Р. Я. МАЙДАНЮК, асп.
Институт математики АН УССР

АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ МЕР, СООТВЕТСТВУЮЩИХ РЯДАМ ИЗ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ПРИ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПРОСТРАНСТВА

Пусть μ — мера на σ-алгебре подмножеств $\mathfrak{B}$ некоторого сепарабельного гильбертового пространства H, которую порождает элемент

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k e_k \in H.$$

Здесь λ_k — нормирующая последовательность чисел, $\{e_k\}$ — ортонормированный базис пространства H, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин с плотностью распределения $p(x)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

а) $p(x)$ — положительная функция и для любого положительного числа γ существуют отличные от нуля

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x-\gamma)}{p(x)}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{p(x-\gamma)}{p(x)};$$

б) существуют $p'(x)$ и $p''(x)$, и $\frac{p'(x)}{p(x)}, \frac{p''(x)}{p(x)}$ — ограниченные функции на $(-\infty, \infty)$;

в) $a = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx < \infty;$

г) существует $\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{p'(x)}{p(x)}\,dx = m.$

Пусть A — линейное измеримое отображение H на H, которое удовлетворяет следующим общим условиям:

1) оператор A обратим, т. е. существует A^{-1};

2) операторы A, A^{-1} — ограничены и $\det A = \det A^{-1} = 1$;

3) для достаточно больших n обратимы

$$A_n = I + P_n(A - I), \qquad A_n^{-1} = I + P_n(A^{-1} - I),$$

где P_n — проектирующий оператор на линейную оболочку векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Обозначим через ν меру, полученную из μ при отображении A, т. е. $\nu(B) = \mu(A^{-1}(B))$ для всех множеств $B \in \mathfrak{B}$. Нас будут интересовать условия, при которых мера ν абсолютно непрерывна относительно μ.

Предположим, оператор A имеет вид $A = I + \lambda B$, где I — единичный оператор; λ — линейный оператор, который в базисе $\{e_k\}$ имеет следующую матрицу преобразования:

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \end{Vmatrix};$$

B — линейный ограниченный оператор с матрицей преобразования $\{a_{ik}\}$ в базисе $\{e_k\}$.

Предположим, что оператор A^{-1} имеет вид

$$A^{-1} = I + \lambda B_1,$$

где B_1 — линейный ограниченный оператор с матрицей преобразования $\{b_{ik}\}$ в базисе $\{e_k\}$.

Теорема. Если сходятся ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_{kk}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k b_{kk}$, $\sum_{i,k}^{\infty} \lambda_i^2 a_{ik}^2$, $\sum_{i,k}^{\infty} \lambda_i^2 b_{ik}^2$, то меры ν и μ эквивалентны и

$$\frac{d\nu}{d\mu}(\eta(\cdot)) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{p\left\{\xi_k - \dfrac{(\lambda B_1 \eta, e_k)}{\lambda_k}\right\}}{p\{\xi_k\}},$$

$$\frac{d\mu}{d\nu} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{p\left\{\xi_k - \dfrac{(\lambda B \eta, e_k)}{\lambda_k}\right\}}{p\{\xi_k\}}.$$

Доказательство. В работе [2] было доказано, что элемент a из H принадлежит множеству допустимых сдвигов M меры μ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a, e_k)^2}{\lambda_k^2} < \infty$.

Если D^2 — вполне непрерывный неотрицательный симметричный оператор с собственными значениями $\{\lambda_k^2\}$ и соответствующими им собственными векторами $\{e_k\}$, то, согласно [2], множество допустимых сдвигов $M = DH$ и

$$\frac{d\mu_a}{d\mu}(\eta(\cdot)) = \varrho(a, \eta(\cdot)) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{p\left\{\frac{(\eta, e_k)}{\lambda_k} - \frac{(a, e_k)}{\lambda_k}\right\}}{p\left\{\frac{(\eta, e_k)}{\lambda_k}\right\}}.$$

Для доказательства нашей теоремы достаточно показать, что выражения

$$\varrho(P_n(\eta - A\eta), \eta), \tag{1}$$

$$\varrho(P_n(\eta - A^{-1}\eta), \eta) \tag{2}$$

имеют пределы при $n \to \infty$, которые удовлетворяют соотношению

$$\varrho(\eta - A\eta, \eta)\, \varrho(A\eta - \eta, A\eta) = 1,$$

так как тогда выполняются условия теоремы 2 [1, § 3 гл. 7]. Рассмотрим выражение (1)

$$\varrho(P_n(\eta - A\eta), \eta) = \prod_{k=1}^{n} \frac{p\left\{\xi_k - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_{ik} \xi_i\right\}}{p\{\xi_k\}}. \tag{3}$$

Бесконечное произведение (3) будет сходиться или расходиться вместе с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{p\left\{\xi_k - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_{ik} \xi_i\right\}}{p\{\xi_k\}}.$$

Применяя формулу Тейлора к членам данного ряда, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{p\left\{\xi_k - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_{ik} \xi_i\right\}}{p\{\xi_k\}} = \sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_{ik} \xi_i + \right.$$

$$\left. + \left[\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_{ik} \xi_i\right]^2 \left(\frac{p''(\Delta_k)}{p(\Delta_k)} - \left(\frac{p'(\Delta_k)}{p(\Delta_k)}\right)^2\right)\right],$$

где

$$\xi_k < \Delta_k < \xi_k - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_{ik} \xi_i.$$

Следовательно, нам достаточно показать сходимость по вероятности ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_{ik} \xi_i. \tag{4}$$

Перепишем (4) в таком виде:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_{ik} \xi_i = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)} \lambda_k a_{kk} \xi_k + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)} \sum_{i \neq k}^{\infty} \lambda_i a_{ik} \xi_i. \tag{5}$$

В силу условий теоремы первый ряд в выражении (5) сходится с вероятностью единица, так как:

$$\sum_{k=1}^{\infty} M\xi_k \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)} \lambda_k a_{kk} = M\left(\xi_k \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_{kk},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} D\xi_k \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)} \lambda_k a_{kk} = D\left(\xi_k \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 a_{kk}^2 < \infty.$$

Покажем, что второй ряд в выражении (5) сходится в среднем квадратическом, т. е.

$$M\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)} \sum_{i \neq k}^{m} \lambda_i a_{ik} \xi_i - \sum_{k=1}^{n'} \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)} \sum_{i \neq k}^{m'} \lambda_i a_{ik} \xi_i\right]^2 \to 0$$

при n, n', m, $m' \to \infty$,

$$M\left|\sum_{k=n'+1}^{n} \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)} \sum_{i \neq k}^{m'} \lambda_i a_{ik} \xi_i + \sum_{k=1}^{n} \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)} \sum_{\substack{k \neq i \\ i=m'+1}}^{m} \lambda_i a_{ik} \xi_i\right]^2 =$$

$$= M\left(\sum_{k=n'+1}^{n} \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)} \sum_{i \neq k}^{m'} \lambda_i a_{ik} \xi_i\right)^2 + 2M\left(\sum_{k=n'+1}^{n} \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)} \sum_{i \neq k}^{m'} \lambda_i a_{ik} \xi_i\right) \times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\sum_{\substack{i=m'+1\\ i\neq k}}^{m}\lambda_i a_{ik}\xi_i\right)+M\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\sum_{\substack{i=m'+1\\ i\neq k}}^{m}\lambda_i a_{ik}\xi_i\right)^2=$$

$$=\sum_{k=n'+1}^{n}M\left[\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\right]^2 M\left[\sum_{i\neq k}^{m'}\lambda_i a_{ik}\xi_i\right]^2+$$

$$+2\sum_{n'+1\leqslant i<j\leqslant n}M\left[\frac{p'(\xi_i)}{p(\xi_i)}\sum_{t\neq i}^{m'}\lambda_t a_{ti}\xi_t\,\frac{p'(\xi_j)}{p(\xi_j)}\sum_{t\neq j}^{m'}\lambda_t a_{tj}\xi_j\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}M\left[\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\right]^2 M\left[\sum_{\substack{i=m'+1\\ i\neq k}}^{m}\lambda_i a_{ik}\xi_i\right]^2+$$

$$+2\sum_{1\leqslant i<j<n}M\left[\frac{p'(\xi_i)}{p(\xi_i)}\sum_{\substack{t=m'+1\\ t\neq i}}\lambda_t a_{ti}\xi_t\,\frac{p'(\xi_j)}{p(\xi_j)}\sum_{\substack{t=m'+1\\ t\neq j}}\lambda_t a_{tj}\xi_t\right].$$

Не ограничивая общности, можно предположить, что $n>n'>$ $>m>m'$, тогда получим

$$M\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\sum_{i\neq k}^{m}\lambda_i a_{ik}\xi_i-\sum_{k=1}^{n'}\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\sum_{i\neq k}^{m'}\lambda_i a_{ik}\xi_i\right]^2=$$

$$=c\sum_{k=n'+1}^{n}\sum_{i\neq k}^{m'}M(\lambda_i a_{ik}\xi_i)^2+c\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{i=m'+1\\ i\neq k}}^{m}M(\lambda_i a_{ik}\xi_i)^2+$$

$$+2\sum_{m'\leqslant i<j\leqslant m}M\left[\frac{p'(\xi_i)}{p(\xi_i)}\sum_{\substack{t=m'+1\\ t\neq i}}^{m}\lambda_t a_{ti}\xi_t\,\frac{p'(\xi_j)}{p(\xi_j)}\sum_{\substack{t=m'+1\\ t\neq j}}^{m}\lambda_t a_{tj}\xi_t\right]=$$

$$=bc\sum_{k=n'+1}^{n}\sum_{i\neq k}^{m'}a_{ik}^2\lambda_i^2+bc\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{i=m'+1\\ i\neq k}}^{m}a_{ik}^2\lambda_i^2+$$

$$+\sum_{m'\leqslant i<j\leqslant m}M\left[\frac{p'(\xi_i)}{p(\xi_i)}\lambda_i a_{ij}\frac{p'(\xi_j)}{p(\xi_j)}\lambda_j a_{ji}\xi_i\xi_j\right]=$$

$$= bc \sum_{k=n'+1}^{n} \sum_{i \neq k}^{m'} a_{ik}^2 \lambda_i^2 + bc \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=m'+1}^{m} a_{ik}^2 \lambda_i^2 + m^2 \sum_{m' \leqslant i < j \leqslant m} \lambda_i a_{ij} \lambda_j a_{ji},$$

где

$$c = M \left[\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)} \right]^2 .$$

В силу условий теоремы последнее выражение стремится к 0 при $n \to \infty$. Теорема доказана.

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность научному руководителю А. В. Скороходу за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.

2. Майданюк Р. Я. Абсолютная непрерывность для простейших преобразований мер, которые соответствуют случайным рядам.—Теор. вероят. и матем. стат., вып. 1, 1970.

R. Ya. Maydanyuk

ABSOLUTELY CONTINUOUS MEASURES CORRESPONDING TO THE SERIES OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES UNDER THE LINEAR TRANSFORMATION OF THE SPACE

Summary

The conditions for absolutely continuous measures corresponding to the series of independent random variables under linear transformation of the space are found.

Поступила в редакцию 24.IV 1969.