Д. С. СИЛЬВЕСТРОВ, асп.
Киевский университет

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ НА ПОЛУПРЯМОЙ, УПРАВЛЯЕМОГО ЦЕПЬЮ МАРКОВА. II

Во второй части работы получена оценка скорости сходимости функции распределения случайного функционала $\xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), \alpha)$ [1] к своим предельным значениям. При этом можно ограничиться только схемой серий, так как для случайных величин $\lim\limits_{t\to\infty} \xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), \alpha)$ при $\alpha \to 1$ и $\xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), 1)$ при $t \to \infty$ подобные оценки могут быть получены совершенно аналогично приведенным ниже для случаев $q = 0$ или $q = 1$ соответственно. Кроме того, для первой из этих величин аналогичные результаты даны в работе [2].

В дополнение к условиям (A_i), $i = 1 - 3$ предполагается выполненным условие

(A_4): 1. $\sup\limits_{\alpha\in[0,1]} M(\tau(\alpha, x, i))^2 < \infty$, $i = 1, 2$, $x \in H$,

2. $\sup\limits_{\alpha\in[0,1]} M|\gamma(\alpha, x, i)|^3 < \infty$, $i = 1, 2$, $x \in H$.

Введем ряд обозначений:

$$u(\alpha, t) = (1 + v(\alpha)\sqrt{w(\alpha, t)})\sqrt{w(\alpha, t)},$$

$$l(\alpha) = M\tau(\alpha, 1) + M\tau(\alpha, 2),$$

$$C_2(\alpha) = \left(\frac{2}{p} - 2\right)\sum_{i,j=1}^{2}\sum_{x,y=0}^{b} \min(b - x, b - y)\times$$

$$\times M\gamma(\alpha, x, i)\, M\gamma(\alpha, y, j) + \sum_{i=1}^{2}\sum_{x=0}^{b} D\gamma(\alpha, x, i),$$

A_i, B_i, $i = 1, 2, \ldots$ — неотрицательные константы.

Теорема 5. Пусть выполняются условия (A_i), $i = 1 - 4$ и $\lim\limits_{\alpha\to1, t\to\infty} (1 + r(\alpha)\sqrt{t})^{-1} = q \in [0, 1]$. Тогда найдутся такие $\alpha_0 \in (0, 1)$ и $t_0 > 0$, что для $\alpha > \alpha_0$ и $t > t_0$:

1) при $c_1 \neq 0$

$$H_1(\alpha, t, u) = \left| P\left\{ \frac{\xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), \alpha)}{c_1 w(\alpha, t)} < u \right\} - \Psi(c_4, q, u) \right| \leqslant$$

$$\leqslant B_1 \left(|v(\alpha) - c_1|^{\frac{2}{3}} + w(\alpha, t)^{-\frac{1}{4}} + |l(\alpha) - l(1)|^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{1}{1 + r(\alpha)\sqrt{t}} - q \right|^{\frac{1}{2}} \right);$$

2) при $c_1 = 0$ и $\lim\limits_{\alpha \to 1, t \to \infty} (1 + v(\alpha)\sqrt{w(\alpha, t)})^{-1} = r \in [0, 1]$*)

$$H_2(\alpha, t, u) = \left| P\left\{ \frac{\xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), \alpha)}{u(\alpha, t)} < u \right\} - \right.$$

$$\left. - \int_0^\infty \varphi(v(1 - r), v c_2 r^2, u)\, d\Psi(c_4, q, v) \right| \leqslant$$

$$\leqslant B_2 \left(|c_2(\alpha) - c_2| + w(\alpha, t)^{-\frac{1}{6}} + |l(\alpha) - l(1)|^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{1}{1 + r(\alpha)\sqrt{t}} - q \right|^{\frac{1}{2}} + \left| \frac{1}{1 + v(\alpha)\sqrt{w(\alpha, t)}} - r \right| \right).$$

Замечание. Константы B_1, B_2 и α_0, t_0 зависят только от η_0, x_0, a, $p_{ij}(\alpha)$, $M(\tau(\alpha, x, i))^l$, $M|\gamma(\alpha, x, i)|^k$, $i, j = 1, 2$, $k = 1, 2, 3$, $x \in H$ и могут быть выписаны в явном виде, но ввиду сложности этого выражения лишь укажем путь их нахождения при доказательстве.

Доказательство. Покажем прежде всего, что для α, достаточно близких к 1, и достаточно больших t имеет место оценка

$$K(\alpha, t, u) = \left| P\left\{ \frac{\nu(\alpha, t)}{w(\alpha, t)} < u \right\} - P\{\xi(c_4, q) < u\} \right| \leqslant A_1 d(\alpha, t), \quad (10)$$

где

$$d(\alpha, t) = w(\alpha, t)^{-\frac{1}{2}} + \left| \frac{1}{1 + r(\alpha)\sqrt{t}} - q \right|^{\frac{1}{2}} + |l(\alpha) - l(1)|^{\frac{1}{2}}.$$

В силу соотношения (3) [1]

$$K(\alpha, t, u) \leqslant I_1(\alpha, t, u) + I_2(\alpha, t, u),$$

*) Не нарушая общности, можно считать, что для α, близких к 1, $v(\alpha) \geqslant 0$.

где

$$I_1(\alpha, t, u) = \left| P\left\{ \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{[uw(\alpha,t)]} \varrho_k(\alpha) < 1 \Big/ \sum_{k=0}^{[uw(\alpha,t)]} \varrho_k(\alpha) < \infty \right\} - \widetilde{\Psi}(q, u) \right| \times$$

$$\times (1 - r(\alpha))^{[uw(\alpha,t)]},$$

$$I_2(\alpha, t, u) = \widetilde{\Psi}(q, u) \left| (1 - r(\alpha))^{[uw(\alpha,t)]} - e^{-u(1-q)} \right|,$$

$$\widetilde{\Psi}(q, u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{uq}{\sqrt{c_4}}}^{\infty} \exp\left\{ \frac{u(1-q)}{2} - \frac{(1-q)^2 u^2}{8v^2} - \frac{v^2}{2} \right\} dv.$$

Для $I_2(\alpha, t, u)$ имеют место оценки при $q > 0$

$$I_2(\alpha, t, u) \leqslant \frac{1}{w(\alpha, t)} + r(\alpha) + \sup_u u\widetilde{\Psi}(q, u) \left(\left| \frac{1}{1 + r(\alpha)\sqrt{t}} - q \right| + \right.$$

$$\left. + \frac{2(1-q)^2}{w(\alpha, t)} \right)$$

(для $u \geqslant w(\alpha, t)^{-1}$ надо воспользоваться неравенством: если $|a|$, $|b| \leqslant 1$, то $|a^n - b^n| \leqslant n|a - b|$). При $q < 1$

$$I_2(\alpha, t, u) \leqslant \frac{24}{\pi} \sup_u (1-q) e^{-(1-q)u} T^{-1} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^T \frac{1}{s} \left| r(\alpha)(1 + (r(\alpha) - 1) e^{isw(\alpha,t)^{-1}})^{-1} - \left(1 - \frac{is}{1-q}\right)^{-1} \right| ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} T \left(\left| \frac{1}{1-q} - \frac{1}{r(\alpha) w(\alpha, t)} \right| + \frac{1}{w(\alpha, t)} \left(1 + \frac{1}{2r(\alpha) w(\alpha, t)} \right) \right) +$$

$$+ \frac{24}{\pi} T^{-1} \sup_u (1-q) e^{-(1-q)u}$$

(надо воспользоваться теоремой об оценке близости функций распределений по характеристическим функциям (т. о. б.) [3]), которые нетрудно привести к виду

$$I_2(\alpha, t, u) \leqslant A_2 d(\alpha, t),$$

где константу A_2 можно выписать в явном виде.

Для $I_1(\alpha, t, u)$ имеют место оценки при $0<q<1$

$$I_1(\alpha, t, u) \leqslant \frac{24}{\pi} A_3 T^{-1} + \frac{2}{\pi}(1-r(\alpha))^{[uw(\alpha,t)]} \int_0^T \frac{1}{s} \left| h\left(\alpha, \frac{s}{t}\right)^{[uw(\alpha,t)]} - e^{ub(q,s)} \right| ds, \tag{11}$$

где

$$A_3 = \sup_u (1-r(\alpha))^{[uw(\alpha,t)]} \sup_v \frac{d}{dv} \widetilde{\Psi}\left(q, \frac{u}{\sqrt{v}}\right),$$

$$h(\alpha, s) = \frac{1-\Delta(\alpha) - \sqrt{(1-\Delta(\alpha))^2 - 4p_{21}(\alpha)\, p_{12}(\alpha)\, g_1(\alpha, s)\, g_2(\alpha, s)}}{2p_{12}(\alpha)\, g_2(\alpha, s)},$$

$$b(q, s) = \frac{1-q}{2} \sqrt{\left(\frac{1-q}{2}\right)^2 - 2isq^2 c_4^{-1}}.$$

Здесь опять использована т. о. б. (так как

$$\lim_{\alpha\to 1, t\to\infty} (1-r(\alpha))^{[uw(\alpha,t)]} = e^{-(1-q)u},$$

то для α, близких к 1, и больших t $A_3<\infty$). Что касается оценки второго слагаемого, то нетрудно свести эту задачу к оценке разности $\left| h\left(\alpha, \frac{s}{t}\right)^{w(\alpha,t)} - e^{b(q,s)} \right|$, так как

$$\sup_u u (1-r(\alpha))^{[uw(\alpha,t)]} < \infty,$$

а для $u < w(\alpha, t)^{-1}$

$$|1-e^{ub(q,s)}| \leqslant w(\alpha, t)^{-1} b(q, s).$$

Функцию $\left(h\left(\alpha, \frac{s}{t}\right) - 1\right) w(\alpha, t)$ нетрудно представить в виде

$$\left(h\left(\alpha, \frac{s}{t}\right) - 1\right) w(\alpha, t) = a_1(\alpha) + b_1(\alpha)\, t^{-\frac{1}{2}} s\theta_1 - $$

$$- \sqrt{a_1^2(\alpha) - a_2(\alpha)\, is + b_2(\alpha)\, t^{-1} s^2 \theta_2},$$

где

$$|a_1(\alpha) - (1-q)| \leqslant A_4 \left| \frac{1}{1+r(\alpha)\sqrt{t}} - q \right| + A_5 r(\alpha),$$

$$|a_2(\alpha) - 2q^2 c_4^{-1}| \leqslant A_6 \left| \frac{1}{1+r(\alpha)\sqrt{t}} - q \right| + A_7 r(\alpha) + A_8 |l(\alpha) - l(1)|,$$

$$\sup_\alpha |b_i(\alpha)| \leqslant A_9, \quad i=1, 2, \quad |\theta_i| \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

причем величины $a_i(\alpha)$, $b_i(\alpha)$, $i=1, 2, \ldots$ и константы A_j, $j=4—9$ можно выписать в явном виде.

Для α, близких к 1, и больших t

$$w(\alpha, t) \geqslant 1,$$

$$\left| \sqrt{1-\frac{a_2(\alpha)\, is}{a_1^2(\alpha)}} + \sqrt{1-\frac{2isq^2}{(1-q)^2 c_4}} \right| \geqslant 1,$$

поэтому

$$\left| h\left(\alpha, \frac{s}{t}\right)^{w(\alpha,t)} - e^{b(q,s)} \right| \leqslant \left| \left(h\left(\alpha, \frac{s}{t}\right) - 1 \right) w(\alpha, t) - b(q, s) \right| +$$

$$+ \theta_3 \frac{|b(q, s)|^2}{w(\alpha, t)} \leqslant |a_1(\alpha) - (1-q)| \left| \sqrt{1-\frac{2\, isq^2}{(1-q)^2 c_4}} - 1 \right| +$$

$$+ A_{10} \frac{s}{w(\alpha, t)} + |a_1(\alpha)| \left| \sqrt{1-\frac{a_2(\alpha)\, is}{a_1^2(\alpha)}} - \sqrt{1-\frac{2isq^2}{(1-q)^2 c_4}} \right| +$$

$$+ A_{11} \frac{s^2}{t} \leqslant A_{12} s\, (w(\alpha, t)^{-1} + |a_1(\alpha) - (1-q)| +$$

$$+ |a_2(\alpha) - 2q^2 c_4^{-1}|) + A_{13} \frac{s^2}{t},$$

где константы A_j, $j=10—13$ находятся в явном виде.

Подставляя в (11) и выбирая $T = d(\alpha, t)^{-1}$, получаем нужную оценку.

При $q=1$ можно воспользоваться тем, что в определении $I_1(\alpha, t, u)$ стоит разность функций распределения в точке 1. Так как т. о. б. дает равномерную оценку, то

$$I_1(\alpha, t, u) \leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^T \frac{1}{s} \left| h\left(\alpha, \frac{sz}{t}\right)^{[uw(\alpha,t)]} - e^{u\sqrt{-\frac{2isz}{c_4}}} \right| ds +$$

$$+ \sup_v \frac{d}{dv} \tilde{\psi}\left(1, \frac{uz}{\sqrt{v}}\right),$$

где параметр z в нашем распоряжении.

Для $u<1$ можно взять $z=1$, а для $u \geqslant 1$ положим $z=u^{-1}$. Тогда

$$\sup_u \sup_v \frac{d}{dv} \tilde{\Psi}\left(1, \frac{uz}{\sqrt{v}}\right) < \infty,$$

а нужная оценка первого слагаемого получается совершенно аналогично случаю $0<q<1$, при $q=0$