Л. П. КОНОНЧУК, мл. научн. сотр.
Научно-исследовательский институт автоматизированных систем планирования и управления в строительстве

К ВОПРОСУ О СТАТИСТИЧЕСКОМ СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА СО СЛУЧАЙНЫМИ ПРОПУСКАМИ НАБЛЮДЕНИЙ

В этой статье получены состоятельные оценки корреляционной функции и спектральной плотности стационарного в широком смысле процесса $x(t)$ $-\infty<t<+\infty$ по его реализации, в которой значения процесса в некоторые случайные моменты времени пропущены. Если ввести в рассмотрение случайный процесс $\eta(t)$, который принимает нулевые значения в те моменты времени, когда процесс $x(t)$ не наблюдается, и значения, равные 1, когда процесс $x(t)$ наблюдается, то задачу можно сформулировать следующим образом.

Имея реализацию процесса $y(t)=\eta(t)x(t)$ на отрезке времени $0\leqslant t\leqslant T$ и зная математическое ожидание и корреляционную функцию процесса $\eta(t)$, найти оценки корреляционной функции и спектральной плотности процесса $x(t)$. Процесс $\eta(t)$ описывает природу случайных пропусков наблюдений и предполагается независящим от процесса $x(t)$. В работах [1, 2] поставленная задача решена для случая, когда процесс $\eta(t)$ является стационарным однородным марковским процессом. В настоящей статье результаты обобщаются на случай более широкого класса процессов $\eta(t)$.

Относительно стационарного в широком смысле процесса $x(t)$ будем предполагать следующее:

корреляционная функция $R_x(u)$ процесса $x(t)$ непрерывна и абсолютно интегрируема

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |R_x(u)|\,du<\infty; \tag{1}$$

моментная функция четвертого порядка процесса $x(t)$

$$M[x(t)-m_x][x(t+u)-m_x][x(t+v)-m_x][x(t+w)-m_x]=$$
$$=P_x(u,v,w),$$

где $m_x = Mx(t)$ не зависит от t;

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |Q_x(u, v, w)|\, du dv dw < \infty,$$

где

$$Q_x(u, v, w) = P_x(u, v, w) - R_x(u) R_x(w - v) - \\ - R_x(v) R_x(w - u) - R_x(w) R_x(v - u). \qquad (2)$$

Из условия (1) вытекает существование спектральной плотности $f_x(w)$ процесса $x(t)$, связанной с $R_x(u)$ соотношением

$$f_x(w) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuw} R_x(u)\, du.$$

Относительно процесса $\eta(t)$ будем предполагать, что это стационарный в широком смысле процесс, принимающий значения 0 и 1, для которого выполнены следующие условия:

$$p > q,$$

где $p = P\{\eta(t) = 1\} = M\eta(t) = m_\eta$, а $q = 1 - p$;

корреляционная функция $R_\eta(u)$ процесса $\eta(t)$ непрерывна и абсолютно интегрируема

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |R_\eta(u)|\, du < \infty; \qquad (3)$$

$M\eta(t)\,\eta(t + u)\,\eta(t + v)\,\eta(t + w) = g(u, v, w)$ не зависит от t и интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(u_1, u, u + u_2) - B(u_1) B(u_2)|\, du \leqslant K, \qquad (4)$$

где

$$B(u) = M\eta(t)\,\eta(t + u) = R_\eta(u) + p^2,$$

ограничен некоторой константой, одинаковой для всех u_1 и u_2;

$$M\left[\frac{1}{T}\int\limits_0^T \eta(t)\, dt - p\right]^4 = O\left(\frac{1}{T^2}\right); \qquad (5)$$

существует конечный предел

$$\lim_{u\to+\infty} B(u) = B(+\infty). \qquad (6)$$

Из условия (3) вытекает существование спектральной плотности $f_\eta(w)$ процесса $\eta(t)$, определенной по формуле

$$f_\eta(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwu} R_\eta(u)du.$$

Будем предполагать также, что процессы $\eta(t)$ и $x(t)$ независимы.

Пусть наблюдается отрезок траектории процесса $y(t) = \eta(t)\,x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ и известны $R_\eta(u)$ и p. Оценку $R_x(u;T)$ корреляционной функции $R_x(u)$ процесса $x(t)$ определим следующим образом:

$$R_x(u;T) = \frac{1}{B(u)}\frac{1}{T}\int_0^{T-|u|} [y(t) - \eta(t)\hat{m}_x]\,[y(t+|u|) - \eta(t+|u|)\hat{m}_x]dt, \tag{7}$$

где $\hat{m}_x = \dfrac{\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt}{p}$ является оценкой математического ожидания m_x процесса $x(t)$.

Свойства этой оценки сформулированы в следующей теореме.

Теорема 1. $R_x(u;T)$, определенная по формуле (7), является асимптотически несмещенной и состоятельной оценкой корреляционной функции $R_x(u)$ процесса $x(t)$, и для любых u, u_1, u_2 имеет место

$$\lim_{T\to\infty} \sqrt{T}\,|MR_x(u;T) - R_x(u)| = 0, \tag{8}$$

$$\lim_{T\to\infty} T\operatorname{cov}\{R_x(u_1;T), R_x(u_2;T)\} =$$

$$= R_x(u_1)\,R_x(u_2)\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{g(|u_1|, u, u+|u_2|)}{B(u_1)\,B(u_2)} - 1\right]du +$$

$$+ \frac{1}{B(u_1)\,B(u_2)}\int_{-\infty}^{+\infty} g(|u_1|, u, u+|u_2|)\,\{Q_x(|u_1|, u, u+|u_2|) +$$

$$+ R_x(u)\,R_x(u+|u_2|-|u_1|) + R_x(u+|u_2|)\,R_x(u-|u_1|)\}\,du. \tag{9}$$

Доказательство. $R_x(u;T)$ представим в виде суммы

$$R_x(u;T) = \frac{1}{B(u)}\frac{1}{T}\int_0^{T-|u|} \eta(t)\,[x(t) - m_x]\,\eta(t+|u|)\,[x(t+$$

$$+|u|) - m_x]\,dt + \alpha_T(u) + \beta_T(u) + \gamma_T(u), \tag{10}$$

где

$$\alpha_T(u)=\frac{1}{B(u)}\frac{1}{T}\int\limits_0^{T-|u|}\eta(t)\,[x(t)-m_x]\,\eta(t+|u|)\,dt\,[m_x-\hat{m}_x],$$

$$\beta_T(u)=\frac{1}{B(u)}\frac{1}{T}\int\limits_0^{T-|u|}\eta(t)\,\eta(t+|u|)\,[x(t+|u|)-m_x]\,dt[\,m_x-\hat{m}_x],$$

$$\gamma_T(u)=\frac{1}{B(u)}\frac{1}{T}\int\limits_0^{T-|u|}\eta(t)\,\eta(t+|u|)\,dt\,[m_x-\hat{m}_x]^2.$$

Докажем, что величинами $\alpha_T(u),\beta_T(u)$ и $\gamma_T(u)$ можно пренебречь при вычислении пределов в формулах (8) и (9). Для этого достаточно показать, что

$$M\,|\,\alpha_T(u)\,|^2\leqslant O\left(\frac{1}{T^2}\right),$$

$$M\,|\,\beta_T(u)\,|^2\leqslant O\left(\frac{1}{T^2}\right),\qquad(11)$$

$$M\,|\,\gamma_T(u)\,|^2\leqslant O\left(\frac{1}{T^2}\right).$$

Используя неравенство Коши—Буняковского, получаем

$$M\,|\,\alpha_T(u)\,|^2=M\left\{\frac{1}{B^2(u)\,T^2}\int\limits_0^{T-|u|}\int\limits_0^{T-|u|}\eta(t_1)\,\eta(t_1+|\,u\,|)\eta(t_2)\,\eta(t_2+\right.$$

$$\left.+|\,u\,|)\,[x(t_1)-m_x]\,[x(t_2)-m_x\,]\,dt\,[m_x-\hat{m}_x]^2\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{B^2(u)\,T^3}\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-T}^{T}|\,Q_x(u,v,w)+R_x(u)\,R_x\,(w-v)+R_x(v)R'_x(w-u)+$$

$$+R_x(w)\,R_x(v-u)\,|\,dudvdw\cdot M\,[m_x-\hat{m}_x]^4\leqslant CM\,[m_x-\hat{m}_x]^4,$$

где C — некоторая константа.

Для получения последнего неравенства используются (1), (2), а также то, что $0\leqslant\eta(t)\leqslant 1$ и $B(u)\geqslant p-q>0$. Аналогичное соотношение можно получить для $\beta_T(u)$. И, наконец, для $\gamma_T(u)$ получаем

$$M\,|\,\gamma_T(u)\,|^2\leqslant M\,[m_x-\hat{m}_x]^4.$$

Рассмотрим теперь $M[m_x - \hat{m}_x]^4$. Его можно записать в виде суммы четырех членов:

$$M[m_x - \hat{m}_x]^4 =$$

$$= \frac{1}{p^4}\frac{1}{T^4}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T M\eta(t_1)\eta(t_2)\eta(t_3)\eta(t_4)[Q_x(t_2-t_1, t_3-t_1, t_4-t_1) -$$

$$+ R_x(t_2-t_1)R_x(t_4-t_3) + R_x(t_3-t_1)R_x(t_4-t_2) + R_x(t_4 -$$

$$- t_1)R_x(t_3-t_2)]\,dt_1dt_2dt_3dt_4 + \frac{4m_x}{p^4}\frac{1}{T^3}M\left\{\left[\int_0^T (x(t)-m_x)\eta(t)\,dt\right]^2 \times\right.$$

$$\left.\times \int_0^T \eta(s)[x(s)-m_x]\,ds\left(\frac{1}{T}\int_0^T \eta(t)\,dt - p\right)\right\} + \frac{6m_x^2}{p^4}\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R_x(t_2 -$$

$$- t_1)M\left[\eta(t_1)\eta(t_2)\left(\frac{1}{T}\int_0^T \eta(t)\,dt - p\right)^2\right]dt_1dt_2 +$$

$$+ \frac{m_x^4}{p^4}M\left(\frac{1}{T}\int_0^T \eta(t)\,dt - p\right)^4.$$

Первый член ограничен величиной

$$\frac{1}{p^4}\left\{\frac{1}{T^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |Q_x(u, v, w)|\,dudvdw + \frac{3}{T^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |R_x(u)|\,du\right)^2\right\} =$$

$$= O\left(\frac{1}{T^2}\right),$$

а третий — величиной

$$\frac{6m_x^2}{p^4}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} |R_\eta(u)|\,du\,\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} |R_x(u)|\,du = O\left(\frac{1}{T^2}\right).$$

Если обозначить через a_i i-й член суммы, то, используя неравенство Коши—Буняковского, для второго члена суммы получим

$$|a_2| \leqslant c\sqrt{a_1a_3} = O\left(\frac{1}{T^2}\right).$$

Наконец, четвертый член является величиной порядка $\frac{1}{T^2}$ по условию (5). Отсюда следует $M[m_x - \hat{m}_x]^4 = O\left(\frac{1}{T^2}\right)$ и (11).

Теперь рассмотрим выражение

$$\hat{R}_{x-m_x}(u; T) = \frac{1}{B(u)} \frac{1}{T} \int_0^{T-|u|} z(t) z(t + |u|)\, dt, \qquad (12)$$

где $z(t) = \eta(t)[x(t) - m_x]$.

Так как $Mz(t) = 0$, то (12) является асимптотически несмещенной оценкой корреляционной функции процесса $x(t) - m_x$ (которая совпадает с корреляционной функцией $R_x(u)$ процесса $x(t)$), построенной по реализации процесса $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Найдем асимптотическую ковариацию оценки $\hat{R}_{x-m_x}(u, T)$.

$$\hat{T} \operatorname{cov}\{R_{x-m_x}(u_1; T), \hat{R}_{x-m_x}(u_2; T)\} =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^{T-|u_1|} \int_0^{T-|u_2|} \left\{ \frac{M\eta(t_1)\eta(t_1 + |u_1|)\eta(t_2)\eta(t_2 + |u_2|)}{B(u_1) B(u_2)} [O_x(|u_1|, t_2 - \right.$$

$$- t_1, t_2 - t_1 + |u_2|) + R_x(u_1) R_x(u_2) + R_x(t_2 - t_1) R_x(t_2 - t_1 + |u_2| -$$

$$- |u_1|) + R_x(t_2 - t_1 + |u_2|) R_x(t_2 - t_1 - |u_1|)] -$$

$$\left. - R_x(u_1) R_x(u_2) \right\} dt_1 dt_2 =$$

$$= \int_{-T}^{T} U_T(u_1, u_2, u) \left\{ \frac{g(|u_1|, u, u + |u_2|)}{B(u_1) B(u_2)} [Q_x(|u_1|, u, u + |u_2|) + \right.$$

$$+ R_x(u) R_x(u + |u_2| - |u_1|) + R_x(u + |u_2|) R_x(u - |u_1|)] +$$

$$\left. + \left[\frac{g(|u_1|, u, u + |u_2|)}{B(u_1) B(u_2)} - 1 \right] R_x(u_1) R_x(u_2) \right\} du, \qquad (13)$$

где

$$U_T(u_1, u_2, u) = \begin{cases} 0, & u \leqslant -(T - |u_1|) \\ 1 - \dfrac{|u_1| + |u|}{T}, & -(T - |u_1|) \leqslant u \leqslant \min(0, |u_1| - |u_2|) \\ 1 - \dfrac{\max(|u_1|, |u_2|)}{T}, & \min(0, |u_1| - |u_2|) \leqslant u \leqslant \\ & \leqslant \max(0, |u_1| - |u_2|). \\ 1 - \dfrac{|u_2| + |u|}{T}, & \max(0, |u_1| - |u_2|) \leqslant u \leqslant T - |u_2| \\ 0, & T - |u_2| \leqslant u. \end{cases} \tag{14}$$

Используя (1), (2), (4) и $U_T(u_1, u_2, u) \to 1$ при $T \to \infty$, из (13) получаем

$$\lim_{T \to \infty} T \operatorname{cov} \{\hat{R}_{x-m_x}(u_1; T), \hat{R}_{x-m_x}(u_2; T)\} =$$

$$= \frac{1}{B(u_1) B(u_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} g(|u_1|, u, u + |u_2|) [O_x(|u_1|, u, u + |u_2|) +$$

$$+ R_x(u) R_x(u + |u_2| - |u_1|) + R_x(u + |u_2|) R_x(u - |u_1|)]\, du +$$

$$+ R_x(u_1) R_x(u_2) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{g(|u_1|, u, u + |u_2|)}{B(u_1) B(u_2)} - 1\right] du.$$

Учитывая (11) и только что полученную формулу, получаем (9). Доказательство (8) очевидно.

Перейдем к построению оценок спектральной плотности $f_x(\omega)$ процесса $x(t)$.

Пусть $k(u)$ — ограниченная, четная функция, такая, что $k(0) = 1$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} k^2(u)\, du < \infty$. Тогда для $k(u)$ существует преобразование Фурье—Планшереля:

$$K(\omega) = \underset{A \to \infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} e^{-i\omega u} k(u)\, du,$$

причем обратное преобразование есть

$$k(u) = \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{A\to\infty} \int\limits_{-A}^{A} e^{iwu} K(w)\,dw.$$

Кроме того, пусть существуют константы C и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$B \int\limits_{-T}^{T} |k(Bu)|\,du \leqslant C(BT)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \tag{15}$$

для любых B и T.

Конкретные примеры функций $k(u)$ можно найти, например в работе [3].

Обозначим через b_T такую последовательность констант, что $b_T \to 0$, а $Tb_T \to \infty$ при $T \to \infty$. Рассмотрим оценку $f_x(w; T)$ спектральной плотности $f_x(w)$ процесса $x(t)$, определенную следующим образом:

$$f_x(w; T) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-T}^{T} e^{-iuw} k(b_T u) R_x(u; T)\,du, \tag{16}$$

где $R_x(u; T)$ задано формулой (7).

Учитывая четность функций $k(u)$ и $R_x(u; T)$, ее можно записать так:

$$f_x(w; T) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{T} \cos uwk(b_T u) R_x(u; T)\,du. \tag{17}$$

Теорема 2. $f_x(w; T)$, определенная по формуле (16), является состоятельной оценкой спектральной плотности $f_x(w)$ процесса $x(t)$, и для любых неотрицательных w_1 и w_2 асимптотическая ковариация оценки $f_x(w; T)$ имеет вид

$$\lim_{T\to\infty} Tb_T \operatorname{cov}\{f_x(w_1; T), f_x(w_2; T)\} =$$

$$= \frac{f_z^2(w_1)}{B^2(+\infty)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k^2(u)\,du\,\{1 + \delta(0, w_1)\}\,\delta(w_1, w_2). \tag{18}$$

Здесь

$$\delta(w_1, w_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } w_1 = w_2, \\ 0, & \text{если } w_1 \neq w_2; \end{cases}$$

$f_z(w)$ является спектральной плотностью процесса $z(t) = \eta(t)[x(t) - m_x]$ и следующим образом связана со спектральной плотностью процесса $x(t)$:

$$f_z(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(\omega - u) f_\eta(u) du + p^2 f_x(\omega),$$

где $p = P\{\eta(t) = 1\}$.

Доказательство. Подставим в (17) представление (10) оценки $R_x^*(u; T)$ в виде суммы. Тогда

$$f_x(\omega; T) = \frac{1}{\pi} \int_0^T \cos \omega u k(b_T u) \hat{R}_{x-m_x}(u; T) du +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} e^{-i\omega u} k(b_T u) \alpha_T(u) du +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} e^{-i\omega u} k(b_T u) \beta_T(u) du +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} e^{-i\omega u} k(b_T u) \gamma_T(u) du. \quad (19)$$

Покажем, что для второго слагаемого равномерно по ω

$$\lim_{T\to\infty} T b_T M \left| \int_{-T}^{T} e^{-iu\omega} k(b_T u) \alpha_T(u) du \right|^2 = 0.$$

Действительно, используя неравенство Коши—Буняковского, (11) и (15), получаем

$$T b_T M \left| \int_{-T}^{T} e^{-iu\omega} k(b_T u) \alpha_T(u) du \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant T b_T \int_{-T}^{T} |k(b_T u)| du \int_{-T}^{T} |k(b_T u)| M |\alpha_T(u)|^2 du \leqslant$$

$$\leqslant O\left(\frac{1}{T^2}\right) \frac{T}{b_T} (T b_T)^{1-2\varepsilon} = O\left(\frac{1}{(T b_T)^{2\varepsilon}}\right) \to 0 \text{ при } T \to \infty.$$

Отсюда следует, что это слагаемое не влияет на значение асимптотической ковариации (18). Аналогичное утверждение можно доказать для третьего и четвертого слагаемых в (19).

Найдем теперь

$$\lim_{T\to\infty} Tb_T \operatorname{cov}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^T \cos w_1 u k(b_T u)\hat{R}_{x-m_x}(u;T)\,du,\right.$$

$$\left.\frac{1}{\pi}\int_0^T \cos w_2 u k(b_T u)\hat{R}_{x-m_x}(u;T)\,du\right\} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} b_T \frac{1}{\pi^2}\int_0^T\int_0^T \cos w_1 u_1 \cos w_2 u_2 k(b_T u_1)\,k(b_T u_2)\times$$

$$\times T\operatorname{cov}\{\hat{R}_{x-m_x}(u_1;T),\ \hat{R}_{x-m_x}(u_2;T)\}\,du_1 du_2. \tag{20}$$

Подставив сюда (13), получим сумму из четырех слагаемых. Первое и четвертое слагаемые в пределе исчезают равномерно относительно w_1 и w_2 благодаря условиям (2), (4), (1) и тому, что $B(u) \geqslant p-q > 0$. Третье слагаемое также исчезает равномерно по w_1, и w_2. Действительно, оно меньше, чем

$$b_T \frac{1}{\pi^2(p-q)^2}\int_0^T du_1 \int_0^T du_2 \int_{-T}^T du\,|k(b_T u_1)\,k(b_T u_2)\,R_x(u+u_2)\,R_x(u-u_1)|.$$

Сделав здесь замену переменных $z_1 = u_2 + u_1$, $z = u - u_1$, $z_2 = b_T u_1$, получим выражение

$$\frac{1}{\pi^2(p-q)^2}\int_0^{b_T T} dz_2 \int_{\frac{z_2}{b_T}}^{T\left(+1\frac{z_2}{Tb_T}\right)} dz_1 \int_{-T\left(1+\frac{z_2}{Tb_T}\right)}^{T\left(1-\frac{z_2}{Tb_T}\right)} dz\,|k(z_2)\,k(z_2 -$$

$$-b_T z_1)\,R_x(z)\,R_x(z+z_1)\,|,$$

которое сходится к нулю при $T\to\infty$, так как оба предела интегрирования по z_1 сходятся к ∞.

Теперь (20) можно записать как предел выражения

$$b_T \frac{1}{\pi^2}\int_0^T\int_0^T du_1 du_2 \cos w_1 u_1 \cos w_2 u_2 k(b_T u_1)\,k(b_T u_2)\times$$

$$\times \int_{-T}^T U_T(u_1, u_2, u)\frac{g(u_1, u, u+u_2)}{B(u_1)\,B(u_2)} R_x(u)\,R_x(u+u_2-u_1)\,du,$$

которое в свою очередь представлено в виде суммы двух интегралов

$$b_T \frac{1}{\pi^2} \int_0^T \int_0^T du_1 du_2 \cos w_1 u_1 \cos w_2 u_2 k(b_T u_1) k(b_T u_2) \times$$

$$\times \int_{-T}^{T} \frac{U_T(u_1, u_2, u)}{B(u_1) B(u_2)} [g(u_1, u, u+u_2) - B(u) B(u+u_2-u_1)] R_x(u) R_x(u+$$

$$+ u_2 - u_1) du + b_T \frac{1}{\pi^2} \int_0^T \int_0^T du_1 du_2 \cos w_1 u_1 \cos w_2 u_2 k(b_T u_1) k(b_T u_2) \times$$

$$\times \frac{1}{B(u_1) B(u_2)} \int_{-T}^{T} U_T(u_1, u_2, u) B(u) B(u+u_2-u_1) R_x(u) R_x(u+u_2-u_1) du.$$

Первый интеграл меньше, чем величина

$$\frac{b_T}{\pi^2 (p-q)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} | g(u_1, u, u+u_2) - B(u) B(u+u_2 -$$

$$- u_1) | | R_x(u) R_x(u+u_2-u_1) | du du_1 du_2 = \frac{b_T}{\pi^2 (p-q)^2} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} | g(z_1, z, z+z_2) - B(z_1) B(z_2) | | R_x(z_1) R_x(z_2) | dz dz_1 dz_2,$$

которая сходится к нулю в силу (1), (4) и определения последовательности b_T. Во втором интеграле функция $B(u) R_x(u)$ является корреляционной функцией $R_z(u)$ процесса $z(t) = \eta(t)[x(t) - m_x]$. Сделав замену переменных $v_1 = u_2 - u_1$, $v_2 = b_T u_1$ и воспользовавшись формулой $2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, получим, что второй интеграл равен

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{b_T T} dv_2 \int_{-\frac{v_2}{b_T}}^{T\left(1 - \frac{v_2}{T b_T}\right)} dv_1 \left\{ \cos\left(v_2 \frac{w_2 - w_1}{b_T} + w_2 v_1 \right) + \right.$$

$$\left. + \cos\left(v_2 \frac{w_2 + w_1}{b_T} \right) + w_2 v_1 \right\} \frac{k(v_2) k(v_2 + b_T v_1)}{B\left(\frac{v_2}{b_T}\right) B\left(v_1 + \frac{v_2}{b_T}\right)} \times$$

$$\times \int_{-T}^{T} U_T\left(\frac{v_2}{b_T}, v_1+\frac{v_2}{b_T}, u\right) R_z(u) R_z(u+v_1)\, du. \tag{21}$$

Можно проверить по (14), что $U_T\left(\frac{v_2}{b_T}, v_1+\frac{v_2}{b_T}, u\right)\to 1$ при $T\to\infty$. Из (6) следует, что $B\left(\frac{v_2}{b_T}\right)\to B(+\infty)$, $B\left(v_1+\frac{v_2}{b_T}\right)\to B(+\infty)$ при $T\to\infty$. Теперь, чтобы вычислить предел (21), нужно выделить три случая: 1) $\omega_1\neq\omega_2$; 2) $\omega_1=\omega_2=\omega\neq 0$; 3) $\omega_1=\omega_2=0$. По лемме Римана — Лебега (о сходимости к нулю тригонометрических интегралов), первый член в (21) исчезает в пределе, если $\omega_2-\omega_1\neq 0$, а второй, если $\omega_2+\omega_1\neq 0$. Таким образом, предел (21) в случае 1) равен 0, в случае 2) равен

$$\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{B^2(+\infty)}\int_0^{+\infty} k^2(v_2)\, dv_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dv_1 \cos\omega_2 v_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du R_z(u) R_z(u+v_1) \tag{22}$$

и в случае 3) равен удвоенному выражению (22).

Легко проверить, что (22) и (18) равны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Конончук Л. П. Про оцінку корреляційної функції стаціонарного процесу при наявності пропусків спостережень.— Вісник КДУ, сер. матем. і мех., 11, 1969.

2. Конончук Л. П. Оценка спектральной плотности стационарного процесса с пропусками наблюдений.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1, 1969.

3. Parzen E. Mathematical considerations in the estimation of spectra.— Technometrics, 3, 2, 1961.

L. P. Kononchuck

ON THE STATISTICAL SPECTRAL ANALYSIS OF A STATIONARY PROCESS WITH RANDOMLY MISSED OBSERVATIONS

Summary

Let a stationary process $\eta(t)$, $-\infty<t<+\infty$, describe the character of randomly missed observations of the stationary process $x(t)$, $-\infty<t<+\infty$: $\eta(t)$ is equal to 1 when $x(t)$ is observed and $\eta(t)$ is equal to zero in a contrast case. The consistent estimates are obtained for the correlation function and the spectral density function of $x(t)$ by the realization of $y(t)=\eta(t)x(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, the correlation function of $\eta(t)$ and $p=P\{\eta(t)=1\}$ being known.

Поступила в редакцию 4.IV 1969.