX_{mn})^2 + 20 \left| \sum_{\substack{k,m=1\\ k\neq m}}^{n} E(X_{kn} - EX_{kn})^3 E(X_{mn} - EX_{mn})^3 \right| +$$

$$+ 90 \sum_{\substack{k,m,t=1\\ k\neq m\neq t}}^{n} E(X_{kn} - EX_{kn})^2 E(X_{mn} - EX_{mn})^2 E(X_{tn} - EX_{tn})^2 \Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant c(n\log n)^{-3} \Bigg(\sum_{k=1}^{n} EX_{kn}^6 + c\sum_{\substack{k,m=1\\ k\neq m}}^{n} EX_{kn}^4 EX_{mn}^2 +$$

$$+ c\sum_{\substack{k,m=1\\ k\neq m}}^{n} E|X_{kn}|^3 E|X_{mn}|^3 + c\sum_{\substack{k,m,t=1\\ k\neq m\neq t}}^{n} EX_{kn}^2 EX_{mn}^2 EX_{tn}^2 \Bigg).$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log nL(n)/n(n\log n)^3 \sum_{k=1}^{n} EX_{kn}^6 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \log nL(n)/n(n\log n)^3 \times$$

$$\times \sum_{j=2}^{n} (j\log j)^3 P(\sqrt{(j-1)\log(j-1)} \leqslant |X_{kn}| < \sqrt{j\log j} \leqslant$$

$$\leqslant c + c\sum_{n=1}^{\infty} \log nL(n)\, n/n(n\log n)^3 \sum_{j=2}^{n} (j\log j)^3 j^{-1} P\Bigg(|X| \geqslant$$

$$\geqslant b\sqrt{(j-1)\log(j-1)} = c + c\sum_{j=2}^{\infty}(j\log j)^3 j^{-1}P(|X| \geqslant$$

$$\geqslant b\sqrt{(j-1)\log(j-1)})\sum_{n=j}^{\infty}\log nL(n)(n\log n)^{-3} \leqslant$$

$$\leqslant c + c\sum_{j=2}^{\infty}L(j)\log jP(|X| \geqslant b\sqrt{(j-1)\log(j-1)}) < \infty.$$

С помощью интегрирования по частям и неравенства (4) нетрудно показать, что

$$\sum_{k=1}^{n}EX_{kn}^2 = o(n/L(n)); \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{n}E|X_{kn}|^3 = o(n^{3/2}\sqrt{\log n}/L(n)). \tag{8}$$

Учитывая (7) и (8), действуя, как и выше, находим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log nL(n)\,n^{-1}(n\log n)^{-3}\sum_{\substack{k,m=1\\k\neq m}}^{n}EX_{kn}^4\,EX_{mn}^2 \leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}\log n\,(n\log n)^{-3}\sum_{k=1}^{n}EX_{kn}^4 < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log nL(n)\,n^{-1}(n\log n)^{-3}\sum_{\substack{k,m=1\\k\neq m}}^{n}E|X_{kn}|^3E|X_{mn}|^3 \leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}n\,(n\log n)^{-3/2}\sum_{k=1}^{n}E|X_{kn}|^3 < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log nL(n)\,n^{-1}(n\log n)^{-3}\sum_{\substack{k,m,t=1\\k\neq m\neq t}}^{n}EX_{kn}^2EX_{mn}^2EX_{tn}^2 \leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}(\log n)^{-2}(L(n))^{-2} < \infty.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теорем 2 и 3. Все утверждения теоремы 2 нетрудно получить, обращаясь к результатам и методам работы [4].

Перейдем к доказательству теоремы 3. Из ее условий следует, что $S_n/\sqrt{n \log n} \to 0$ по вероятности, и, значит, выполнено условие (2). А в силу теоремы 2 достаточно показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\varepsilon_0^2/2-1}(\log n)^{\varepsilon_0^2/2+1} P(|S_n| > \varepsilon B_n \sqrt{\log n}) < \infty \text{ для любого } \varepsilon > \varepsilon_0.$$

Положим

$$Y_{ni} = \begin{cases} X_i, \text{ если } |X_i| \leqslant \varepsilon \sqrt{n \log n}, \\ 0, \text{ если } |X_i| > \varepsilon \sqrt{n \log n}. \end{cases}$$

Тогда

$$P(|S_n| > \varepsilon B_n \sqrt{\log n}) \leqslant P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} Y_{ni}\right| > \right.$$

$$\left. > \varepsilon B_n \sqrt{\log n}\right) + \sum_{i=1}^{n} P\left(|Y_{ni}| > \varepsilon \sqrt{n \log n}\right).$$

Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\varepsilon_0^2/2-1}(\log n)^{\varepsilon_0^2/2+1} \sum_{i=1}^{n} P(|Y_{ni}| > \varepsilon \sqrt{n \log n}) \leqslant$$

$$\leqslant a \sum_{n=1}^{\infty} n^{\varepsilon_0^2/2}.(\log n)^{\varepsilon_0^2/2+1} P(|X| > \varepsilon b \sqrt{n \log n}) < \infty$$

в силу леммы 1 из работы [1]. Аналогично [5] можно показать, что

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} Y_{ni}\right| > \varepsilon B_n \sqrt{\log n}\right) \leqslant c n^{-\varepsilon^2/2} (\log n)^{-1/2}.$$

Теорема 3 доказана.

Список литературы: 1. *Davis J. A.* Convergence rates for probabilities of moderate deviations.— «Annals of Math. Statist.,» 1968, 39, № 6, p. 2016—2028. 2. *Rohatgi V. K.* On probabilies of large deviations.— «Bull. Austral. Math. Soc.», 1970, 3, p. 277—285. 3. *Michel R.* Result on probabilities of moderate deviations. — «Annals. of Probab.», 1974, 2, № 2, p. 349—359. 4. *Амосова Н. Н.* О вероятности больших уклонений.— «Теория вероятностей и математическая статистика», 1976, вып. 14, с. 20—24. 5. *Амосова Н. Н.* О предельных теоремах для вероятностей умеренных уклонений.— «Вестник ЛГУ», 1972, № 13, с. 5—14.

N. N. Amosova

ON CONVERGENCE RATE OF PROBABILITIES
OF MODERATE DEVIATIONS UNDER MOMENT RESTRICTIONS

Some theorems are proved concerning the convergence rates of probabilities of moderate deviations sums of independent random variables under moment restrictions of summary type on these random variables.

Поступила в редколлегию 26.04 1977.