Ю. М. РЫЖОВ, доц.
Киевский университет

УСЛОВИЕ СИНГУЛЯРНОСТИ ГАУССОВСКИХ МЕР, ОТВЕЧАЮЩИХ СТАЦИОНАРНЫМ ПРОЦЕССАМ

Недостаток известных в настоящее время необходимых и достаточных условий абсолютной непрерывности гауссовских мер в функциональном пространстве состоит в том, что в конкретных случаях их трудно проверить. В связи с этим важное значение имеют достаточные, легко проверяемые условия абсолютной непрерывности или сингулярности, которые были бы применимы к гауссовским процессам из возможно более широкого класса. Например, если процессы стационарные, имеют спектральные плотности, которые при $\lambda \to \infty$ ведут себя степенным образом, то для сингулярности мер достаточно, чтобы

$$\frac{f_1(\lambda)}{f_2(\lambda)} \not\to 1, \quad \lambda \to \infty,$$

где $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ — спектральные плотности.

Известны и другие достаточные условия [1, 2].

В предлагаемой работе доказывается, что для непрерывных в среднем квадратическом стационарных гауссовских процессов достаточным условием сингулярности соответствующих мер является следующее:

$$\lim_{\tau \downarrow 0} \frac{R_1(0) - R_1(\tau)}{R_2(0) - R_2(\tau)} \neq 1 .$$

Иначе предел не существует. Здесь $R_1(\tau)$ и $R_2(\tau)$ — корреляционные функции рассматриваемых процессов.

Докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $t \in [0, T]$ — вещественнозначные гауссовские процессы. Если существует последовательность измеримых функционалов $\mathfrak{M}_n(\cdot)$, $n = 1,2,\ldots$ на пространстве функций, определенных на $[0, T]$, таких, что

$$\mathbf{M}\mathfrak{M}_n(\xi_1) = 1,$$
$$m = \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\mathfrak{M}_n(\xi_2) \neq 1, \tag{1}$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{D}\mathfrak{M}_n(\xi_1) = 0,$$

то меры μ_{ξ_1} и μ_{ξ_2}, отвечающие процессам $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, будут сингулярными относительно друг друга.

Доказательство. Предположим обратное, т. е. что меры μ_{ξ_1} и μ_{ξ_2} эквивалентны. В силу третьего из условий (1) существует такая постоянная $C>0$, что при всех n

$$\mathbf{D}\,\mathfrak{M}_n(\xi_1) < c < \infty.$$

Так как, по предположению, меры μ_{ξ_1} и μ_{ξ_2} эквивалентны, то найдется такая постоянная $C_1 > 0$, что при всех n

$$\mathbf{D}\,\mathfrak{M}_n(\xi_2) < C_1 < \infty.$$

Это же условие позволяет выбрать такую последовательность $\mathfrak{M}_{n_k}(\cdot)$, что с вероятностью 1

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{M}_{n_k}(\xi_1) = 1.$$

Но в силу эквивалентности мер подпоследовательность $\mathfrak{M}_{n_k}(\xi_2)$ также сходится с вероятностью 1 к некоторой случайной величине $\mathfrak{M}(\xi_2)$. При наших предположениях с вероятностью 1 должно выполняться $\mathfrak{M}(\xi_2) = 1$. Но, с другой стороны, поскольку $\mathbf{M}\mathfrak{M}_n^2(\xi_2) < C_1$, то

$$\mathbf{M}\mathfrak{M}(\xi_2) = \mathbf{M}\lim_{k\to\infty}\mathfrak{M}_{n_k}(\xi_2) = \lim_{k\to\infty}\mathbf{M}\,\mathfrak{M}_{n_k}(\xi_2) \neq 1.$$

Полученное противоречие и доказывает лемму.

Лемма 2. Пусть $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $t \in [0, T]$ — стационарные гауссовские процессы. Если можно подобрать такую последовательность борелевских функций $f_n(x)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{M}\, f_n^2\left(\xi_1\left(\frac{T}{n}\right) - \xi_1(0)\right)}{\left[\mathbf{M} f_n\left(\xi_1\left(\frac{T}{n}\right) - \xi_1(0)\right)\right]^2} = 1, \tag{2}$$

$$\frac{\mathbf{M} f_n\left(\xi_1\left(\frac{T}{n}\right) - \xi_1(0)\right)}{\mathbf{M} f_n\left(\xi_2\left(\frac{T}{n}\right) - \xi_2(0)\right)} \not\to 1, \quad n\to\infty, \tag{3}$$

то меры μ_{ξ_1} и μ_{ξ_2} сингулярны относительно друг друга.

Доказательство. Обозначим для $x(t)$, $t\in[0, T]$

$$x_{kn} = x\left(\frac{k}{n}T\right) - x\left(\frac{k-1}{n}T\right),\quad k = 1, 2, \ldots, n$$

и рассмотрим последовательность функционалов от функций $x(t)$, $t\in[0, T]$:

$$\mathfrak{M}_n(x) = \frac{\sum_{k=1}^{n} f_n(x_{kn})}{\mathbf{M}\sum_{k=1}^{n} f_n(\xi_{kn}^{(1)})}, \quad \xi_{kn}^{(i)} = \xi_i\left(\frac{k}{n}T\right) - \xi_i\left(\frac{k-1}{n}T\right).$$

Тогда

$$\mathbf{M}\,\mathfrak{M}_n(\xi_1) = 1 \tag{4}$$

при всех n, а

$$\mathbf{M}\,\mathfrak{M}_n(\xi_2) = \frac{\mathbf{M}f_n(\xi_{kn}^{(2)})}{\mathbf{M}f_n(\xi_{kn}^{(1)})} \not\to 1, \quad n\to\infty \tag{5}$$

по условию (3).

Рассмотрим дисперсию $D\,\mathfrak{M}_n(\xi_1)$. Используя лемму работы [3], легко получить

$$\mathbf{D}\mathfrak{M}_n(\xi_1) = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\mathbf{M}f_n(\xi_{ni}^{(1)})\,f_n(\xi_{nj}^{(1)})}{\mathbf{M}f_n(\xi_{ni}^{(1)})\,\mathbf{M}f_n(\xi_{nj}^{(1)})} - 1\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n^2}\left[\frac{\mathbf{M}\,f_n^2(\xi_{n1}^{(1)})}{\left(\mathbf{M}\,f_n(\xi_{n1}^{(1)})\right)^2} - 1\right]\sum_{i,\,j=1}^{n}\left|\frac{R_{ij}^{(k)}}{R_0^{(1)}}\right|,$$

$$R_{ij}^{(k)} = \mathbf{M}\,\xi_{ni}^{(k)}\,\xi_{nj}^{(r)},$$

$$R_0^{(k)} = \mathbf{M}\,(\xi_{n1}^{(k)})^2, \quad k = 1,\ 2.$$

Так как $\left|\frac{R_{ij}^{(1)}}{R_0^{(1)}}\right| \leqslant 1$, из условия (2) следует

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{D}\,\mathfrak{M}_n(\xi_1) = 0. \tag{6}$$

Из (4), (5) и (6) и леммы 1 следует утверждение леммы 2.

Теорема 1. Пусть $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $t\in[0,\ T]$ — непрерывные в среднем квадратическом стационарные гауссовские процессы, $\mathbf{M}\xi_1(t) = \mathbf{M}\xi_2(t) = 0$ и с корреляционными функциями $R_1(\tau)$ и $R_2(\tau)$ соответственно. Если при $\tau\downarrow 0$ отношение $\frac{R_1(0) - R_1(\tau)}{R_2(0) - R_2(\tau)}$ стремится к 0 или ∞, то меры μ_{ξ_1} и μ_{ξ_2} взаимно сингулярны.

Доказательство. Обозначим

$$\xi_{nk}^{(i)} = \xi_i\left(\frac{k}{n}T\right) - \xi_i\left(\frac{k-1}{n}T\right),$$

$$R_{kl}^{(i)} = \mathbf{M}\,\xi_{nk}^{(i)}\,\xi_{nl}^{(i)},$$

$$R_0^{(i)} = \mathbf{M}\,(\xi_{n1}^{(i)})^2, \quad i = 1, 2; \quad l, k = 1, 2, \dots n.$$

Пусть

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\exp\left\{\sqrt{\frac{2A_n}{R_0^{(1)}}} - \frac{A_n}{x^2}\right\},$$

где A_n — некоторые неотрицательные постоянные. Тогда

$$\mathbf{M}f_n(\xi^{(1)}_{n,1}) = \frac{1}{n},$$

$$\mathbf{M}f_n(\xi^{(2)}_{n,1}) = \frac{1}{n}\exp\left\{\sqrt{\frac{2A_n}{R_0^{(1)}}}\left(1 - \sqrt{\frac{R_0^{(1)}}{R_0^{(2)}}}\right)\right\},$$

$$\mathbf{M}f_n^2(\xi^{(1)}_{n,1}) = \frac{1}{n^2}\exp\left\{2(\sqrt{2}-1)\sqrt{\frac{A_n}{R_0^{(1)}}}\right\}.$$

Положим $A_n = \dfrac{B_n^2 R_0^{(1)}}{4(\sqrt{2}-1)^2}$, где постоянные B_n таковы, что $B_n \to 0$ при $n \to \infty$, но

$$B_n^2 \frac{R_0^{(1)}}{R_0^{(2)}} = B_n^2 \frac{R_1(0) - R_1\left(\frac{T}{n}\right)}{R_2(0) - R_2\left(\frac{T}{n}\right)} \to \infty$$

при $n \to \infty$. Тогда

$$\frac{\mathbf{M}f_n^2(\xi^{(1)}_{n,1})}{(\mathbf{M}f_n(\xi^{(1)}_{n,1}))^2} = e^{B_n} \to 1, \quad n \to \infty \tag{7}$$

и, кроме того,

$$\frac{\mathbf{M}f_n(\xi^{(1)}_{n,1})}{\mathbf{M}f_n(\xi^{(2)}_{n,1})} = \exp\left\{\frac{\sqrt{2}B_n}{2(\sqrt{2}-1)}\left(1 - \sqrt{\frac{R_0^{(1)}}{R_0^{(2)}}}\right)\right\} \to 0. \tag{8}$$

Из (7), (8) и леммы 2 следует доказательство теоремы в случае

$$\lim_{\tau \downarrow 0} \frac{R_1(0) - R_1(\tau)}{R_2(0) - R_2(\tau)} = \infty.$$

Из соображений симметрии вытекает, что меры μ_{ξ_1} и μ_{ξ_2} будут взаимно сингулярны и в случае, когда

$$\lim_{\tau \downarrow 0} \frac{R_1(0) - R_1(\tau)}{R_2(0) - R_2(\tau)} = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $t \in [0, T]$ — непрерывные в среднем квадратическом стационарные гауссовские процессы,

$$\mathbf{M}\,\xi_1(t) = \mathbf{M}\,\xi_2(t) = 0,$$
$$\mathbf{M}\,\xi_1(t)\,\xi_1(t+\tau) = R_1(\tau),$$
$$\mathbf{M}\,\xi_2(t)\,\xi_2(t+\tau) = R_2(\tau).$$

Если при $\tau \downarrow 0$

$$\frac{R_1(0) - R_1(\tau)}{R_2(0) - R_2(\tau)} \not\to 1, \tag{9}$$

то меры μ_{ξ_1} и μ_{ξ_2} сингулярны относительно друг друга.

Доказательство. Заметим, что в силу теоремы 1 мы можем рассматривать лишь случай, когда

$$0 < m \leqslant \frac{R_1(0) - R_1(\tau)}{R_2(0) - R_2(\tau)} \leqslant M < \infty$$

при всех достаточно малых τ.

Покажем, что в условиях теоремы можно подобрать последовательность функций $f_n(x)$, удовлетворяющих условиям леммы 2. Положим

$$f_n(x) = \exp\left\{-\frac{1}{R_0^{(1)}}h(x)\right\}, \tag{10}$$

где $h(x)$ — неотрицательная функция, заданная на $(-\infty, \infty)$, на которую в процессе доказательства будут накладываться различные ограничения. Эти ограничения обсуждаться не будут, а в конце мы покажем, что нужная нам функция существует.

Рассмотрим

$$\mathbf{M}\,f_n(\xi_{n,1}^{(1)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_0^{(1)}}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{R_0^{(1)}}\left(h(x) + \frac{x^2}{2}\right)\right\}dx.$$

Пусть $h(x) + \frac{x^2}{2}$ имеет единственный минимум в точке $x_0 = -1$. Для этого достаточно

$$\begin{gathered} h'(x_0) + x_0 = 0, \\ h''(x_0) + 1 > 0, \\ h'(x) + x \neq 0, \quad x \neq x_0. \end{gathered} \tag{11}$$

Если это выполнено, то

$$\mathbf{M}\,f_n(\xi_{n,1}^{(1)}) \sim 2\exp\left\{-\frac{1}{R_0^{(1)}}\left(h(x_0) + \frac{x_0^2}{2}\right)\right\}\frac{1}{\sqrt{h''(x_0)+1}}.$$

Рассмотрим теперь $\mathbf{M} f_n^2(\xi_{n,1}^{(1)})$:

$$\mathbf{M} f_n^2(\xi_{n,1}^{(1)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_0^{(1)}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{R_0^{(1)}}\left(2h(x) + \frac{x^2}{2}\right)\right\} dx.$$

Если функция $2h(x) + \frac{x^2}{2}$ имеет единственный минимум в точке x_1, т. е.

$$\begin{gathered} 2h'(x_1) + x_1 = 0, \\ 2h''(x_1) + x_1 > 0, \\ 2h'(x) + x \neq 0, \quad x \neq x_1, \end{gathered} \tag{12}$$

то

$$\mathbf{M} f_n^2(\xi_{n,1}^{(1)}) \sim 2\exp\left\{-\frac{1}{R_0^{(1)}}\left(2h(x_1) + \frac{x_1^2}{2}\right)\right\} \frac{1}{\sqrt{2h''(x_1) + 1}}\,.$$

Потребуем, чтобы

$$\begin{gathered} \frac{4}{h''(x_0) + 1} = \frac{2}{\sqrt{2h''(x_1) + 1}}\,, \\ h(x_0) + \frac{x_0^2}{2} = 2h(x_1) + \frac{x_1^2}{2}\,. \end{gathered} \tag{13}$$

Тогда при $n \to \infty$

$$\frac{\mathbf{M} f_n^2(\xi_{n,1}^{(1)})}{(\mathbf{M} f_n(\xi_{n,1}^{(1)}))^2} \to 1. \tag{14}$$

Рассмотрим теперь

$$\mathbf{M} f_n(\xi_{n,1}^{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_0^{(2)}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{R_0^{(1)}}\left(h(x) + \frac{R_0^{(1)}}{R_0^{(2)}} \cdot \frac{x^2}{2}\right)\right\} dx.$$

Если $\frac{R_0^{(1)}}{R_0^{(2)}}$ стремится к 0 или ∞, то, по доказанному, меры μ_{ξ_1} и μ_{ξ_2} взаимно сингулярны. Поэтому, не уменьшая общности, можем считать, что

$$\frac{R_1(0) - R_1(\tau)}{R_2(0) - R_2(\tau)} \to A > 1 \tag{15}$$

при $\tau \downarrow 0$.

Пусть x_n — единственный минимум функции $h(x) + \frac{R_0^{(1)}}{R_0^{(2)}} \cdot \frac{x^2}{2}$, что выполняется, если

$$
\begin{gathered}
h'(x_n) + \frac{R_0^{(1)}}{R_0^{(2)}} \lambda_n = 0, \\
h''(x_n) + \frac{R_0^{(1)}}{R_0^{(2)}} > 0, \qquad (16) \\
h'(x) + \frac{R_0^{(1)}}{R_0^{(2)}} x \neq 0, \quad x \neq x_n;
\end{gathered}
$$

кроме того, пусть x_2 — такая точка, что

$$
\begin{gathered}
h'(x_2) + Ax_2 = 0, \\
h''(x_2) + A > 0, \qquad (17) \\
h'(x) + Ax \neq 0, \quad x \neq x_2.
\end{gathered}
$$

Учитывая (15), имеем $x_n \to x_2$ при $n \to \infty$. Тогда

$$
\mathbf{M} f_n (\xi_{n,1}^{(2)}) \sim 2 \frac{\sqrt{\frac{R_0^{(1)}}{R_0^{(2)}}}}{\sqrt{h''(x_2) + A}} \exp\left\{- \frac{1}{R_0^{(1)}} \left(h(x_2) + \frac{Ax_2^2}{2} \right) \right\}. \qquad (18)
$$

Следовательно,

$$
\frac{\mathbf{M} f_n (\xi_{n,1}^{(2)})}{\mathbf{M} f_n (\xi_{n,1}^{(1)})} \sim \frac{\sqrt{A (h''(x_0) + 1)} \exp\left\{- \frac{1}{R_0^{(1)}} \left(h(x_2) + A \frac{x_2^2}{2} \right) \right\}}{\sqrt{h''(x_2) + A} \exp\left\{- \frac{1}{R_0^{(1)}} \left(h(x_0) + \frac{x_0^2}{2} \right) \right\}}.
$$

Пусть

$$
h(x_2) + A \frac{x_2^2}{2} \neq h(x_0) + \frac{x_0^z}{2}.
$$

Тогда $\frac{\mathbf{M} f_n (\xi_{n,1}^{(2)})}{\mathbf{M} f_n (\xi_{n,1}^{(2)})}$ при $n \to \infty$ стремится либо к 0, либо к ∞, во всяком случае

$$
\frac{\mathbf{M} f_n (\xi_{n,1}^{(2)})}{\mathbf{M} f_n (\xi_{n,1}^{(1)})} \not\to 1. \qquad (19)
$$

Соотношения (14) и (15) вместе с леммой 2 доказывают теорему, если функция $h(x)$ обладает всеми перечисленными выше свойствами.

Покажем теперь, что такая функция существует. Это сделать довольно легко. Условия (11), (12), (16) и (17) выполняются, если функция $h(x)$ такова, что ее производная $h'(x)$ пересекает каждую прямую $y=-kx$, $\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant A$ лишь один раз, причем $h''(x)+C>0$, $\frac{1}{2}\leqslant C<A$, где A то же, что и в (15). Можем взять $x_0=-1$ и положить $h(-1)=\frac{1}{2}$, $h'(-1)=1$, $h''(-1)=1$. Если x_1 — решение уравнения $h'(x_1)+\frac{x_1}{2}=0$, то функция должна быть такой, чтобы

$$2h(x_1)+\frac{x_1^2}{2}=1,$$

$$h''(x_1)=0,$$

$$2h(x_2)+Ax_2^2\neq 2.$$

Понятно, что такая функция существует. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И. И., Скороход А. В. О плотностях вероятностных мер в функциональных пространствах.— Успехи матем. наук, **21**, № 6 (132), 1966.
2. Розанов Ю. А. О вероятностных мерах в функциональных пространствах, отвечающих гауссовским случайным процессам.—Теория вероят. и ее примен., IX, № 4, 1964.
3. Рыжов Ю. М. Одна предельная теорема для стационарных гауссовских процессов.— Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 1, 1969.

Yu. M. Ryzhov

THE SINGULARITY CONDITION FOR GAUSSIAN MEASURES, WHICH CORRESPOND TO STATIONARY PROCESSES

Summary

Let $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $t\in[0,T]$ be real-valued continuous in mean-square stationary Gaussian processes,

$$M\xi_1(t)=M\xi_2(t)=0,\quad M\xi_1(t)\,\xi_1(t+\tau)=R_1(\tau),\quad M\xi_2(t)\,\xi_2(t+\tau)=R_2(\tau).$$

It is proved, if $\lim\limits_{\tau\downarrow 0}\frac{R_1(0)-R_1(\tau)}{R_2(0)-R_2(\tau)}$ does not exist, or exist but isn't equal to 1, then the measures μ_{ξ_1} and μ_{ξ_2}, which correspond to the processes $\xi_1(t)$ and $\xi_2(t)$ respectively, are singular with respect to each other.

Поступила в редакцию 20. I 1969.