Ю. В. КОЗАЧЕНКО, канд. физ. мат. наук
Киевский университет

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЙНЫХ РЯДОВ

Хант [1] рассматривал ряды вида $S(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\xi_n e^{i\lambda_n t}$, где ξ_n — независимые случайные величины, λ_n — действительные числа, такие, что $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\ldots<\lambda_n\to\infty$.

Было показано, что, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} M|\xi_n|^{\gamma}\ln^{1+\beta}\lambda_n<\infty,\ 1<\gamma\leqslant 2,\ \beta>0,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\xi_n e^{i\lambda_n t}$ сходится равномерно по $|t|<A$ с вероятностью единица.

В настоящей работе обобщается этот результат Ханта. В качестве следствия из полученных результатов сформулировано достаточное условие непрерывности выборочных функций гауссовских изотропных случайных полей на сфере.

I. Рассмотрим ряд

$$S(x_1,x_2,\ldots,x_p)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n P_n(x_1,x_2,\ldots,x_p). \tag{1}$$

Здесь ξ_n — независимые случайные величины, такие, что

$$M\xi_n=0,\ M|\xi_n|^{\gamma}=b_n<\infty,\ 1<\gamma\leqslant 2; \tag{2}$$

$P_n(x_1,x_2,\ldots,x_p)$ — набор произвольных тригонометрических полиномов от p переменных,

$$P_n(x_1,x_2,\ldots,x_p)=$$
$$=\sum_k a_{k,n}\exp\left[i\left(m_{1,k,n}x_1+m_{2,k,n}x_2+\ldots+m_{p,k,n}x_p\right)\right],$$

где n—номер полинома, показывающий, что $P_n(x_1, x_2, \ldots x_p)$ является коэффициентом при ξ_n, $m_{i,k,n}$ — целые числа, k — целые числа, принимающие значения из некоторого множества $I_n = \{1 \leqslant k \leqslant T_n\}$, зависящего от n.

Обозначим

$$t_n = \sum_{i=1}^{p} \max_{1 \leqslant s \leqslant n} \max_{1 \leqslant k \leqslant T_n} |m_{i,k,s}|.$$

Предположим, что $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n \to \infty$. Пусть

$$A_n = \sup_{0 \leqslant x_i \leqslant 2\pi,\, 1 \leqslant i \leqslant p} |P_n(x_1, \ldots, x_p)|.$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n A_n^{\gamma} < \infty, \quad 1 < \gamma \leqslant 2. \tag{3}$$

Сходимость ряда (3) обеспечивает сходимость с вероятностью единица ряда (1).

Обозначим

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} \xi_r P_r(x_1, x_2, \ldots, x_p).$$

Пусть $\varphi(u)$ — некоторая монотонно возрастающая функция от u, удовлетворяющая условиям

$$\left| \int_1^{\infty} \ln^{\frac{1}{2}} u \, d\left(\frac{1}{\varphi(u)}\right) \right| < \infty, \quad \frac{\ln^{\frac{1}{2}}(u)}{\varphi(u)} \to 0$$

при $u \to \infty$.

Теорема 1. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} M|\xi_n|^{\gamma} A_n^{\gamma} \varphi^{\gamma}(t_n) < \infty, \quad 1 < \gamma \leqslant 2, \tag{4}$$

то с вероятностью единица

$$S_n(x_1, x_2, \ldots, x_p) \to S(x_1, x_2, \ldots x_p)$$

при $n \to \infty$ равномерно по $0 \leqslant x_i \leqslant 2\pi$, $i = 1, \ldots, p$. В частности, $S(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ — с вероятностью единица выборочно непрерывная функция.

Существенную роль в доказательстве теоремы играет следующая лемма, которую легко можно получить из леммы 1 Ханта [1].

Лемма. Если выполняется условие (3), то существует случайная величина ψ, не зависящая от $x_1, x_2, \ldots, x_p$, такая, что с вероятностью единица $\psi > 0$ и

$$M\psi \exp [\varrho (\sup_{1 \leqslant n < \infty} | S_n (x_1, x_2, \ldots, x_p) |)^2] \leqslant C < \infty$$

для любого $\varrho > 0$.

Из леммы следует, что

$$\int_{0 \leqslant x_1 \leqslant 2\pi} \cdots \int_{0 \leqslant x_p \leqslant 2\pi} M\psi \exp[\varrho (\sup_{1 \leqslant n \leqslant \infty} | S_n (x_1, x_2, \ldots, x_p) |)^2] \, dx_1 \ldots dx_p \leqslant$$

$$\leqslant C (2\pi)^p.$$

По теореме Фубини

$$M\psi \int_{0 \leqslant x_1 \leqslant 2\pi} \cdots \int_{0 \leqslant x_p \leqslant 2\pi} \exp [\varrho (\sup_{1 \leqslant n < \infty} | S_n (x_1, x_2, \ldots, x_p) |)^2] \times$$

$$\times \, dx_1 dx_2 \ldots dx_p \leqslant C (2\pi)^p .$$

Отсюда следует, что с вероятностью единица

$$\int_{0 \leqslant x_1 \leqslant 2\pi} \cdots \int_{0 \leqslant x_p \leqslant 2\pi} \exp [\varrho (\sup_{1 \leqslant n < \infty} | S_n (x_1, x_2, \ldots, x_p) |)^2] \times$$

$$\times \, dx_1 dx_2 \ldots dx_p \leqslant C_1, \tag{5}$$

где C_1 — случайная величина, такая, что с вероятностью единица $C_1 < \infty$.

Пусть

$$M_n = \sup_{\substack{0 \leqslant x_i \leqslant 2\pi \\ 1 \leqslant i \leqslant p}} |S_n (x_1, x_2, \ldots, x_p) | = | S_n (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) | .$$

Если $x_i, 1 \leqslant i \leqslant p$ принадлежит интервалам $x_i > x_i^0$, $x_i - x_i^0 \leqslant \leqslant \frac{\theta}{t_n}$ для произвольного $0 < \theta < 1$, то по формуле конечных приращений

$$S_n (x_1, x_2, \ldots, x_p) - S_n (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) =$$

$$= (x_1 - x_1^0) \frac{\partial S_n (\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_p)}{\partial x_1} + \ldots +$$

$$+ (x_p - x_p^0) \frac{\partial S_n (\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_p)}{\partial x_p} ,$$

$$x_i^0 \leqslant \varkappa_i \leqslant x_i, \ i = 1, \ldots, p.$$

Из неравенства Бернштейна [2] следует, что

$$\left|\frac{\partial S_n(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_p)}{\partial x_i}\right| \leqslant \max_{1\leqslant s\leqslant n} \max_{1\leqslant k\leqslant T_s} |m_{i,k,s}| M_n.$$

Следовательно,

$$|S_n(x_1, x_2, \ldots, x_p) - M_n| \leqslant \theta M_n.$$

Значит, на множестве $\{x_i^0 \leqslant x_i \leqslant x_i + \frac{\theta}{t_n},\ i = 1, \ldots, p\}$ выполняется неравенство

$$|S_n(x_1, x_2, \ldots, x_p)| \geqslant (1-\theta) M_n. \tag{6}$$

Используя неравенства (5) и (6), получаем, что с вероятностью единица

$$\left(\frac{\theta}{t_n}\right)^p e^{(1-\theta)^2 M_n^2} = \underset{\substack{x_i^0 \leqslant x_i \leqslant x_i^0 + \frac{\theta}{t_n} \\ 1\leqslant i\leqslant p}}{\int \cdots \int} e^{(1-\theta)^2 M_n^2} dx_1 dx_2 \ldots dx_p \leqslant$$

$$\leqslant \underset{\substack{x_i^0 \leqslant x_i \leqslant x_i^0 \frac{\theta}{t_n} \\ 1\leqslant i\leqslant p}}{\int \cdots \int} e^{|S_n(x_1, x_2, \ldots x_p)|^2} dx_1 dx_2, \ldots dx_p \leqslant$$

$$\leqslant \underset{\substack{0 \leqslant x_i \leqslant 2\pi \\ 1\leqslant i\leqslant p}}{\int \cdots \int} e^{|S_n(x_1, x_2, \ldots, x_p)|^2} dx_1 dx_2 \ldots dx_p \leqslant C_1.$$

Следовательно, с вероятностью единица

$$e^{(1-\theta)^2 M_n^2} \leqslant \left(\frac{t_n}{\theta}\right)^p C_1. \tag{7}$$

Неравенство (7) можно записать так:

$$e^{(1-\theta)^2 M_n^2 - 2p \ln t_n} \leqslant \frac{C_1}{t_n^p \theta^p}.$$

Значит, при $n \to \infty$ с вероятностью единица

$$e^{(1-\theta)^2 M_n^2 - 2p \ln t_n} \to 0.$$

Итак, при всех достаточно больших n, с вероятностью единица выполняется неравенством $M_n < \frac{(2p)^{\frac{1}{2}}}{(1-\theta)} \ln (t_n)^{\frac{1}{2}}$. Обозначим $\xi_n^* = \xi_n \varphi(t_n)$, тогда

$$\widetilde{S}_n(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^* P_k(x_1, x_2 \ldots, x_p).$$

Из (4) следует, что случайные величины ξ_n^* удовлетворяют условию (7). Следовательно,

$$|\widetilde{S}_n(x_1, x_2, \ldots, x_p)| < \frac{(2p)^{\frac{t}{2}}}{(1-\theta)}(\ln t_n)^{\frac{1}{2}}.$$

Легко проверить, что

$$S_n(x_1, \ldots, x_p) - S_m(x_1, \ldots, x_p) =$$
$$= \sum_{k=m}^{n-1}\left\{\frac{1}{\varphi(t_k)} - \frac{1}{\varphi(t_{k+1})}\right\}\widetilde{S}_k - \frac{\widetilde{S}_{m-1}}{\varphi(t_m)} + \frac{\widetilde{S}_n}{\varphi(t_n)}. \tag{8}$$

Из (8) следует, что

$$|S_n(x_1, x_2, \ldots, x_p) - S_m(x_1, x_2, \ldots, x_p)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(2p)^{\frac{1}{2}}}{(1-\theta)}\left(\sum_{k=m}^{n-1}\left\{\frac{1}{\varphi(t_k)} - \frac{1}{\varphi(t_{k+1})}\right\}\ln^{\frac{1}{2}} t_k + \frac{\ln^{\frac{1}{2}} t_{m-1}}{\varphi(t_m)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\ln^{\frac{1}{2}}(t_n)}{\varphi(t_n)}\right) \leqslant \frac{(2p)^{\frac{1}{2}}}{(1-\theta)}\left|\int_m^\infty \ln^{\frac{1}{2}}\lambda d\left(\frac{1}{\varphi(\lambda)}\right)\right| + 0\left(\frac{\ln^{\frac{1}{2}}(\lambda_m)}{\varphi(t_m)\cdot}\right).$$

Значит, с вероятностью единица $|S_n(x_1, \ldots, x_p) - S_m(x_1, \ldots, x_p)| \to \to 0$ при $n \to \infty$, $m \to \infty$ равномерно по $0 \leqslant x_i \leqslant 2\pi$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Теорема доказана.

Замечание. Примерами функции $\varphi(u)$ могут служить

$$\ln^{\frac{1}{2}+\beta}(u);\ \ln^{\frac{1}{2}}(u)\ \ln\ln^{1+\beta}(u);$$
$$\ln^{\frac{1}{2}}(u)\ln\ln(u)\ln\ln\ln^{1+\beta}(u),\ \beta > 0.$$

Следствие. Пусть

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{f(n)}\xi_j^n P_j^n(x_1, x_2, \ldots, x_p), \tag{9}$$

где ξ_j^n — независимые случайные величины; $f(n)$ — некоторое целое число; $P_j^n(x_1, \ldots, x_p)$— однородные относительно e^{ix_k}, $1 \leqslant k \leqslant p$, многочлены степени n, следовательно, $t_n = np$.

Предположим, что $M|\xi_j^n|^\gamma = b_n < \infty$. Пусть выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{t(n)} |P_j^n(x_1, x_2, \ldots, x_p)|^\gamma \leqslant C_n, \quad 1 < \gamma \leqslant 2.$$

Тогда для равномерной сходимости ряда (9) достаточна сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k b_k f(k)\varphi^\gamma(k), \ 1 < \gamma \leqslant 2.$

II. Из следствия к теореме 1 можно получить условие выборочной непрерывности с вероятностью единица изотропных непрерывных в среднем квадратическом гауссовских случайных полей на сфере. Пусть P — точка единичной сферы S_m в $m+1$-мерном пространстве, g — группа вращений S_m. Случайное поле $\xi(P)$ называется изотропным, если $M\xi(P) = \mathrm{const}$ (будем предполагать в дальнейшем $M\xi(P) = 0$) и $M\xi(P_1)\xi(P_2) = M\xi(gP_1)\xi(gP_2)$ для всякого $g \in G$. Известно [3], что непрерывное в среднем квадратическом изотропное поле на S_m допускает представление

$$\xi(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{h(n,m)} \xi_n^k S_n^k(P), \tag{10}$$

где

$$M\xi_n^k = 0, \quad M\xi_n^k \xi_{n'}^{k'} = S_k^{k'} \delta_n^{n'} d_n$$

(δ_i^j — символы Кронекера), $S_n^k(P)$ — сферические гармоники степени n, $h(n, m)$ — число этих гармоник, $h(n, m) = (2n + m - 1) \times \times \dfrac{(n+m-2)!}{n!\,(m-1)!}$.

Из теоремы сложения для сферических функций [4] следует

$$\sum_{l=1}^{h(n,m)} [S_n^l(P)]^2 = \frac{h(n, m)}{\omega_m}, \tag{11}$$

где ω_m — площадь поверхности S_m.

Предположим, что все ξ_n^k независимы. Это, в частности, выполнено для гауссовских случайных полей.

Теорема 2. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n h^2(n, m)\varphi^2(n) < \infty, \tag{12}$$

то ряд (10) сходится с вероятностью единица равномерно относительно $P \in S_m$. В частности, если выполнено (12), то выборочные функции изотропного гауссовского поля $\xi(P)$ на S_m непрерывны с вероятностью единица.

Теорему 2 можно получить из следствия к теореме 1, если принять во внимание (11) и то, что $S_n^k(P)$ — тригонометрические полиномы специального вида [4] (стр. 232). Если $m=1$ (однородные случайные процессы на окружности), то

$$\xi(\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n e^{in\varphi},\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$$

и условие (12) прервращается в условие Ханта [1]

$$\varphi(u)=\ln^{\frac{1}{2}+\beta}(u).$$

В заключение хочу выразить благодарность М. И. Ядренко за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hunt G. A. Random Fourier transforms.— Trans. Amer. Math. Soc., 71, 1951 (русск. пер.: Математика, 2, вып. 6, 1958).

2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М., «Мир», 1965.

3. Ядренко М. Й. Про ізотропні гаусівські випадкові поля марківського типу на сфері.— ДАН УРСР, 3, 1959.

4. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции (функции Бесселя, функции параболические, цилиндрические, ортогональные многочлены). М., «Наука», 1966.

Yu. V. Kozachenko

ON UNIFORM SUMMATION OF SOME STOCHASTIC SERIES

Summary

This paper contains the sufficient conditions for uniform summation with probability 1 of the stochastic series of the kind $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n P_n(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, where $P_n(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ are trigonometrical polynomials from p variables. Sufficient conditions of sample continuity with probability 1 of the stochastic isotropic fields on a sphere are formulated.

Поступила в редакцию 16.V 1969.