И. Н. КОВАЛЕНКО, проф., О. М. ЮРКЕВИЧ, асп.
Москва

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ТЕОРИИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Постановка задачи В настоящей статье рассматривается задача, состоящая в определении основных характеристик некоторых систем массового обслуживания.

Пусть в системе обслуживания имеется n приборов, эквивалентных между собой. Предположим, если в системе находится k требований ($k=0$, 1, 2, ...), то вероятность поступления в систему дополнительного требования за малое время h равна $\lambda_k h + o(h)$. Это значит, что параметр входящего потока требований является функцией целочисленного аргумента и изменяется в зависимости от числа находящихся в системе требований.

Пусть длительность обслуживания — случайная величина с распределением вероятностей

$$H(x) = 1 - e^{-\nu x} \quad (\nu > 0).$$

В этих условиях будем рассматривать системы массового обслуживания двух видов: а) со временем ожидания, ограниченным некоторым числом τ; б) со временем пребывания, ограниченным числом τ. Предположим, что в обоих случаях $\tau = \mathrm{const}$.

Для случая, когда входящий поток является простейшим, описанная задача решена в книге Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко [1].

Система с ограниченным временем ожидания. Пусть, как и в [1], $P_k(t, x_1, \ldots, x_k)$ есть вероятность того, что в момент t заняты k приборов с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$, причем $\xi_{j_1} < x_1$, $\xi_{j_2} < x_2, \ldots$, $\xi_{j_k} < x_k$, а при $i \neq j_s$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$ $\xi_i(t) = 0$, где $1 \leqslant k \leqslant n$, $x_{j_s} > 0$.

Составим уравнения для плотностей вероятностей $p_k(t, x_1, \ldots$ $\ldots, x_k)$ (существование плотностей $p_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ нетрудно показать [1]).

Начнем с $p_0(t)$. Очевидно,

$$p_0(t+h) = (1 - \lambda_0 h)\, p_0(t) + n p_1(t, 0) + o(h).$$

Отсюда получим следующее уравнение:

$$p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t) + n p_1(t, 0). \qquad (1)$$

Для $p_k(t, x_1, \ldots, x_k)$ $(1 \leqslant k < n)$ имеем

$$\frac{\partial p_k}{\partial t} - \frac{\partial p_k}{\partial x_1} - \ldots - \frac{\partial p_k}{\partial x_k} = -\lambda_k p_k(t, x_1, \ldots, x_k) +$$

$$+ (n-k) p_{k+1}(t, x_1, \ldots, x_k, 0) +$$

$$+ \frac{\lambda_{k-1}\nu}{n-k+1} \sum_{i=1}^{k} p_{k-1}(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k) e^{-\nu x_i}. \qquad (2)$$

И, наконец, для $p_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ уравнение примет вид:

$$\frac{\partial p_n}{\partial t} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial p_n}{\partial x_j} = -\lambda_n p_n(t, x_1, \ldots, x_n) \frac{1 + \operatorname{sign}(\tau - \min\limits_i x_i)}{2} +$$

$$+ \lambda_{n-1}\nu \sum_{i=1}^{n} p_{n-1}(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) e^{-\nu x_i} +$$

$$+ \lambda_n \nu \sum_{i=1}^{n} \int_0^m p_n(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_n) e^{-\nu(x_i - z)}\, dz, \qquad (3)$$

где

$$m = \min(\tau, x_1, \ldots, x_n).$$

Рассмотрим решение системы (1) — (3) для стационарного случая, при котором функции p_k от t не зависят. При этом, очевидно, $\frac{\partial p_k}{\partial t} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, а функция $p_0(t)$ превращается в постоянную p_0.

Функции p_k $(k = 1, 2, \ldots)$ будем искать в виде

$$p_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \alpha_k e^{-\nu(x_1 + \ldots + x_k)},$$

где α_k — постоянные величины.

Для определения α_k используем уравнения (1) и (2) при $k = 1, 2, \ldots, n-1$. В результате получим

$$\alpha_k = \frac{p_0 (n-k)!}{n!} \prod_{j=0}^{k-1} \lambda_j.$$

Таким образом, при $1 \leqslant k < n$ имеем

$$p_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = p_0 \frac{(n-k)!}{n!} \prod_{j=0}^{k-1} \lambda_j e^{-\nu(x_1+\ldots+x_k)}.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что функция

$$p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{p_0}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} \lambda_j e^{-\nu(x_1+\ldots+x_n)+\lambda_n \min(\tau, x_1, \ldots, x_n)}$$

удовлетворяет уравнению (3). Можно доказать единственность решения уравнения (3).

Обозначим через E_k событие, состоящее в том, что в системе заняты k произвольных приборов. Тогда вероятность $P\{E_k\}$ при $k = 1, 2, \ldots, n-1$ можно определить следующим образом:

$$P\{E_k\} = C_n^k \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty p_k(x_1, \ldots, x_k)\, dx_1 \ldots dx_k =$$

$$= C_n^k \frac{(n-k)!}{n!} p_0 \prod_{j=0}^{k-1} \lambda_j \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty e^{-\nu(x_1+\ldots+x_k)}\, dx_1 \ldots dx_k =$$

$$= \frac{p_0}{\nu^k k!} \prod_{j=0}^{k-1} \lambda_j = \frac{p_0}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \varrho_j,$$

где

$$\varrho_j = \frac{\lambda_j}{\nu}, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Для вычисления вероятности $P(E_n)$ приведем, опуская довольно простые, но громоздкие вычисления, значение интеграла

$$I_n = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty e^{-\nu(x_1+\ldots+xn)+\lambda_n \min(r_0, x_1, \ldots, x_n)}\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda_n e^{(\lambda_n - n\nu)r} - n\nu}{\nu^n(\lambda_n - n\nu)}, & \lambda_n \neq n\nu \\[2ex] \dfrac{1 + n\nu r}{\nu^n}, & \lambda_n = n\nu. \end{cases}$$

Вычислим теперь вероятность

$$P\{E_n\} = \frac{p_0}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}\lambda_j\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty e^{-\nu(x_1+\ldots+x_n)+\lambda_n\min(\tau,x_1,\ldots,x_n)}\,dx_1,\ldots,dx_n =$$

$$= \frac{p_0}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}\lambda_j\,\frac{\lambda_n e^{(\lambda_n-n\nu)\tau}-n\nu}{\nu^n(\lambda_n-n\nu)} = \frac{p_0}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}\varrho_j\,\frac{\varrho_n e^{(\varrho_n-n)\tau\nu}-n}{\varrho_n-n},$$

если $\varrho_n \neq n$;

$$P\{E_n\} = \frac{p_0}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}\lambda_j\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty e^{-\nu(x_1+\ldots+x_n)+\lambda_n\min(\tau,x_1,\ldots,x_n)}\,dx_1\ldots dx_n =$$

$$= \frac{p_0}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}\lambda_j\frac{n\tau\nu+1}{\nu^n} = \frac{p_0}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}\varrho_j(\nu\varrho_n\tau+1),\quad \text{если } \varrho_n = n,$$

где $\varrho_j = \dfrac{\lambda_i}{\nu}$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$.

Подставив найденные значения вероятностей $P\{E_k\}$ в тождество $\sum\limits_{k=0}^{n} P\{E_k\} = 1$, найдем значение p_0

$$p_0^{-1} = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{k!}\prod\limits_{j=0}^{k-1}\varrho_j + \dfrac{1}{n!}\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varrho_j\,\dfrac{\varrho_n e^{\nu\tau(\varrho_n-n)}-n}{\varrho_n-n}, & \text{если } \varrho_n \neq n, \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{k!}\prod\limits_{j=0}^{k-1}\varrho_j + \dfrac{1}{n!}\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varrho_j(1+\nu\varrho_n\tau), & \text{если } \varrho_n = n. \end{cases}$$

Вычислим характеристику системы, представляющую особый интерес. Обозначим через Λ_0 интенсивность потока отказов. Тогда получим

$$\Lambda_0 = \lambda_n P\{\xi_i > \tau,\ i = 1, 2, \ldots, n\} = \lambda_n\int_\tau^\infty\ldots\int_\tau^\infty p_n(x_1,\ldots$$

$$\ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n = \frac{p_0}{n!}\prod_{j=0}^{n}\lambda_j\int_\tau^\infty\ldots\int_\tau^\infty e^{-\nu(x_1+\ldots+x_n)+\lambda_n\tau}\,dx_1\ldots$$

$$\ldots dx_n = \frac{p_0\nu}{n!}\prod_{j=0}^{n}\varrho_j e^{-\nu\tau(n-\varrho_n)}.$$

Система с ограниченным временем пребывания. При выводе уравнений ограничимся стационарным случаем. Уравнения, описывающие процесс, имеют следующий вид (по аналогии с [1]):

$$\lambda_0 p_0 = n\varrho_1(0);$$

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial p_k}{\partial x_j} - \lambda_k p_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) + (n-k)\, p_{k+1}(x_1, \ldots, x_k, 0) +$$

$$+ \frac{\lambda_{k-1}\nu}{n-k+1} \sum_{i=1}^{k} p_{k-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k)\, e^{-\nu x_i} = 0$$

при $0 < x_i < \tau \quad (1 \leqslant i \leqslant k), \quad 1 \leqslant k < n;$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p_n}{\partial x_j} = \lambda_n p_n(x_1, \ldots, x_n) - \lambda_{n-1}\nu \sum_{i=1}^{n} p_{n-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots$$

$$\ldots, x_n)\, e^{-\nu x_i} - \lambda_n \nu \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\min\limits_{(i)} x_i} p_n(x_1, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_n)\, e^{-\nu(x_i - z)}\, dz$$

при $0 < x_i < \tau \ (1 \leqslant i \leqslant n)$.

Решение должно удовлетворять следующим граничным условиям:

$$p_k(\tau, x_2, x_3, \ldots, x_k) = \frac{\lambda_{k-1}}{n-k+1}\, p_{k-1}(x_2, x_3, \ldots, x_k)\, e^{-\nu\tau},$$

$$p_n(\tau, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \lambda_{n-1} p_{n-1}(x_2, \ldots, x_n)\, e^{-\nu\tau} + \lambda_n \times$$

$$\times \int_0^{\min(x_2, \ldots, x_n)} p_n(z, x_2, \ldots, x_n)\, e^{-\nu(\tau - z)} dz.$$

При $0 < x_i < \tau$ функции

$$p_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{p_0 (n-k)!}{n!} \prod_{j=0}^{k-1} \lambda_j e^{-\nu(x_1 + \ldots + x_k)} \quad (1 \leqslant k < n),$$

$$p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{p_0}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} \lambda_j e^{-\nu(x_1 + \ldots + x_n) + \lambda_n \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i}$$

удовлетворяют системе уравнений и граничным условиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. «Наука», М., 1966.

I. N. Kovalenko, O. M. Yurkevich

A CONTRIBUTION TO THE THEORY OF QUEUES WITH IMPATIENT CUSTOMERS

Summary

The authors propose formulae describing the steady-state distribution of the states of two queing-systems with impatient customers and an input intensity depending on the queue length.

Поступила в редакцию 8.IV 1969.