И. И. ЕЖОВ, д-р физ.-мат. наук
Киевский университет

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВРЕМЕНИ ПЕРВОГО ПЕРЕСКОКА ЧЕРЕЗ ЗАДАННЫЙ УРОВЕНЬ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ. II

9. Перейдем к решению задач для нерешетчатых распределений. Пусть

$$\tilde{\zeta}_0 = 0, \quad \tilde{\zeta}_1 + \tilde{\zeta}_2, \ldots, \tilde{\zeta}_1 + \ldots + \tilde{\zeta}_n, \ldots$$

последовательность сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, каждая из которых представима в виде разности двух независимых неотрицательных величин

$$\tilde{\zeta}_i = \tilde{\theta}_i - \tilde{\varkappa}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

причем

$$P\{\tilde{\theta}_i < x\} = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad P\{\tilde{\varkappa}_i < x\} = G(x).$$

Обозначим через $\tilde{\tau}$ тот первый индекс, для которого $\tilde{\zeta}_1 + \ldots + \tilde{\zeta}_{\tilde{\tau}} > 0$, и положим $\tilde{\gamma} = \tilde{\zeta}_1 + \ldots + \tilde{\zeta}_{\tilde{\tau}}$. Тогда

$$P\{\tilde{\tau} = r + 1, \tilde{\gamma} \geqslant x\} = P\{\tilde{\zeta}_1 + \ldots + \tilde{\zeta}_i \leqslant 0, \ i = \overline{1, r};$$

$$\tilde{\zeta}_1 + \ldots + \tilde{\zeta}_{r+1} \geqslant x\} = P\{\tilde{\theta}_1 + \ldots + \tilde{\theta}_i \leqslant \tilde{\varkappa}_1 + \ldots + \tilde{\varkappa}_i,$$

$$i = \overline{1, r}; \ \tilde{\theta}_1 + \ldots + \tilde{\theta}_{r+1} \geqslant \tilde{\varkappa}_1 + \ldots + \tilde{\varkappa}_{r+1} + x\} =$$

$$= M \int_{(y_1, \ldots, y_r) \in \tilde{D}(\tilde{\varkappa}_1, \ldots, \tilde{\varkappa}_r)} \cdots \int \lambda^r e^{-\lambda(y_1 + \ldots + y_r)} dy_1 \ldots dy_r e^{-\lambda\left[x + \tilde{\varkappa}_{r+1} + \sum_{i=1}^{r} (\tilde{\varkappa}_i - y_i)\right]^{*)}} =$$

---

*) $(y_1, \ldots, y_r) \in \tilde{D}(\tilde{\varkappa}_1, \ldots, \tilde{\varkappa}_r)$ тогда и только тогда, когда $y_1 \leqslant \tilde{\varkappa}_1$, $y_1 + y_2 \leqslant \tilde{\varkappa}_1 + \tilde{\varkappa}_2, \ldots, y_1 + \ldots + y_r \leqslant \tilde{\varkappa}_1 + \ldots + \tilde{\varkappa}_r$.

$$= M \int\limits_{(y_1,\ldots,y_r)\in\widetilde{D}(\widetilde{\varkappa}_1,\ldots,\widetilde{\varkappa}_r)} \cdots \int \lambda^r e^{-\lambda(x+\widetilde{\varkappa}_1+\ldots+\widetilde{\varkappa}_{r+1})} dy_1 \ldots dy_r =$$

$$= \lambda^r e^{-\lambda x} M \exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^{r+1} \widetilde{\varkappa}_i\right\} \widetilde{I}(\widetilde{\varkappa}_1, \ldots, \widetilde{\varkappa}_r) =$$

$$= \lambda^r e^{-\lambda x} \widetilde{g}(\lambda)\, M \exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^{r} \widetilde{\varkappa}_i\right\} I(\widetilde{\varkappa}_1, \ldots, \widetilde{\varkappa}_r), \tag{69}$$

где

$$\widetilde{g}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x).$$

$$\widetilde{I}(z_1, \ldots, z_r) = \int\limits_{y_1+\ldots+y_i\leqslant z_1+\ldots+z_i;\ i=\overline{1,r}} \cdots \int dy_1 \ldots dy_r =$$

$$= \int_0^{z_1} du_1 \int_{u_1}^{z_1+z_2} du_2 \ldots \int_{u_{r-1}}^{z_1+\ldots+z_r} du_r.$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$\widetilde{I}(z_1, \ldots, z_r) = (z_1 + \ldots + z_r)\widetilde{I}(z_1, \ldots, z_{r-1}) -$$

$$- \int_0^{z_1} du_1 \ldots \int_{u_{r-2}}^{z_1+\ldots+z_{r-1}} u_{r-1} du_{r-1} = (z_1+\ldots+z_r)\widetilde{I}(z_1, \ldots, z_{r-1}) -$$

$$- \frac{(z_1 + \ldots + z_{r-1})^2}{2!} \widetilde{I}(z_1, \ldots, z_{r-2}) + \int_0^{z_1} du_1 \ldots$$

$$\ldots \int_{u_{r-3}}^{z_1+\ldots+z_{r-2}} \frac{1}{2!} u_{r-2}^2 du_{r-2} = \ldots = (z_1 + \ldots + z_r)\widetilde{I}(z_1, \ldots, z_{r-1}) -$$

$$- \frac{(z_1 + \ldots + z_{r-1})^2}{2!} \widetilde{I}(z_1, \ldots, z_{r-2}) + \ldots +$$

$$+ (-1)^{r-2} \frac{(z_1 + z_2)^{r-1}}{(r-1)!} \widetilde{I}(z_1) + (-1)^{r-1} \frac{z_1^r}{r!},$$

откуда

$$\tilde{I}(z_1, \ldots, z_r)|_{r=0} = 1,$$

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \frac{(z_1 + \ldots + z_{k+1})^{r-k}}{(r-k)!} \tilde{I}(z_1, \ldots, z_k) = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots). \tag{70}$$

Рекуррентные соотношения (70) дают возможность вычислять последовательно $\tilde{I}(z_1)$, $\tilde{I}(z_1 + z_2)$, ... *). Из этих соотношений, в частности, следует, что $\tilde{I}(z_1, \ldots, z_r)$ — однородный полином r-й степени.

Из (69), (70) вытекает, что $\tilde{\tau}$ и $\tilde{\gamma}$ независимы, $P\{\tilde{\gamma} \geqslant x\} = e^{-\lambda x}$ и

$$P\{\tau = r + 1\} = \lambda^r \tilde{g}(\lambda) \tilde{R}[\tilde{g}(\lambda), \tilde{g}'(\lambda), \ldots, \tilde{g}^{(r)}(\lambda)], \tag{71}$$

где $\tilde{R}(z_0, z_1, \ldots, z_r)$ — однородный полином r-й степени. Так, например, $\tilde{R}(z_0) = 1$, $\tilde{R}(z_0, z_1) = -z_1$, $\tilde{R}(z_0, z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_0 z_2 + z_1^2$ и т. д.

Связь между полиномами $\tilde{I}(z_1, \ldots, z_r)$ и $\tilde{R}(z_0, \ldots, z_r)$ следующая: если

$$\tilde{I}(z_1, \ldots, z_r) = \sum_{i_1 + \ldots + i_r = r} a(i_1, \ldots, i_r) z_1^{i_1} \ldots z_r^{i_r},$$

то

$$\tilde{R}(z_0, z_1, \ldots, z_r) = (-1)^r \sum_{i_1 + \ldots + i_r = r} a(i_1, \ldots, i_r) z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_r}.$$

Рекуррентные соотношения непосредственно между полиномами $\tilde{R}(z_0, \ldots, z_r)$ будут указаны ниже.

Рассмотрим тот случай, когда распределение $G(x)$ сосредоточено в точке $x = a > 0$. Используя (69), имеем

$$P\{\tilde{\tau} = r + 1\} = \lambda^r e^{-\lambda a(r+1)} \tilde{I}_r(a) \quad (r \geqslant 0), \tag{72}$$

где $\tilde{I}_r(a) = \tilde{I}(\underbrace{a, \ldots, a}_{r})$ связаны соотношениями

$$\tilde{I}_0(a) = 1,$$

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \frac{(k+1)^{r-k}}{a^k (r-k)!} \tilde{I}_k(a) = 0 \quad (r \geqslant 1). \tag{73}$$

---

*) Например, $\tilde{I}(z_1) = z_1$, $\tilde{I}(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_1^2 + z_1 z_2$ и т. д.

Так как при $\lambda a \leqslant 1$ $\tilde{\tau}$ — собственная случайная величина, то

$$\sum_{r=0}^{\infty} \tilde{I}_r(a)(\lambda e^{-\lambda a})^r = e^{\lambda a} \qquad (\lambda a \leqslant 1). \tag{74}$$

Пусть теперь $\lambda a \geqslant 1$. Тогда существует одно и только одно λ^* такое, что

$$\lambda^* a \leqslant 1, \qquad \lambda e^{-\lambda a} = \lambda^* e^{-\lambda^* a}, \tag{75}$$

поэтому

$$\sum_{r=0}^{\infty} \tilde{I}_r(a)(\lambda e^{-\lambda a})^r = e^{\lambda^* a}. \tag{76}$$

Из (74) — (76), в частности, следует, что

$$\tilde{p} = P\{\tilde{\tau} < \infty\} = \begin{cases} 1, & \lambda a \leqslant 1 \\ e^{(\lambda^* - \lambda)a}, & \lambda a \geqslant 1 \end{cases}, \tag{77}$$

где λ и λ^* определяются равенствами (75).

Пусть $\varphi_a(z)$ — функция, обратная $f_a(z) = ze^{-az}$ $(az \leqslant 1)$. В таком случае из (74) вытекает

$$\sum_{r=0}^{\infty} \tilde{I}_r(a) z^{r+1} = \varphi_a(z) \qquad \left(0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{ae}\right),$$

откуда $\tilde{I}_r(a) = \tilde{I}_r a^r$, где

$$\begin{gathered} \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{I}_r z^{r+1} = \varphi(z), \\ \varphi(ze^{-z}) \equiv z \quad \left(0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{e}\right). \end{gathered} \tag{78}$$

10. Выведем теперь функциональное уравнение, которому удовлетворяет $Ms^{\tilde{\tau}} = \tilde{\gamma}(s)$. Пусть $\tilde{\tau}_x$ $(x \geqslant 0)$ — время, за которое последовательность $\{\tilde{\zeta}_1 + \ldots + \tilde{\zeta}_n;\ n = \overline{1, \infty}\}$, выходя из 0, попадает в $[x, +\infty)$. Тогда

$$P\{\tilde{\tau}_x = n\} = P\left\{\sum_{k=1}^{i} \tilde{\theta}_k \leqslant x + \sum_{k=1}^{i} \tilde{\varkappa}_k,\ i = \overline{1, n-1};\ \sum_{k=1}^{n} \tilde{\theta}_k > x + \sum_{k=1}^{n} \tilde{\varkappa}_k\right\}. \tag{79}$$

Далее, если $\tilde{\nu}_k$ — число скачков пуассоновского процесса (с параметром λ) за время $x+\tilde{\varkappa}_1+\tilde{\varkappa}_2+\ldots+\tilde{\varkappa}_k$*), а $\tilde{\mu}_k=\tilde{\nu}_k-k$, то $\tilde{\mu}_k$ представима в виде суммы k независимых слагаемых, которые все, кроме первого, имеют одно и то же распределение**). Если $\tilde{\tau}_k^r$ $(k \geqslant r)$ — время, за которое цепь Маркова $\{\tilde{\mu}_n\}$, выходя из k, впервые попадает в r, то

$$\tilde{\tau}_k^r=\tilde{\tau}_k^{k-1}+\tilde{\tau}_{k-1}^{k-2}+\ldots+\tilde{\tau}_{r+1}^r, \tag{80}$$

где все слагаемые независимы и имеют (начиная со второго) одно и то же распределение. Так как

$$P\{\tilde{\tau}_0^{-1}=n\}=P\{\tilde{\mu}_1 \geqslant 0, \ldots, \tilde{\mu}_{n-1} \geqslant 0, \tilde{\mu}_n<0 \mid \tilde{\mu}_0=0\}=$$

$$=P\{\tilde{\nu}_1 \geqslant 1, \tilde{\nu}_2 \geqslant 2, \ldots, \tilde{\nu}_{n-1} \geqslant n-1, \tilde{\nu}_n<n\}=$$

$$=P\left\{\sum_{k=1}^{i} \tilde{\theta}_k \leqslant x+\sum_{k=1}^{i} \tilde{\varkappa}_k,\quad i=\overline{1, n-1};\ \sum_{k=1}^{n} \tilde{\theta}_k>x+\sum_{k=1}^{n} \tilde{\varkappa}_k\right\},$$

то $\tilde{\tau}_x$ имеет то же распределение, что и $\tilde{\tau}_0^{-1}$. Используя формулу полной вероятности, имеем

$$Ms^{\tilde{\tau}_0^{-1}}=Ms^{\tilde{\tau}_x}=\tilde{\gamma}_x(s)=s\left[P\{\tilde{\mu}_1=-1\}+\sum_{k=0}^{\infty} P\{\tilde{\mu}_1=k\} Ms^{\hat{\tau}_k^{-1}}\right]=$$

$$=s \sum_{k=0}^{\infty} P\{\tilde{\nu}_1=k\} Ms^{\hat{\tau}_k^0}, \tag{81}$$

где $\hat{\tau}_k^r$ — то время, за которое цепь Маркова

$$\tilde{\mu}_2-\tilde{\mu}_1,\quad \tilde{\mu}_3-\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_n-\tilde{\mu}_1, \ldots, \tag{82}$$

выходя из k, впервые попадает в r. Так как (82) является последовательностью сумм независимых и одинаково распределенных слагаемых, то из (81) следует

$$\tilde{\gamma}_x(s)=s \sum_{k=0}^{\infty} P\{\tilde{\nu}_1=k\} \gamma^k(s), \tag{83}$$

где $\gamma(s)=\gamma_0(s)$.

---

*) Пуассоновский процесс предполагается не зависящим от $\tilde{\varkappa}_1, \tilde{\varkappa}_2, \ldots, \tilde{\varkappa}_n, \ldots$.

**) Оно совпадает с распределением числа скачков (уменьшенного на единицу) пуассоновского процесса за время $\tilde{\varkappa}_1$.

Так как

$$P\{\tilde{\nu}_1 = k\} = \int_0^\infty e^{-\lambda(x+z)} \frac{[\lambda(x+z)]^k}{k!} dG(z) \qquad (k \geqslant 0),$$

то

$$\tilde{\gamma}_x(s) = s \exp\{\lambda x [\tilde{\gamma}(s) - 1]\} \tilde{g}[\lambda(1 - \tilde{\gamma}(s))], \tag{84}$$

где

$$\tilde{\gamma}(s) = s\tilde{g}[\lambda(1 - \tilde{\gamma}(s))]. \tag{85}$$

Подставив (85) в (84), получим

$$\tilde{\gamma}_x(s) = \tilde{\gamma}(s) \exp\{\lambda x [\tilde{\gamma}(s) - 1]\}. \tag{86}$$

Рассмотрим несколько примеров.

а) Распределение $G(x)$ сосредоточено в 0, т. е. $\tilde{g}(s) = 1$. Как легко видеть, в этом случае $\tilde{\tau} = 1$, а $\tilde{\tau}_x - 1$ имеет распределение Пуассона с параметром λx. Этот результат тривиально устанавливается и непосредственно.

б) $G(x) = 1 - e^{-\nu x}$ $\left(\tilde{g}(s) = \frac{\nu}{\nu + s}\right)$. Используя (85), получаем

$$\tilde{\gamma}(s) = \frac{\lambda + \nu - \sqrt{(\lambda + \nu)^2 - 4\lambda\nu s}}{2\lambda},$$

$$\tilde{\gamma}_x(s) = \frac{\lambda + \nu - \sqrt{(\lambda + \nu)^2 - 4\lambda\nu s}}{2\lambda} \exp\left\{\frac{x}{2}\left(\nu - \lambda - \sqrt{(\lambda + \nu)^2 - 4\lambda\nu s}\right)\right\},$$

$$\tilde{p}_x = \tilde{\gamma}_x(1) = \begin{cases} 1 & , \lambda < \nu, \\ \frac{\nu}{\lambda} e^{(\nu - \lambda)x}, & \lambda \geqslant \nu \end{cases}$$

$$P\{\tilde{\tau} = n + 1\} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n \frac{\lambda^n \nu^{n+1}}{(\lambda + \nu)^{2n+1}} \qquad (n = \overline{0, \infty}). \tag{87}$$

в) $G(x) = 1 - e^{-\nu x} - \nu x e^{-\nu x}$ $\left(\tilde{g}(s) = \left(\frac{\nu}{\nu + s}\right)^2\right)$. Так как

$$\tilde{\gamma} = \frac{s\nu^2}{[\nu + \lambda(1 - \tilde{\gamma})]^2},$$

то

$$y^3 - 3(\nu + \lambda)^2 y + 27\lambda\nu^2 s - 2(\lambda + \nu)^3 = 0, \tag{88}$$

где

$$\widetilde{\gamma}=\frac{2(\lambda+\nu)-y}{3\lambda}.$$

Решая (88), получаем

$$\widetilde{\gamma}(s)=\frac{4}{3}\,\frac{\lambda+\nu}{\lambda}\sin^2\left[\frac{1}{6}\arccos\left(1-\frac{27\lambda\nu^2 s}{2(\lambda+\nu)^3}\right)\right],$$

$$P\{\widetilde{\tau}=n\}=-\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3}{\lambda+\lambda}\right)^{3n-1}\nu^{2n}a_n \tag{89}$$

$$(n=1,2,\ldots),$$

где $a_0=1$, $a_1=-\frac{1}{9}$, а при $n\geqslant 2$

$$a_n=\frac{4}{3}\sum_{i+j+r=n}a_i a_j a_r$$

(суммирование производится по всем упорядоченным наборам (i, j, r), для которых $i\geqslant 0$, $j\geqslant 0$, $r\geqslant 0$ и $i+j+r=n$).

11. Исследуем теперь решение уравнения (85) в общем случае.

а) $M\widetilde{\theta}_1\geqslant M\widetilde{\chi}_1$, или

$$\lambda\widetilde{e}_1-1\leqslant 0^{*)}. \tag{90}$$

Так как

$$s=\frac{\widetilde{\gamma}}{\widetilde{g}(\lambda-\lambda\widetilde{\gamma})}, \tag{91}$$

то

$$\frac{ds}{d\widetilde{\gamma}}=\frac{\widetilde{g}(\lambda-\lambda\widetilde{\gamma})+\lambda\widetilde{\gamma}\widetilde{g}'(\lambda-\lambda\widetilde{\gamma})}{\widetilde{g}^2(\lambda-\lambda\widetilde{\gamma})}. \tag{92}$$

Числитель дроби, стоящей в правой части (92), обозначим через $\widetilde{h}(\widetilde{\gamma})$. Тогда $\widetilde{h}(1)\geqslant 0$ и $\widetilde{h}'(\widetilde{\gamma})=-\lambda^2\widetilde{\gamma}\widetilde{g}''(\lambda-\lambda\widetilde{\gamma})<0$ $(0\leqslant\widetilde{\gamma}<1)$. Поэтому $\widetilde{h}(\widetilde{\gamma})$ на $[0, 1]$ неотрицательна, а s (как функция $\widetilde{\gamma}$) на этом же интервале монотонно возрастает (от 0 до 1) Этим доказано, что $\widetilde{\gamma}(s)$ $(0\leqslant s\leqslant 1)$ является функцией, обратной монотонной функции

$$s=\frac{\widetilde{\gamma}}{\widetilde{g}(\lambda-\lambda\widetilde{\gamma})}\quad(0\leqslant\widetilde{\gamma}\leqslant 1),$$

---

*) $\widetilde{g}^{(k)}(0)=(-1)^{(k)}\widetilde{e}_k$ $(k=0,1,\ldots)$.

так что в рассматриваемом случае $\tilde{\tau}$ — собственная случайная величина (ибо $s(1) = \tilde{\gamma}(1) = 1$).

Если в (90) стоит равенство, то $M\tilde{\tau} = \infty$. Если $\lambda\tilde{e}_1 < 1$, то $\tilde{\tau}$ имеет столько же моментов, сколько и $\tilde{\varkappa}_1$ (см. п. 5). Дифференцируя тождество (91), имеем

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j}\tilde{m}_j = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \lambda^k \tilde{e}_k \prod_{j=1}^{n} \frac{\tilde{m}_j^{k_j}}{k_j!}\text{*)}, \tag{93}$$

где $k = k_1 + \ldots + k_n$ и суммирование производится по всем упорядоченным наборам $(k_1, \ldots, k_n)$, удовлетворяющим соотношениям

$$k_1 \geqslant 0, \ldots, k_n \geqslant 0, \quad k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n.$$

б) Если $\lambda\tilde{e}_1 - 1 > 0$, то минимальный положительный корень уравнения

$$\tilde{p} = \tilde{g}[\lambda(1 - \tilde{p})] \tag{94}$$

строго меньше 1 и при изменении $\tilde{\gamma}$ от 0 до $\tilde{p}$ правая часть (91) монотонно возрастает от 0 до 1, определяя функцию, обратную $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(s)$ $(0 \leqslant \tilde{\gamma} \leqslant \tilde{p}, 0 \leqslant s \leqslant 1)$. Так как $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{p} < 1$, то $\tilde{\tau}$ — обобщенная случайная величина (с вероятностью $1 - \tilde{p}$ последовательность $\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_1 + \tilde{\zeta}_2, \ldots, \tilde{\zeta}_1 + \ldots + \tilde{\zeta}_n, \ldots$ не содержит положительных членов).

Выведем теперь рекуррентные соотношения между полиномами $\tilde{R}(z_0, z_1, \ldots, z_n)$, фигурирующими в правой части равенства (71). Введем обозначения

$$\left.\frac{d^n\tilde{g}[\lambda - \lambda\tilde{\gamma}(s)]}{ds^n}\right|_{s=0} = \tilde{A}_n,$$

$$\left.\frac{d^n[\lambda - \lambda\tilde{\gamma}(s)]}{ds^n}\right|_{s=0} = -\lambda n!\tilde{p}_n,$$

$$(-1)^n n!\tilde{\varrho}_n = \tilde{g}^{(n)}(\lambda) \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

---

*) $\tilde{m}_j = \frac{1}{j!}\tilde{\gamma}^{(j)}(1) \quad (j = 0, 1, \ldots)$.

Так как $\widetilde{\gamma}(s) = s\widetilde{g}[\lambda - \lambda\widetilde{\gamma}(s)]$, то

$$\widetilde{A}_n = n! \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} k!\,(-\lambda)^k \widetilde{\varrho}_k \prod_{i=1}^{n} \frac{\widetilde{p}_i^{\,k_i}}{k_i!},$$

откуда

$$\widetilde{p}_{n+1} = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} (-\lambda)^k \widetilde{g}^{(k)}(\lambda) \prod_{i=1}^{n} \frac{\widetilde{p}_i^{\,k_i}}{k_i!}. \tag{95}$$

Согласно (71),

$$\widetilde{p}_{n+1} = \lambda^n \widetilde{g}(\lambda)\, \widetilde{R}\,[\widetilde{g}(\lambda), \widetilde{g}'(\lambda), \ldots, \widetilde{g}^{(n)}(\lambda)]. \tag{96}$$

Сравнивая (95) с (96), видим, что

$$\lambda^n \widetilde{g}(\lambda)\, \widetilde{R}\,[\widetilde{g}(\lambda), \ldots, \widetilde{g}^{(n)}(\lambda)] =$$

$$= \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} (-\lambda)^k \widetilde{g}^{(k)}(\lambda) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i!} [\widetilde{g}(\lambda)\, \lambda^{i-1} \widetilde{R}\,(\widetilde{g}(\lambda), \ldots, \widetilde{g}^{(i-1)}(\lambda)]^{k_i}$$

или

$$\widetilde{R}\,[\widetilde{g}(\lambda), \ldots, \widetilde{g}^{(n)}(\lambda)] = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} (-1)^k \widetilde{g}^{(k)}(\lambda)\, \widetilde{g}^{(k-1)}(\lambda) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i!} \widetilde{R}^{k_i}\,[\widetilde{g}(\lambda), \ldots, \widetilde{g}^{(i-1)}(\lambda)],$$

откуда

$$\widetilde{R}\,(z_0, \ldots, z_n) = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} (-1)^k z_0^{k-1} z_k \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i!} \widetilde{R}^{k_i}\,(z_0, \ldots, z_{i-1}). \tag{97}$$

Пусть $\widetilde{\tau}_1$ — первый положительный член последовательности $\{\widetilde{\zeta}_n\}$; если $\widetilde{\tau}_1, \ldots, \widetilde{\tau}_{k-1}$ уже определены, то через $\widetilde{\tau}_k$ обозначим первый член $\{\widetilde{\zeta}_n\}$, больший $\widetilde{\tau}_{k-1}$. Через $\widetilde{x}_t$ обозначим количество членов $\{\widetilde{\tau}_k\}$, не превосходящих t $(t \geqslant 0)$. Тогда (см. п. 6)

$$\widetilde{x}_t = \min(\widetilde{\Delta}, \widetilde{S}_t), \tag{98}$$

где

$$P\{\widetilde{\Delta} = k, \widetilde{S}_t = m\} = (1 - \widetilde{p})\widetilde{p}^k \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} \text{*)} \quad (k, m = 0, 1, \ldots). \tag{99}$$

Из (98), (99) следует

$$P\{\widetilde{x}_t \geqslant k\} = \widetilde{p}^k \left[1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}\right],$$

$$Ms^{\widetilde{x}_t} = \frac{1}{1 - s\widetilde{p}} [1 - \widetilde{p} + \widetilde{p}(1 - s) e^{\lambda t (s\widetilde{p} - 1)}].$$

Теорема 2. Если

$$\widetilde{g}''(0) = \sigma^2, \; -\widetilde{g}'(0) = \frac{1}{\lambda} + \varepsilon, \; \varepsilon = \frac{a}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right) \; (t \to \infty),$$

то

$$\lim_{t\to\infty} P\{\varepsilon \widetilde{x}_t < z\} = \begin{cases} 0, & -\infty < z < 0 \\ 1 - \exp\left\{-\dfrac{2x}{\lambda\sigma^2}\right\}, & 0 \leqslant z \leqslant a\lambda \\ 1, & a\lambda < z < +\infty \end{cases}.$$

12. Пусть $\{x_n, y_n\}$ $(x_n = 1, 2, \ldots, m;\; y_n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — однородная цепь Маркова, для которой

$$P\{x_{n+1} = j, y_{n+1} = l + k \mid x_n = i, y_n = l\} = p_{ij} P\{\mu_{ij} = k\}, \tag{100}$$

где $\| p_{ij} \|$ — стохастическая матрица, $\mu_{ij} = \nu_{ij} - 1$, а

$$Ms^{\nu_{ij}} = \varkappa_{ij}^* [\theta_{ij} + (1 - \theta_{ij}) s]^{**)}.$$

Заметим следующее. Если τ_n — то время, за которое процесс $\{y_k;\; k = \overline{0, \infty}\}$, выходя из 0, впервые попадает в $-n$, а $\pi_n = x_{\tau_n}$,

---

*) $\widetilde{p}$ — минимальный положительный корень уравнения (94).

**) $0 < \theta_{ij} < 1$, а $\varkappa_{ij}^*(s)$ — производящая функция некоторой положительной целочисленной случайной величины.

то пара $\{\pi_n, \tau_n;\ n=\overline{0,\infty}\}$ образует однородную цепь Маркова, для которой

$$P\{\pi_{n+1}=j, \tau_{n+1}=l+k \mid \pi_n=i, \tau_n=l\}= \\ = P\{\pi_1=j, \tau_1=k \mid \pi_0=i, \tau_0=0\} = p_{ij}(k), \tag{101}$$

ибо

$$P\{\pi_{n+1}=j, \tau_{n+1}=l+k \mid \pi_n=i, \tau_n=l\}=$$

$$= P\{x_{l+k}=j;\ y_{l+r} \geqslant -n,\ r=\overline{0, k-1};\ y_{l+k}=-n-1 \mid x_l=i;$$

$$y_l=-n\} = P\{x_k=j;\ y_r \geqslant -n,\ r=\overline{0, k-1};\ y_k=-n-1 \mid x_0=i,$$

$$y_0=-n\} = P\{x_k=j;\ y_r \geqslant 0,\ r=\overline{0, k-1};$$

$$y_k=-1 \mid x_0=i,\ y_0=0\}^{*)}.$$

Введем обозначения

$$P\{\pi_{n+m}=j, \tau_{n+m}=l+k \mid \pi_n=i, \tau_n=l\} = p_{ij}^{(m)}(k)^{**)},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ij}^{(m)}(k)\, s^k = \varphi_{ij}^{(m)}(s),\ \varphi_{ij}^{(1)}(s) = \varphi_{ij}(s),$$

$$\| \varphi_{ij}^{(m)}(s) \| = \mathrm{T}_m(s),\ \mathrm{T}_1(s) = \mathrm{T}(s).$$

Нетрудно видеть, что $\mathrm{T}_m(s) = \mathrm{T}^m(s)$. Поэтому при фиксированных π_0, τ_0 цепь Маркова $\{\pi_n, \tau_n\}$ полностью определяется матрицей $\mathrm{T}(s)$. Покажем, что $\mathrm{T}=\mathrm{T}(s)$ удовлетворяет некоторому функционально-матричному уравнению. В самом деле, так как

$$P\{\pi_1=j, \tau_1=k \mid \pi_0=i, \tau_0=0\} = \delta_{1k} p_{ij} P\{\mu_{ij}=-1\} +$$

$$+ \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{m} p_{it} P\{\mu_{it}=r\}\, P\{x_k=j;\ y_{\tilde r} \geqslant 0,\ \tilde r=\overline{1, k-1};$$

$$y_k=1 \mid x_1=t,\ y_1=r\} = \delta_{1k} p_{ij} P\{\nu_{ij}=0\} +$$

$$+ \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{m} p_{it} P\{\nu_{it}=r+1\}\, P\{x_{k-1}=j;\ y_{\tilde r} \geqslant -r,\ \tilde r=\overline{1, k-2},$$

$$y_{k-1}=-r-1 \mid x_0=t,\ y_0=0\} = \delta_{1k} p_{ij} P\{\nu_{ij}=0\} +$$

$$+ \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{m} p_{it} P\{\nu_{it}=r+1\}\, p_{tj}^{(r+1)}(k-1),$$

*) Последнее равенство следует из (100).

**) Независимость левой части от l и n следует из (101).

то

$$T = s \sum_{r=0} Q_r T^r \quad (|s| \leqslant 1), \tag{102}$$

где

$$Q_r = \| p_{ij} P\{\nu_{ij} = r\} \| \quad (i, j = \overline{1, m}).$$

Уравнение (102) определяет $T(s)$ однозначно. В самом деле, при малых $|s|$ это очевидно *), а так как элементы матрицы $T(s)$ аналитичны в круге $|s| \leqslant 1$, то значение $T(s)$ в круге $|s| < \varepsilon$ позволяет однозначно восстанавливать ее во всей области аналитичности.

Уравнение (102) можно переписать в следующей эквивалентной форме. Пусть $A(s)$ — матрица, аналитическая по s:

$$A(s) = \| \alpha_{ij}(s) \| = \sum_{r=0}^{\infty} A_r s^r.$$

Если под $A(B) = \| \alpha_{ij}(B) \|$ (B — матрица) понимать матрицу $\sum_{r=0}^{\infty} A_r B^r$, то, согласно (102),

$$T = s \| p_{ij} \varkappa_{ij}^* [\theta_{ij} + (1 - \theta_{ij}) T] \|. \tag{103}$$

13. Рассмотрим теперь однородную цепь Маркова $\{x_n, z_n;\ n \geqslant 0\}$**) ($\{x_n;\ n \geqslant 0\}$ та же, что и в п. 12, а $z_n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), определяемую следующим образом: если $(x_n, z_n) = (i, l)$, а $x_{n+1} = j$ (вероятность такого перехода не зависит от l и равна p_{ij}), то (с вероятностью 1)

$$z_{n+1} = l + \theta_{n+1} - \varkappa_{ij}^{(n+1)} \quad (n = \overline{0, \infty}),$$

где θ_n, $\varkappa_{ij}^{(n)}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ — независимые в совокупности случайные величины с распределениями

$$P\{\theta_n = k\} = (1 - \theta)\,\theta^k, \quad P\{\varkappa_{ij}^{(n)} = k\} = \lambda_{ij}^{(k)} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{ij}^{(k)} = 1 \right).$$

Если $z_0 = 0$, то через τ обозначим тот первый индекс, для которого $z_\tau > 0$, и положим $\gamma = z_\tau - 1$. Тогда

$$\varrho_{ij}(r+1, m) = P\{\tau = r + 1, \gamma = m, x_{r+1} = j \mid x_0 = i\} =$$

$$= \sum_{i_1, \ldots, i_r} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_r j} P \left\{ \sum_{n=1}^{k} \theta_n \leqslant \right.$$

*) Решение может быть найдено методом последовательных приближений [4].

**) Цепи Маркова $\{x_n, z_n\}$ и $\{x_n, y_n\}$ (п. 12) являются частными случаями марковских процессов, однородных по второй компоненте [3].

$$\leqslant \sum_{n=1}^{k} \varkappa^{(n)}_{i_{n-1}i_n},\ k=\overline{1,r};\ \sum_{n=1}^{r+1} \theta_n = m+1+\sum_{n=1}^{r+1} \varkappa^{(n)}_{i_{n-1}i_n}\Bigg\} =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_r} p_{ii_1}p_{i_1i_2}\ldots p_{i_rj}M \sum_{(k_1,\ldots k_2)\in D(\varkappa^{(1)}_{ii_1},\ldots,\varkappa^{(r)}_{i_{r-1}i_r})} P\{\theta_1=k_1\}\times \tag{104}$$

$$\times P\{\theta_2=k_2\}\ldots P\{\theta_r=k_r\}\,P\{\theta_{r+1}+k_1+\ldots+k_r=m+1+\varkappa^{(1)}_{ii_1}+\ldots$$

$$\ldots+\varkappa^{(r+1)}_{i_rj}\}^{*)} = (1-\theta)^{r+1}\theta^{m+1}\sum_{i_1,\ldots,i_r} p_{ii_1}\ldots p_{i_rj}\varkappa_{i_rj}(\theta)\times$$

$$\times MI[\varkappa^{(1)}_{ii_1},\ldots,\varkappa^{(r)}_{i_{r-1}i_r}]\,\theta^{\varkappa^{(1)}_{ii_1}+\ldots+\varkappa^{(r)}_{i_{r-1}i_r}}$$

($\varkappa_{ij}(\theta)=\sum\limits_k \lambda^{(k)}_{ij}\theta^k$, а через $I(n_1,\ldots,n_k)$ обозначено число всех векторов, содержащихся в $D(n_1,\ldots,n_k)$). Из (104) следует, что γ и (τ, x_τ) независимы и γ имеет то же распределение, что и θ_1 (т. е. геометрическое с параметром θ). Что же касается пары (τ, x_τ), то ее распределение существенно зависит от цепи Маркова $\{x_n\}$ и распределений случайных величин $\varkappa^{(n)}_{ij}$. В самом деле, согласно (104),

$$\varrho_{ij}(r+1) = P\{\tau=r+1, x_\tau=j\mid x_0=i\} =$$

$$= (1-\theta)^r\theta \sum_{i_1,\ldots,i_r} p_{ii_1}\ldots p_{i_rj}\varkappa_{i_rj}(\theta)MI[\varkappa^{(1)}_{ii_1},\ldots,\varkappa^{(r)}_{i_{r-1}i_r}]\,\theta^{\varkappa^{(1)}_{ii_1}+\ldots+\varkappa^{(r)}_{i_{r-1}i_r}}. \tag{105}$$

Используя (19), можно показать, что

$$\varrho_{ij}(r+1) = \theta(1-\theta)^r \sum_{i_1,\ldots,i_r} p_{ii_1}\ldots p_{i_rj}\varkappa_{i_rj}(\theta)\times$$

$$\times R[\varkappa_{ii_1}(\theta),\ldots,\theta^r\varkappa^{(r)}_{ii_1}(\theta),\ldots,\varkappa_{i_{r-1}i_r}(\theta),\ldots,\theta^r\varkappa^{(r)}_{i_{r-1}i_r}(\theta)], \tag{106}$$

где $R(z_{10},\ldots,z_{1r},\ldots,z_{r0},\ldots,z_{rr})$ — однородный полином r-й степени от $z_{10},\ldots,z_{rr}$. Так,

$$R(z_{10},z_{11}) = z_{10}+z_{11},$$

$$R(z_{10},z_{11},z_{12},z_{20},z_{21},z_{22}) =$$

$$= z_{10}z_{20}+z_{11}z_{21}+2z_{11}z_{20}+z_{10}z_{21}+\frac{1}{2}z_{20}z_{12}$$

и т. д.

---

*) M — символ математического ожидания, а область суммирования $D(n_1,\ldots,n_k)$ определена в п. 1.

Пусть

$$\sum_{r=1}^{\infty} \varrho_{ij}(r) s^r = \pi_{ij}(s),$$

$$\prod(s) = \| \pi_{ij}(s) \|,$$

$$s p_{ij} \varkappa_{ij}(s) = \tilde{\varkappa}_{ij}(s),$$

$$V(s) = \| \tilde{\varkappa}_{ij} [\theta + (1-\theta) s] \|.$$

Докажем, что матрица $\Pi = \Pi(s)$ удовлетворяет следующему функционально-матричному уравнению:

$$\Pi = sV(\Pi). \tag{107}$$

Заметим следующее: если $\theta_n = \theta_n^* - 1$, $\varkappa_{ij}^{(n)} = \tilde{\varkappa}_{ij}^{(n)} - 1$ $(n \geqslant 1)$, то

$$\varrho_{ij}(r+1) = \sum_{i_1, \ldots, i_r} p_{ii_1} \ldots p_{i_r j} \times$$

$$\times P \{\theta_1^* + \ldots + \theta_k^* \leqslant \tilde{\varkappa}_{ii_1}^{(1)} + \ldots + \tilde{\varkappa}_{i_{k-1} i_k}^{(k)},$$

$$k = \overline{1, r};\ \theta_1^* + \ldots + \theta_{r+1}^* > \tilde{\varkappa}_{ii_1}^{(1)} + \ldots + \tilde{\varkappa}_{i_r j}^{(r+1)}\}. \tag{108}$$

Подойдем теперь к определению $\varrho_{ij}(r+1)$ несколько иначе. Обозначим через $\{x_n, y_n^*;\ n \geqslant 0\}$ цепь Маркова, однородную по второй компоненте [4], для которой

$$P\{x_{n+1} = j, y_{n+1}^* = l + k \mid x_n = i, y_n^* = l\} =$$

$$= p_{ij} P\{\tilde{\varkappa}_{ij}^{(n+1)} = k\} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Пусть

$$10010111011 \ldots \tag{109}$$

реализация бесконечной последовательности испытаний Бернулли ($P\{0\} = 1 - P\{1\} = \theta$), независящая от $\{x_n, y_n^*\}$. Если ν_n равна числу единиц последовательности (109) за время y_n^*, а $y_n = \nu_n - n$, то $\{x_n, y_n\}$ — цепь Маркова, однородная по второй компоненте, для которой

$$P\{x_{n+1} = j, y_{n+1} = l + k \mid x_n = i, y_n = l\} = p_{ij} P\{\nu_{ij}^{(n+1)} = k + 1\},^{*)}$$

---

*) $\nu_{ij}^{(n+1)}$ совпадает с числом единиц последовательности (109) за время $\tilde{\varkappa}_{ij}^{(n+1)}$.

где

$$Ms^{\nu_{ij}^{(n+1)}} = [\theta + (1-\theta) s]\, \varkappa_{ij} [\theta + (1-\theta) s] = \varkappa_{ij}^{*} [\theta + (1-\theta) s].$$

Пусть τ_1 — то время, за которое процесс $\{y_n;\ n=\overline{0,\infty}\}$, выходя из 0, впервые попадает в -1, а $\pi_1 = x_{\tau_1}$. Используя обозначения и результаты п. 12, имеем

$$\begin{gathered}
P\{\pi_1 = j, \tau_1 = r+1 \mid x_0 = i, y_0 = 0\} = p_{ij}^{(1)}(r+1) = \\
= P\{x_{r+1} = j; y_1 \geqslant 0, \ldots, y_r \geqslant 0, y_{r+1} = -1 \mid x_0 = i, y_0 = 0\} = \\
= P\{x_{r+1} = j; \nu_k \geqslant k, k = \overline{1, r}; \nu_{r+1} < r+1 \mid x_0 = i, y_0 = 0\} = \\
= \sum_{i_1, \ldots, i_r} p_{ii_1} \ldots p_{i_r j} P\{\nu_{ii_1}^{(1)} + \ldots + \nu_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \geqslant k, \\
k = \overline{1, r};\ \nu_{ii_1}^{(1)} + \ldots + \nu_{i_r j}^{(r+1)} < r+1\}.
\end{gathered} \tag{110}$$

Так как $\theta_1^* + \ldots + \theta_n^*$ — номер n-й по счету единицы в последовательности (109), то события

$$\{\nu_{ii_1}^{(1)} + \ldots + \nu_{i_{k-1}i_k}^{(k)} \geqslant k\},\quad \{\theta_1^* + \ldots + \theta_k^* \leqslant \tilde{\varkappa}_{ii_1}^{(1)} + \ldots + \tilde{\varkappa}_{i_{k-1}i_k}^{(k)}\}$$

совпадают (т. е. являются разными записями одного и того же события). Сравнивая (108) с (110) и используя (103), имеем

$$\varrho_{ij}(r) = p_{ij}^{(1)}(r);\ \pi_{ij}(s) = \varphi_{ij}(s);\ \Pi(s) = \mathrm{T}(s), \tag{111}$$

$$\Pi = s \| \tilde{\varkappa}_{ij} [\theta + (1-\theta)\Pi] \|, \tag{112}$$

что равносильно (107)*). Если

$$\mathrm{P} = \lim_{s \to 1-0} \Pi(s),$$

то, согласно (112), P — подстохастическая матрица, удовлетворяющая уравнению

$$\mathrm{P} = \| \tilde{\varkappa}_{ij} [\theta + (1-\theta) P] \|. \tag{113}$$

14. Пусть $\{z_n\}$ — вторая компонента цепи Маркова (x_n, z_n), рассмотренной в п. 13. Первый положительный член $\{z_n\}$ $(z_0 = 0)$ обозначим через τ_1. Если $\tau_1, \ldots, \tau_{k-1}$ уже определены, то через τ_k обо-

*) Методы решения функционально-матричных уравнений типа (103), (107) разобраны в [4].

значим первый член $\{\alpha_n\}$, больший τ_{k-1}. Нас будет интересовать распределение случайной величины ω_τ, равной числу членов последовательности $\{\tau_k\}$, не превосходящему n.

Введем обозначения

$$P = \| \sigma_{ij} \|, \quad P^r = \| \sigma_{ij}^{(r)} \|, \quad \sum_j \sigma_{ij} = 1 - \sigma_i.$$

Согласно предыдущему, если $x_0 = i$, то с вероятностью σ_i $\{z_n\}$ не содержит ни одного положительного члена (считаем, что в этом случае $\tau_1 = \infty$). Если же $\tau_1 < \infty$, то

$$P\{\tau_1 = k, \ x_\tau = j \mid x_0 = i\} = \sigma_{ij} (1 - \theta)\, \theta^{k-1} \quad (k = \overline{1, \infty})^{*)}.$$

Пусть Δ_i, S_n — независимые случайные величины с распределениями

$$P\{s_n = k\} = C_n^k \theta^{n-k} (1 - \theta)^k \quad (k = \overline{0, n+1}),$$

$$P\{\Delta_i = r\} = \sum_j [\sigma_{ij}^{(r)} - \sigma_{ij}^{(r+1)}] \quad (r = \overline{0, \infty}).$$

Повторяя рассуждения п. 6, нетрудно показать, что $\omega_n^{(i)}$ **) имеет распределение, совпадающее с распределением $\min(\Delta_i, S_n)$. Поэтому

$$P\{\omega_n^{(i)} \geqslant l\} = \sum_j \sigma_{ij}^{(l)} \sum_{k \geqslant l} C_n^k \theta^{n-k} (1 - \theta)^k. \tag{114}$$

Исследуем теперь распределение времени первого перескока уровня r последовательностью $\{z_n;\ n = 0, 1, \ldots\}$. Если через $\tau^{(r)}$ обозначить момент первого перескока $\{z_n\}$ через уровень r и положить $\gamma^{(r)} = z_{\tau^{(r)}} - r$, то $\gamma^{(r)}$, $\tau^{(r)}$ независимы, причем

$$P\{\gamma^{(r)} = k \mid x_0\} = (1 - \theta)\, \theta^k \quad (k = \overline{0, \infty}).$$

Доказательство этого утверждения проводится методами п. 13, в котором рассмотрен случай $r = 1$.

Используя формулу полной вероятности, имеем

$$\varrho_{ij}(r \mid n + 1) = P\{\tau^{(r)} = n + 1,\ x_{n+1} = j \mid z_0 = 0,\ x_0 = i\} =$$

$$= \sum_{i_1, \ldots, i_n} p_{ii_1} \ldots p_{i_n j} P \left\{ \sum_{t=1}^{k} \theta_r^* < r + \sum_{t=1}^{k} \tilde{\varkappa}_{i_{t-1} i_t}^{(t)},\ k = \overline{1, n}; \right.$$

$$\left. \sum_{t=1}^{n+1} \theta_t^* \geqslant r + \sum_{t=1}^{n+1} \tilde{\varkappa}_{i_{t-1} i_t}^{(t)} \right\}^{***)} \tag{115}$$

---

*) τ — тот первый момент времени, для которого $z_\tau > 0$.

**) Индекс i указывает на то, что $x_0 = i$.

***) $i_0 = i$, $i_{n+1} = j$, а в остальном здесь сохранены обозначения п. 13.

Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_{ij}(r \mid n) s^n = \pi_{ij}(s \mid r), \quad \| \pi_{ij}(s \mid r) \| = \Pi_r(s),$$

то, используя (115) и повторяя рассуждения п. п. 12 — 13, приходим к следующему равенству:

$$\Pi_r(s) = s \sum_{k=0}^{\infty} Q_{rk} \Pi^k(s), \tag{116}$$

где

$$Q_{rk} = \| p_{ij} P \{ \nu_{ij}(r) = k \} \|^{*)} \ (k = 0, 1, \ldots).$$

Так как

$$\Pi(s) = s \sum_{k=0}^{\infty} Q_{1k} \Pi^k(s),$$

$$P\{\nu_{ij}(r) = k\} = \sum_{t=0}^{k} P\{\nu_{ij}(1) = t\} C_{r-1}^{k-t} (1-\theta)^{k-t} \theta^{r-1-k+t},$$

то

$$Q_{rk} = \sum_{t=0}^{k} C_{r-1}^{k-t} (1-\theta)^{k-t} \theta^{r-1-k+t} Q_{1t}.$$

Поэтому

$$\Pi_r = s \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{k} C_{r-1}^{k-t} (1-\theta)^{k-t} \theta^{r-1-k+t} Q_{1t} \Pi^k =$$

$$= s \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=t}^{\infty} C_{r-1}^{k-t} \left(\frac{1-\theta}{\theta} \right)^{k-t} \theta^{r-t} Q_{1t} \Pi^t \Pi^{k-t} =$$

$$= s \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} C_{r-1}^{u} \left(\frac{1-\theta}{\theta} \right)^{u} \theta^{r-1} Q_{1t} \Pi^t \Pi^u =$$

$$= \theta^{r-1} \Pi \sum_{u-0}^{\infty} C_{r-1}^{u} \left(\frac{1-\theta}{\theta} \right)^{u} \Pi^u = \theta^{r-1} \Pi \left[I + \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \Pi \right]^{r-1},$$

или

$$\Pi_r(s) = \Pi(s) [\theta I + (1-\theta) \Pi(s)]^{r-1} \quad (I = \| \delta_{ij} \|), \tag{117}$$

где

$$\Pi(s) = s \| \tilde{\varkappa}_{ij} [\theta + (1-\theta) \Pi(s)] \|.$$

---

*) $\nu_{ij}(r)$ совпадает с числом единиц последовательности (109) за время $r - 1 + \tilde{\varkappa}_{ij}^{(1)}$.

15. Пусть $\{x_n, \tilde{y}_n\}$ — цепь Маркова, однородная по второй компоненте, для которой

$$P\{x_{n+1}=j,\ \tilde{y}_{n+1}=l+k \mid x_n=i,\ \tilde{y}_n=l\} = p_{ij} P\{\tilde{\nu}_{ij}^{(n+1)}=k+1\}$$

$$(k=-1, 0, 1, \ldots),$$

где

$$Ms^{\tilde{\nu}_{ij}^{(n+1)}} = \tilde{g}_{ij}[\lambda_{ij}(1-s)]^{*)}.$$

Если $\tilde{\tau}_n$ — то время, за которое процесс $\{\tilde{y}_k;\ k=\overline{0,\infty}\}$, выходя из 0, впервые попадает в $-n$, а $\tilde{\pi}_n = x_{\tilde{\tau}_n}$, то пара $\{\tilde{\pi}_n, \tilde{\tau}_n\}$ образует цепь Маркова, однородную как по времени, так и по второй компоненте. Введем обозначения

$$P\{\tilde{\pi}_{n+m}=j,\ \tilde{\tau}_{n+m}=l+k \mid \tilde{\pi}_n=i,\ \tilde{\tau}_n=l\} = p_{ij}^{(m)}(k),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{p}_{ij}^{(m)}(k)\, s^k = \tilde{\varphi}_{ij}^{(m)}(s),$$

$$\|\tilde{\varphi}_{ij}^{(m)}(s)\| = \tilde{\mathrm{T}}^m(s)^{**)};$$

$\tilde{\mathrm{T}}(s)$ так же, как и $\mathrm{T}(s)$ (п. 12), удовлетворяет некоторому функционально-матричному уравнению

$$\tilde{\mathrm{T}} = s \sum_{k=0}^{\infty} \|p_{ij} P\{\nu_{ij}^{(1)}=k\}\|\, \tilde{\mathrm{T}}^k. \tag{118}$$

По аналогии со (103) (118) можно переписать так:

$$\tilde{\mathrm{T}} = s\,\|p_{ij}\tilde{g}_{ij}[\lambda_{ij}(1-\tilde{\mathrm{T}})]\|. \tag{119}$$

Рассмотрим теперь цепь Маркова $\{x_n, \tilde{z}_n\}$, однородную по второй компоненте, для которой

$$P\{x_{n+1}=j,\ \tilde{z}_{n+1}<x+y \mid x_n=i,\ \tilde{z}_n=y\} = p_{ij} P\{\tilde{\theta}_{n+1} - \hat{\varkappa}_{ij}^{(n+1)} < x\},$$

---

*) $\tilde{g}_{ij}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dG_{ij}(x)$, где $G_{ij}(x)$ — функция распределения некоторой неотрицательной случайной величины.

**) Последнее равенство — следствие того, что $\{\pi_n, \tau_n\}$ — цепь Маркова, однородная по второй компоненте.

где $\widetilde{\theta}_{n+1}$, $\hat{\dot{\varkappa}}_{ij}^{(n+1)}$ неотрицательны, независимы и

$$P\{\widetilde{\theta}_{n+1} \geqslant x\} = e^{-\lambda x}, \quad P\{\hat{\varkappa}_{ij}^{(n+1)} < x\} = G_{ij}(x).$$

Если $\widetilde{z}_0 = 0$, то через $\widetilde{\tau}$ обозначим тот первый момент времени, для которого $\widetilde{z}_{\widetilde{\tau}} > 0$, и положим $\widetilde{\gamma} = \widetilde{z}_{\widetilde{\tau}}$. По аналогии со (104) имеем

$$P\{\tau = r+1,\ \widetilde{\gamma} \geqslant x,\ x_{r+1} = j \mid x_0 = i\} = \widetilde{\varrho}_{ij}(r+1, x) =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_r} p_{ii_1}\ldots p_{i_rj} P\left\{\sum_{t=1}^{k} \widetilde{\theta}_t \leqslant \sum_{t=1}^{k} \hat{\varkappa}_{i_{t-1}i_t}^{(t)},\ k = \overline{1, r},\ \sum_{t=1}^{r+1} \widetilde{\theta}_t \geqslant x + \right.$$

$$\left. + \sum_{t=1}^{r+1} \hat{\varkappa}_{i_{t-1}i_t}^{(t)}\right\} = \sum_{i_1,\ldots,i_r} p_{ii_1}\ldots p_{i_rj} M\lambda^r \int\limits_{(y_1,\ldots,y_r)\in D[\hat{\varkappa}_{ii_1}^{(1)},\ldots,\hat{\varkappa}_{i_{r-1}i_r}^{(r)}]}\cdots\int \exp\{x +$$

$$+ \hat{\varkappa}_{ii_1}^{(1)} + \ldots + \hat{\varkappa}_{i_rj}^{(r)}\}\, dy_1\ldots dy_r = \lambda^r e^{-\lambda x} \sum_{i_1,\ldots,i_r} p_{ii_1}\ldots$$

$$\ldots p_{i_rj} \hat{\varkappa}_{i_rj}(\lambda) M\widetilde{I}[\hat{\varkappa}_{ii_1}^{(1)}, \ldots, \hat{\varkappa}_{i_{r-1}i_r}^{(r)}] \exp\left\{-\lambda \sum_{t=1} \hat{\varkappa}_{i_{t-1}i_t}^{(t)}\right\}, \qquad (120)$$

где $i_0 = i$, $i_{r+1} = j$, $\hat{\varkappa}_{ij}(\lambda) = M\exp\{-\lambda\hat{\varkappa}_{ij}^{(n)}\}$, а $\widetilde{D}$ и $\widetilde{I}$ определены в п. 9.

Из (120) и (70) следует, что $\widetilde{\gamma}$ и $(\widetilde{\tau}, x_{\widetilde{\tau}})$ независимы, причем $\widetilde{\gamma}$ (независимо от x_0) имеет показательное распределение с параметром λ, а

$$\widetilde{\varrho}_{ij}(r+1) = P\{\widetilde{\tau} = r+1,\ x_{r+1} = j \mid x_0 = i\} =$$

$$= \lambda^r \sum_{i_1,\ldots,i_r} p_{ii_1}\ldots p_{i_rj} \hat{\varkappa}_{i_rj}(\lambda) M\widetilde{I}[\hat{\varkappa}_{ii_1}^{(1)}, \ldots, \hat{\varkappa}_{i_{r-1}i_r}^{(r)}] \exp\left\{-\lambda \sum_{t=1}^{r} \hat{\varkappa}_{i_{t-1}i_t}^{(t)}\right\} =$$

$$= \lambda^r \sum_{i_1,\ldots,i_r} p_{ii_1}\ldots p_{i_rj} \hat{\varkappa}_{i_rj}(\lambda) \widetilde{R}[\hat{\varkappa}_{ii_1}(\lambda), \ldots, \hat{\varkappa}_{ii_1}^{(r)}(\lambda), \ldots$$

$$\ldots, \hat{\varkappa}_{i_{r-1}i_r}(\lambda), \ldots, \hat{\varkappa}_{i_{r-1}i_r}^{(r)}(\lambda)], \qquad (121)$$

где $\widetilde{R}(z_{10}, z_{11}, \ldots, z_{1r}, \ldots, z_{r0}, z_{r1}, \ldots, z_{rr})$ — однородный полином r-й степени от $z_{10}, \ldots, z_{rr}$. Связь между полиномами $\widetilde{I}(z_1, \ldots, z_r)$

(см. п. 9) и $\widetilde{R}(z_{10}, \ldots, z_{rr})$ следующая: если

$$\widetilde{I}(z_1, \ldots, z_r) = \sum_{j_1+\ldots+j_r=r} a(j_1, \ldots, j_r) z_1^{j_1} \ldots z_r^{j_r},$$

то

$$\widetilde{R}(z_{10}, z_{11}, \ldots, z_{1r}, \ldots, z_{r0}, z_{r1}, \ldots, z_{rr}) =$$

$$= (-1)^r \sum_{j_1+\ldots+j_r=r} a(j_1, \ldots, j_r) z_{1j_1} \ldots z_{rj_r}. \tag{122}$$

Например,

$$\widetilde{R}(z_{10}, z_{11}) = z_{11},$$

$$\widetilde{R}(z_{10}, z_{11}, z_{12}, z_{20}, z_{21}, z_{22}) = \frac{1}{2} z_{12} z_{20} + z_{11} z_{21}$$

и т. д.

Введем обозначения

$$\sum_{r=1}^{\infty} \widetilde{\varrho}_{ij}(r) s^r = \widetilde{\pi}_{ij}(s), \ \| \widetilde{\pi}_{ij}(s) \| = \widetilde{\Pi}(s).$$

Используя (119) и повторяя рассуждения п. 13, можно доказать, что $\widetilde{\Pi} = \widetilde{\Pi}(s)$ — решение уравнения

$$\widetilde{\Pi} = s \| p_{ij} \widetilde{g}_{ij} [\lambda (1 - \widetilde{\Pi})] \|. \tag{123}$$

Если $\widetilde{P} = \lim\limits_{s \to 1-0} \widetilde{\Pi}(s)$, то $\widetilde{P}$ — подстохастическая матрица, удовлетворяющая уравнению

$$\widetilde{P} = \| p_{ij} \widetilde{g}_{ij} [\lambda (1 - \widetilde{P})] \|. \tag{124}$$

16. Пусть $\{\widetilde{z}_n\}$ имеет тот же смысл, что и в предыдущем пункте. Первый положительный член $\{\widetilde{z}_n\}$ $(\widetilde{z}_0 = 0)$ обозначим через $\widetilde{\tau}_1$. Если $\widetilde{\tau}_1, \ldots, \widetilde{\tau}_{k-1}$ уже определены, то через $\widetilde{\tau}_k$ обозначим первый член $\{\widetilde{z}_n\}$, больший $\widetilde{\tau}_{k-1}$. Пусть $x_0 = i$, а $\widetilde{\omega}_t^{(i)}$ — число членов последовательности $\{\widetilde{\tau}_k\}$, не превосходящих t. Рассуждая так же, как и в п. п. 11, 14, можно показать, что

$$\widetilde{\omega}_t^{(i)} = \min(\widetilde{\Delta}_i, \widetilde{S}_t), \tag{125}$$

где

$$P\{\widetilde{\Delta}_i = r, \widetilde{S}_t = k\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\sum_j [\widetilde{\sigma}_{ij}^{(r)} - \widetilde{\sigma}_{ij}^{(r+1)}], \tag{126}$$

$$\widetilde{\mathrm{P}}^r = \|\widetilde{\sigma}_{ij}^{(r)}\| \quad (r = 0, 1, \ldots).$$

Исследуем распределение времени первого перескока уровня $x \geqslant 0$ последовательностью $\{z_n;\ n = \overline{0, \infty}\}$. Если через $\widetilde{\tau}^{(x)}$ обозначить момент первого перескока $\{z_n\}$ через уровень и положить $\widetilde{\gamma}^{(x)} = \widetilde{z}_{\widetilde{\tau}(x)} - x$, то $\widetilde{\tau}^{(x)}$ и $\widetilde{\gamma}^{(x)}$ независимы и $P\{\widetilde{\gamma}^{(x)} \geqslant z\} = e^{-\lambda z}$. Это очевидно. Что же касается $\widetilde{\tau}^{(x)}$, то

$$\widetilde{\varrho}_{ij}(x \mid n+1) = P\{\widetilde{\tau}^{(x)} = n+1,\ x_{n+1} = j \mid \widetilde{z}_0 = 0, x_0 = i\} =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_r} p_{ii_1}\ldots p_{i_nj}P\left\{\sum_{t=1}^{k}\widetilde{\theta}_t < x + \sum_{t=1}^{k}\hat{\varkappa}_{i_{t-1}i_t}^{(t)},\ k = \overline{1, n};\right.$$

$$\left.\sum_{t=1}^{n+1}\widetilde{\theta}_t \geqslant x + \sum_{t=i}^{n+1}\hat{\varkappa}_{i_{t-1}i_t}^{(t)}\right\}.$$

Введем обозначения:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\varrho}_{ij}(x \mid n)s^n = \widetilde{\pi}_{ij}(s \mid x),$$

$$\|\widetilde{\pi}_{ij}(s \mid x)\| = \widetilde{\Pi}_x(s);$$

тогда (см. п. 14)

$$\widetilde{\Pi}_x(x) = s\sum_{k=0}^{\infty} Q_k^{(x)}\widetilde{\Pi}^k(s), \tag{127}$$

где $\widetilde{\Pi}(s)$ определяется уравнением (123), а

$$Q_k^{(x)} = \|p_{ij}P\{\widetilde{\nu}_{ij}(x) = k\}\|,$$

$$Ms^{\widetilde{\nu}_{ij}(x)} = e^{\lambda x(s-1)}\widetilde{g}_{ij}[\lambda(1-s)].$$

Так как

$$\widetilde{\Pi}(s) = s\sum_{k=0}^{\infty} Q_k^{(0)}\widetilde{\Pi}^k(s),$$

$$P\{\widetilde{\nu}_{ij}(x) = k\} = \sum_{t=0}^{k} P\{\widetilde{\nu}_{ij}(0) = t\}e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{k-t}}{(k-t)!},$$

то

$$Q_k^{(x)} = e^{-\lambda x} \sum_{t=0}^{k} \frac{(\lambda x)^{k-t}}{(k-t)!} Q_t^{(0)}.$$

Поэтому

$$\widetilde{\Pi}_x(s) = s \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{k} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{k-t}}{(k-t)!} Q_t^{(0)} \widetilde{\Pi}^k(s) =$$

$$= s \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=t}^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{k-t}}{(k-t)!} Q_t^{(0)} \widetilde{\Pi}^t(s) \widetilde{\Pi}^{(k-t)}(s) =$$

$$= s \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^u}{u!} Q_t^{(0)} \widetilde{\Pi}^t(s) \widetilde{\Pi}^u(s) =$$

$$= \widetilde{\Pi}(s) \sum_{u=0}^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^u}{u!} \widetilde{\Pi}^u(s)$$

или

$$\widetilde{\Pi}_x(s) = \widetilde{\Pi}(s) \exp\{\lambda x [\widetilde{\Pi}(s) = 1]\},$$

где под $e^{A+\alpha}$ (α — число, A — матрица) понимается матрица $e^{\alpha}e^{A}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ежов И. И. Исследования по теории случайных процессов с дискретной компонентой. Докт. дисс., Ин-т математики АН УССР, Киев, 1967.
2. Риордан Д. Введение в комбинаторный анализ. ИЛ, М., 1963.
3. Ежов И. И., Скороход А. В. Марковские процессы, однородные по второй компоненте. I.— Теор. вероят. и применен., вып. 1, 1969.
4. Ежов И. И. Цепи Маркова, однородные по второй компоненте, и их применение к задаче о времени первого выхода за данный уровень.— Труды 6-й Всесоюзной математической школы. Изд. ИМ АН УССР, Киев, 1969.

I. I. Yezhov

ON DISTRIBUTION OF TIME OF THE FIRST SKIP FROM FIXED LEVEL FOR ONE CLASS OF RANDOM SUCCESSION. I, II

Summary

The distribution of some functionals which are examined on the succession of the sum random variables with geometrical and exponential components is studied in this paper.

Поступила в редакцию 28.IV 1969.