В. Б. КОЛМАНОВСКИЙ, асп.
Институт передачи информации АН СССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

1. В настоящей работе с помощью метода функций Ляпунова, развитого для уравнений с отклоняющимся аргументом [1], получены условия устойчивости в среднеквадратическом решении некоторых стохастических дифференциальных уравнений Ито [2] с запаздывающим аргументом. Для простоты изложения вначале рассматриваются уравнения вида

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$dy(t) = \left[-\int_0^\infty y(t-s)\, dK_0(s) - \int_0^\infty x(t-s)\, dK_1(s) \right] dt +$$

$$+ b(t, y(t+\tau))\, d\xi(t).$$

Относительно коэффициентов уравнения (1) постоянно предполагаются выполненными следующие ограничения. Ядра $K_j(s)$ $(j=0, 1)$ имеют ограниченное изменение на полуоси $[0, \infty)$, а интегралы, входящие в уравнение (1), понимаются в смысле Стильтьеса.

Обозначим через S прямое произведение интервала $[0, \infty)$ и пространства Q непрерывных функций $\varphi(\tau)$ аргумента τ, меняющегося в пределах $-\infty < \tau \leqslant 0$. Метрика в S задается формулой

$$\varrho((t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2)) = |t_1 - t_2| + \sup_{\tau \leqslant 0} |\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)|.$$

Функционал $b(t, \varphi(\tau))$, определенный на пространстве S, непрерывен и удовлетворяет условиям:

1) для любых непрерывных функций $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$

$$|b(t, \varphi_1(\tau)) - b(t, \varphi_2(\tau))|^2 \leqslant \int_0^\infty |\varphi_1(-s) - \varphi_2(-s)|^2 dK_2(s), \tag{2}$$

где $K_2(s)$ — монотонно неубывающая функция с ограниченным изменением на $[0, \infty)$;

2) $b(t, \varphi(\tau)) \equiv 0$ при $\varphi(\tau) \equiv 0$. (3)

Пусть F_t — расширяющаяся последовательность σ-алгебр, определенных на основном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{A}, P\}$ при $t \geqslant 0$. В уравнении (1) $\xi(t)$ — винеровский процесс, удовлетворяющий условиям $\xi(0)=0$, $M\xi(t)=0$, $D\xi(t)=t$, причем процесс $\xi(t)$ измерим относительно F_t при каждом t, и случайные величины $\xi(t+h)-\xi(t)$ для любых $h>0$, $t \geqslant 0$ не зависят от σ-алгебры F_t.

Аналогично теореме 11 [2] нетрудно установить, что при сделанных предположениях существует и единственно F_t-измеримое решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(\tau) = \varphi(\tau), \quad \dot{x}(\tau) = \dot{\varphi}(\tau), \quad \tau \leqslant 0, \tag{4}$$

где $\varphi(\tau)$ — заданный процесс с непрырывно-дифференцируемыми реализациями, F_0-измеримый, имеющий

$$\sup_{\tau \leqslant 0} M(\varphi^4(\tau) + \dot{\varphi}^4(\tau)) < \infty. \tag{5}$$

Из (1)—(5), как и при доказательстве теоремы 1 [2], вытекает, что при всех $t \geqslant 0$ решение задачи (1), (4) удовлетворяет неравенству

$$M(x^4(t) + y^4(t)) \leqslant c_1 \sup_{\tau \leqslant 0} M(\varphi^4(\tau) + \dot{\varphi}^4(\tau))\, e^{c_2 t} \tag{6}$$

(через c_i в настоящей работе обозначаются некоторые положительные постоянные).

Положим

$$r(t) = M(x^2(t) + y^2(t)), \quad \gamma(\varphi) = \sup_{\tau \leqslant 0} M(\varphi^2(\tau) + \dot{\varphi}^2(\tau))$$

и введем определение.

Тривиальное решение системы (1) назовем: а) устойчивым в среднеквадратическом, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $r(t) < \varepsilon$ при $t \geqslant 0$, как только $\gamma(\varphi) < \delta(\varepsilon)$ и выполнено требование (5); б) асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и $\lim\limits_{t \to \infty} r(t) = 0$.

II. Формулируемые ниже условия устойчивости выражаются в терминах моментов ядер $K_j(s)$. Удобно обозначить

$$\alpha_{ij} = \int_0^\infty s^i\, |dK_j(s)|, \quad \beta_{ij} = \int_0^\infty s^i dK_j(s).$$

Теорема 1. Пусть коэффициенты системы (1) удовлетворяют требованиям (1) — (2), ядро $K_0(s)$ имеет в нуле скачок величины $a>0$, причем

$$\beta_{01}>0,\quad a>\int\limits_0^\infty |dK_0(s)|+\alpha_{11}+\alpha_{02},$$

$$\alpha_{10}+\alpha_{21}+\alpha_{12}<\infty.$$

Тогда тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво в среднеквадратическом.

Доказательство. Положим

$$V_0(x(t+\tau),\ y(t+\tau))=y(t)+\int\limits_0^\infty x(t-s)\,dK_0(s)-$$

$$-\int\limits_0^\infty dK_1(s)\int\limits_{t-s}^t x(t_1)\,dt_1 \tag{7}$$

и введем в рассмотрение функционал

$$V(x(t+\tau),\ y(t+\tau))=2x^2(t)\beta_{01}+y^2(t)+V_0^2(x(t+\tau),y(t+\tau))+$$

$$+\int\limits_{+0}^\infty |dK_0(s)|\int\limits_{t-s}^t (y^2(t_1)+\beta_{01}x^2(t_1))\,dt_1+2\int\limits_0^\infty dK_2(s)\int\limits_{t-s}^t y^2(t_1)\,dt_1+$$

$$+\int\limits_0^\infty |dK_1(s)|\int\limits_{t-s}^t dt_1\int\limits_{t_1}^t (y^2(t_2)+\beta_{01}x^2(t_2))\,dt_2, \tag{8}$$

где $x(t)$, $y(t)$ — решение задачи (1), (4).

Оценим стохастический дифференциал функционала (8). Прежде всего, на основании (1) и формулы Ито ([3], стр. 26) имеем

$$dy^2(t)=b^2(t,y(t+\tau))\,dt+2y(t)\,b(t,y(t+\tau))\,d\xi(t)+$$

$$+2y(t)\left[-ay(t)\int\limits_{+0}^\infty y(t-s)\,dK_0(s)-\int\limits_0^\infty x(t-s)\,dK_1(s)\right]dt. \tag{9}$$

Но в силу (2), (3) с вероятностью 1

$$b^2(t,y(t+\tau))\leqslant\int\limits_0^\infty y^2(t-s)\,dK_2(s). \tag{10}$$

Кроме того,

$$2y(t)\int\limits_{+0}^\infty y(t-s)\,dK_0(s)\leqslant y^2(t)\int\limits_{+0}^\infty |dK_0(s)|+\int\limits_{+0}^\infty y^2(t-s)\,|dK_0(s)|, \tag{11}$$

$$-2y(t)\int_0^\infty x(t-s)\,dK_1(s) = -2y(t)\,x(t)\,\beta_{01} +$$
$$+ 2y(t)\int_0^\infty dK_1(s)\int_{t-s}^t y(t_1)\,dt_1 \leqslant -2y(t)\,x(t)\,\beta_{01} + \alpha_{11}y^2(t) +$$
$$+ \int_0^\infty |dK_1(s)| \int_{t-s}^t y^2(t_1)\,dt_1. \tag{12}$$

Значит, на основании (9) — (12)

$$dy^2(t) \leqslant \Bigg[\int_0^\infty x^2(t-s)\,dK_2(s) + \int_{+0}^\infty y^2(t-s)\,|dK_0(s)| - 2x(t)\,y(t)\,\beta_{01} +$$
$$+ y^2(t)\left(-2a + \alpha_{11} + \int_{+0}^\infty |dK_0(s)|\right) + \int_0^\infty |dK_1(s)| \int_{t-s}^t y^2(t_1)\,dt_1\Bigg] dt +$$
$$+ 2y(t)\,b(t, y(t+\tau))\,d\xi(t). \tag{13}$$

При этом неравенство вида (13) означает, что для любых $t_2 \geqslant t_1 > 0$ с вероятностью 1 интеграл от левой части (13) в пределах от t_1 до t_2 меньше или равен интегралу от правой части (13), вычисленному в тех же пределах.

Так как в силу [3] (стр. 25) стохастический дифференциал функции $V_0^2(x(t+\tau), y(t+\tau))$ можно вычислить по формуле Ито, то с учетом второго уравнения системы (1) получаем

$$dV_0^2(x(t+\tau), y(t+\tau)) = 2V_0(x(t+\tau), y(t+\tau))\,[-x(t)\beta_{01}dt +$$
$$+ b(t, y(t+\tau))\,d\xi(t)] + b^2(t, y(t+\tau))\,dt. \tag{14}$$

(В условиях теоремы 1 возможность дифференцирования под знаком интеграла Стильтьеса следует, например, из результатов работы [4]).

Используя (7) и оценивая аналогично (11) слагаемые в правой части (14), убеждаемся в справедливости при всех $t > 0$ оценки

$$dV_0^2(x(t+\tau), y(t+\tau)) \leqslant 2V_0(x(t+\tau), y(t+\tau))\,b(t, y(t+\tau))\,d\xi(t) +$$
$$+ \beta_{01}\Bigg[-2x(t)\,y(t) + x^2(t)\left(\int_{+0}^\infty |dK_0(s)| - 2a + \alpha_{11}\right) +$$
$$+ \int_{+0}^\infty x^2(t-s)\,|dK_0(s)| + \int_0^\infty |dK_1(s)| \int_{t-s}^t x^2(t_1)\,dt_1\Bigg] dt +$$
$$+ \int_0^\infty x^2(t-s)\,dK_2(s)\,dt. \tag{15}$$

Из (8), (13), (15) следует формула

$$dV(x(t+\tau),\ y(t+\tau)) \leqslant -2x^2(t)\beta_{01}\left(a-\int\limits_{+0}^{\infty}|dK_0(s)|-\alpha_{11}\right)+$$

$$+2b(t,\ y(t+\tau))\,[V_0(x(t+\tau),\ y(t+\tau))+y(t)]\,d\xi(t)-$$

$$-2y^2(t)\left(a-\int\limits_{+0}^{\infty}|dK_0(s)|-\alpha_{11}-\alpha_{02}\right). \tag{16}$$

Проинтегрируем последнее неравенство в пределах от нуля до $t \geqslant 0$ и возьмем математическое ожидание от обеих частей его. С учетом (5), (6), (10) и условий теоремы 1 математическое ожидание стохастического интеграла в правой части (16) равно нулю. Поэтому при всех $t \geqslant 0$

$$MV(x(t+\tau),\ y(t+\tau)) - MV(\varphi(\tau),\ \dot{\varphi}(\tau)) \leqslant$$

$$\leqslant -\int\limits_0^t [\gamma_1 My^2(s)+\gamma_2 Mx^2(s)]\,ds, \tag{17}$$

где положено

$$\gamma_1 = 2\left(a-\int\limits_{+0}^{\infty}|dK_0(s)|-\alpha_{11}-\alpha_{02}\right),$$

$$\gamma_2 = 2\beta_{01}\left(a-\int\limits_{+0}^{\infty}|dK_0(s)|-\alpha_{11}\right). \tag{18}$$

Но в силу условий теоремы 1 и (8)

$$MV(\varphi(\tau),\ \dot{\varphi}(\tau)) \leqslant c_1\gamma(\varphi), \tag{19}$$

$$MV(x(t+\tau),\ y(t+\tau)) \geqslant \beta_{01}Mx^2(t)+My^2(t). \tag{20}$$

Из этих оценок и неравенства (17) следует, что для любого $t \geqslant 0$

$$\beta_{01}Mx^2(t)+My^2(t) \leqslant c_1\gamma(\varphi).$$

Тем самым устойчивость в среднеквадратическом тривиального решения системы (1) установлена.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ и $\delta(\varepsilon) > 0$ — числа, фигурирующие в определении, а вектор $(x(t),\ y(t))$ — произвольное решение задачи (1), (4) с начальным условием, удовлетворяющим требованиям (5), причем

$$\sup_{-\infty<t<\infty} r(t) < \varepsilon_1 = \max(\varepsilon,\ \delta(\varepsilon)).$$

Тогда для доказательства асимптотической устойчивости в среднеквадратическом достаточно показать ([1], стр. 181), что функция $r(t)$ равномерно непрерывна на $[0, \infty)$ и

$$\int_0^\infty r(t)\,dt < \infty. \tag{21}$$

Но справедливость (21) немедленно следует из (17)—(20), так как на основании (17)—(20) имеем при всех $t \geqslant 0$

$$\int_0^t [\gamma_1 My^2(s) + \gamma_2 Mx^2(s)]\,ds \leqslant c_1\gamma(\varphi).$$

Проверим теперь, что функция $r(t)$ равномерно непрерывна на интервале $[0, \infty)$. Для этого применим формулу Ито к функции $x^2(t)+y^2(t)$. Используя оценки (10), (11), получаем, что для любых неотрицательных t_1 и t_2

$$|r(t_1) - r(t_2)| \leqslant 2\varepsilon_1(1 + \alpha_{00} + \alpha_{01} + \alpha_{02})\,|t_1 - t_2|.$$

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = y(t),$$

$$dy(t) = -[a_1 y(t) + a_2 x(t - h_1)]\,dt + a_3 y(t - h_2)\,d\xi(t), \quad t > 0, \tag{22}$$

где $h_j \geqslant 0$ и a_i — некоторые постоянные.

В соответствии с теоремой 1 тривиальное решение системы (22) асимптотически устойчиво в среднеквадратическом, если выполнены условия

$$a_2 > 0, \quad a_1 > a_2 h_1 + a_3^2.$$

Теорема 2. Пусть выполнены требования (1) — (2), причем

$$q_1 = \alpha_{10} + \frac{1}{2}\alpha_{21} < 1, \quad \beta_{01} > 0,$$

$$q = \beta_{00} - \beta_{11} > \max\left(q_1, \frac{\beta_{01}q_1 + \alpha_{02}}{1 - q_1}\right),$$

$$\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{20} + \alpha_{31} < \infty.$$

Тогда тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво в среднеквадратическом.

Доказательство. Положим

$$V_1(y(t+\tau)) = y(t) - \int_0^\infty dK_0(s)\int_{t-s}^t y(t_1)\,dt_1 + \\ + \int_0^\infty dK_1(s)\int_{t-s}^t dt_1\int_{t_1}^t y(t_2)\,dt_2$$

и введем в рассмотрение функционал

$$V(x(t+\tau),\ y(t+\tau)) = V_0^2(x(t+\tau), y(t+\tau)) + V_1^2(y(t+\tau)) + \\ + 2x^2(t)\beta_{01} + 2\int_0^\infty dK_2(s)\int_{t-s}^{t} y^2(t_1)\,dt_1 + (q+2\beta_{01}) \times \\ \times \left[\int_0^\infty |dK_0(s)|\int_{t-s}^{t} dt_1\int_{t_1}^{t} y^2(t_2)\,dt_2 + \right. \\ \left. + \int_0^\infty |dK_1(s)|\int_{t-s}^{t} dt_1\int_{t_1}^{t} dt_2\int_{t_2}^{t} y^2(t_3)\,dt_3\right], \qquad (23)$$

где $V_0(x(t+\tau),\ y(t+\tau))$ задается формулой (7).

Оценим стохастический дифференциал функционала (23). На основании формулы Ито имеем

$$dV_1^2(y(t+\tau)) = 2V_1(y(t+\tau))\,[b(t, y(t+\tau))\,d\xi(t) - \\ - x(t)\beta_{01}dt - y(t)\,q\,dt] + b^2(t, y(t+\tau))\,dt.$$

Отсюда, используя оценки, аналогичные (10), (11), нетрудно получить

$$dV_1^2(y(t+\tau)) \leqslant [-2x(t)\,y(t)\,\beta_{01} + y^2(t)\,q\,(q_1-2) + \beta_{01}x^2(t)\,q_1 + \\ + \int_0^\infty x^2(t-s)\,dK_2(s)]\,dt + 2V_1(y(t+\tau))\,b(t, y(t+\tau))\,d\xi(t) + \\ + (q+\beta_{01})\left[\int_0^\infty |dK_0(s)|\int_{t-s}^{t} y^2(t_1)\,dt_1 + \right. \\ \left. + \int_0^\infty |dK_1(s)|\int_{t-s}^{t} dt_1\int_{t_1}^{t} y^2(t_2)\,dt_2\right] dt. \qquad (24)$$

Прежде чем вычислять стохастический дифференциал функционала (7), заметим, что этот функционал может быть записан, на основании первого из уравнений (1), в виде

$$V_0(x(t+\tau), y(t+\tau)) = y(t) + x(t)\,q - \int_0^\infty dK_0(s)\int_{t-s}^{t} y(t_1)\,dt_1 + \\ + \int_0^\infty dK_1(s)\int_{t-s}^{t} dt_1\int_{t_1}^{t} y(t_2)\,dt_2.$$

Поэтому

$$dV_0(x(t+\tau),y(t+\tau)) = 2V_0(x(t+\tau),y(t+\tau))(-x(t)\beta_{01}dt+$$
$$+b(t,y(t+\tau))\,d\xi(t))+b^2(t,y(t+\tau))\,dt=$$
$$=\Bigg[-2x(t)\,y(t)\,\beta_{01}-2x^2(t)\,\beta_{01}q+b^2(t,y(t+\tau))+$$
$$+2x(t)\,\beta_{01}\left(\int\limits_0^\infty dK_0(s)\int\limits_{t-s}^{t}y(t_1)\,dt_1-\int\limits_0^\infty dK_1(s)\int\limits_{t-s}^{t}dt_1\int\limits_{t_1}^{t}y(t_2)\,dt_2\right)\Bigg]dt+$$
$$+2V_0(x(t+\tau),y(t+\tau))\,b(t,y(t+\tau))\,d\xi(t).$$

Отсюда, на основании (10), (23), (24), используя оценку

$$2x(t)\left(\int\limits_0^\infty dK_0(s)\int\limits_{t-s}^{t}y(t_1)\,dt_1-\int\limits_0^\infty dK_1(s)\int\limits_{t-s}^{t}dt_1\int\limits_{t_1}^{t}y(t_2)\,dt_2\right)\leqslant$$
$$\leqslant x^2(t)\,q_1+\int\limits_0^\infty|dK_0(s)|\int\limits_{t-s}^{t}y^2(t_1)\,dt_1+$$
$$+\int\limits_0^\infty|dK_1(s)|\int\limits_{t-s}^{t}dt_1\int\limits_{t_1}^{t}y^2(t_2)\,dt_2,$$

получаем

$$dV(x(t+\tau),y(t+\tau))\leqslant-2x^2(t)\,\beta_{01}(q-q_1)\,dt+$$
$$+2b(t,y(t+\tau))\,[V_1(y(t+\tau))+V_0(x(t+\tau),y(t+\tau))]\,d\xi(t)-$$
$$-2y^2(t)\,[-\beta_{01}q_1+q(1-q_1)-\alpha_{02}]\,dt. \tag{25}$$

Но в силу (23) и условий теоремы 2

$$MV(\varphi(\tau),\dot\varphi(\tau))\leqslant c_1\gamma(\varphi). \tag{26}$$

Из (23), (25), (26), как и при доказательстве теоремы 1, следует, что при всех $t\geqslant 0$

$$\beta_{01}Mx^2(t)\leqslant c_1\gamma(\varphi).$$

Тем самым устойчивость в среднеквадратическом по координате $x(t)$ установлена. Докажем устойчивость по второй координате $y(t)$. Из (25), (26) вытекает, что для любого $t\geqslant 0$

$$\int\limits_0^t My^2(s)\,ds\leqslant c_1\gamma(\varphi). \tag{27}$$

В силу (23), (25) и условий теоремы 2 при $t \geqslant 0$

$$MV(\varphi(\tau)\,\dot{\varphi}(\tau)) \geqslant MV_1^2(y(t+\tau)) \geqslant My^2(t)(1-q_1) -$$

$$-\int_0^\infty |dK_0(s)| \int_{t-s}^t My^2(t_1)\,dt_1 - \int_0^\infty |dK_1(s)| \int_{t-s}^t dt_1 \int_{t_1}^t My^2(t_2)\,dt_2. \tag{28}$$

Но с учетом (27)

$$\int_0^\infty |dK_0(s)| \int_{t-s}^t My^2(t_1)\,dt_1 \leqslant M\left(\int_0^\infty |dK_0(s)| \int_0^t x^2(t_1)\,dt_1 + \right.$$

$$\left. + \int_t^\infty |dK_0(s)| \int_{t-s}^0 \dot{\varphi}^2(t_1)\,dt_1\right) \leqslant (\alpha_{10} + c_1\alpha_{00})\,\gamma(\varphi) \tag{29}$$

и аналогично

$$\int_0^\infty |dK_1(s)| \int_{t-s}^t dt_1 \int_{t_1}^t My^2(t_2)\,dt_2 \leqslant (\alpha_{21} + c_1\alpha_{11})\,\gamma(\varphi). \tag{30}$$

Значит, в силу (28) — (30), (26)

$$My^2(t)(1-q_1) \leqslant MV(\varphi(\tau), \dot{\varphi}(\tau)) +$$

$$+ \gamma(\varphi)(\alpha_{21} + c_1\alpha_{11} + \alpha_{10} + c_1\alpha_{00}) \leqslant c_3\gamma(\varphi).$$

Устойчивость в среднеквадратическом тривиального решения системы (1) выявлена. Поскольку асимптотическая устойчивость его определяется точно так же, как и при доказательстве теоремы 1, то теорема 2 доказана.

Замечание 1. Используя результаты работы [5], нетрудно изменить функционалы (8), (23) таким образом, чтобы получить условия устойчивости в среднеквадратическом системы

$$\dot{x}(t) = y(t),\; dy(t) = \left[\int_0^\infty y(t-s)\,d_sK_1(t,s) + \int_0^\infty x(t-s)\,d_sK_2(t,s) + \right.$$

$$\left. + a_1(t, x(t+\tau), y(t+\tau))\right] dt_1 + a_2(t, x(t+\tau), y(t+\tau))\,d\xi(t),$$

с ядрами $K_j(t, s)$, имеющими равномерно по $t \geqslant 0$ ограниченное изменение по s на интервале $[0, \infty)$, и функционалами $a_j(t, \varphi(\tau), \varphi(\tau)$, определенными на прямом произведении $[0, \infty) \times Q, \times Q$ и удовлетворяющими условию Липшица, аналогичному (2), по второму и третьему аргументам.

Замечание 2. Применяя к функционалам (7), (23) незначительно измененные рассуждения книги [3] (стр. 329) или статьи [6], убеждаемся, что в условиях теорем 1, 2 имеет место не только устойчивость в среднеквадратическом, но и устойчивость по вероятности в следующем смысле.

Для любых $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$ найдется такое $\delta>0$, что решение $x(t)$, $y(t)$ задачи (1), (4) удовлетворяет неравенству

$$P\{\sup_{t\geqslant 0}(|x(t)|+|y(t)|)\leqslant\varepsilon_1\}\geqslant 1-\varepsilon_2,$$

если только с вероятностью 1

$$\sup_{\tau\leqslant 0}(|\varphi(\tau)|+|\dot\varphi(\tau)|)<\delta.$$

Условия асимптотической устойчивости при $b(t, y(t+\tau))\equiv 0$ решений детерминированной системы (1) по одной координате $x(t)$ с помощью иных методов получены в работе [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, М., 1959.
2. Ито К., Нисио М. Стационарные решения стохастических дифференциальных уравнений.— В сб. переводов: Математика, 11 : 5, 1967.
3. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. «Наукова думка», К., 1968.
4. Колмановский В. Б. Об устойчивости нелинейных систем с запаздыванием. (В печати).
5. Колмановский В. Б. О применении метода Ляпунова к линейным системам с запаздыванием.— ПММ, 31, 5, 1967.
6. Kushner H. J. On the stability of processes defined by stochastic difference-differential equations.— J. diff. equations, 4, 3, 1968.
7. Колмановский В. Б., Хасьминский Р. З. Об устойчивости линейных систем с запаздыванием.— Изв. высш. учебн. завед., 53, 4, 1966.

V. B. Kolmanovsky

ON THE STABILITY OF CERTAIN STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RETARDED ARGUMENT

Summary

In this paper the stability of trivial solutions of stochastic differential equations are studied. The stability conditions are obtained using Liapunov — Krasovsky method.

Поступила в редакцию 22.IV 1969.