Д. С. СИЛЬВЕСТРОВ, асп.
Киевский университет

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОГО БЛУЖДАНИЯ НА ПОЛУПРЯМОЙ, УПРАВЛЯЕМОГО МАРКОВСКИМ ПРОЦЕССОМ С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ, В СХЕМЕ СЕРИЙ. II

Во второй части работы получена оценка скорости сходимости функции распределения случайного функционала $\xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), \alpha)$ [1] к предельным значениям.

Введем вспомогательные обозначения

$$u(\alpha, t) = (1 + v(\alpha)\sqrt{w(\alpha, t)})\sqrt{w(\alpha, t)},$$

$$c_2(\alpha) = 8a\int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b}\min(b - x, b - y) f_\alpha(x) f_\alpha(y)\,dxdy,$$

A_i, B_i, $i = 1, 2, \ldots$ — положительные константы.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (A_i), $i = 1 - 3$ и $\lim\limits_{\alpha\to 1, t\to\infty}(1 + r(\alpha)\sqrt{t})^{-1} = q \in]0, 1]$. Тогда найдутся такие $\alpha_0 \in (0, 1)$ и $t_0 > 0$, что для $\alpha > \alpha_0$ и $t > t_0$:

1) при $c_1 \neq 0$

$$K_1(\alpha, t, u) = \left| P\left\{\frac{\xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), \alpha)}{c_1 w(\alpha, t)} < u\right\} - P\{\xi(q) < u\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant B_1\left(|v(\alpha) - c_1|^{\frac{2}{3}} + w(\alpha, t)^{-\frac{1}{4}} + \left|\frac{1}{1 + r(\alpha)\sqrt{t}} - q\right|^{\frac{1}{2}}\right);$$

2) при $c_1 = 0$ и $\lim\limits_{\alpha\to 1, t\to\infty}(1 + v(\alpha)\sqrt{w(\alpha, t)})^{-1} = r \in [0, 1]$*)

$$K_2(\alpha, t, u) = \left| P\left\{\frac{\xi(\eta_0, x_0, \pi(a, t), \alpha)}{u(\alpha, t)} < u\right\} - \right.$$

$$\left. - \int_0^\infty \Phi((1 - r)v, c_2 r^2 v, u)\,d\Psi(q, v)\right| \leqslant$$

*) Не нарушая общности, можно считать, что для α, близких к 1, $\nu(\alpha) \geqslant 0$.

$$\leqslant B_2 \left(|c_2(\alpha) - c_2| + w(\alpha, t)^{-\frac{1}{6}} + \left| \frac{1}{1 + r(\alpha)\sqrt{t}} - q \right|^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{1}{1 + v(\alpha)\sqrt{w(\alpha, t)}} - r \right| \right),$$

где константы B_i, $i = 1, 2$ и α_0, t_0 зависят только от η_0, x_0, a $f_\alpha(x)$, $a_{ij}(\alpha)$, $i, j = 1, 2$ и могут быть выписаны в явном виде

Замечание. В силу большой общности метода доказательства с соответствующими рассуждениями в [2] можно акцентировать внимание только на моментах, опущенных в [2]. Кроме того, по тем же соображениям рассматривается лишь схема серий.

Доказательство. Подобно тому, как это сделано в работе [2], можно показать, что для α, близких к 1, и достаточно больших t

$$\left| P\left\{\frac{\nu(\alpha, t)}{w(\alpha, t)} < u\right\} - P\{\xi(q) < u\} \right| \leqslant A_1 d(\alpha, t),$$

где

$$d(\alpha, t) = w(\alpha, t)^{-\frac{1}{2}} + \left| \frac{1}{1 + r(\alpha)\sqrt{t}} - q \right|^{\frac{1}{2}},$$

$$\left| P\left\{\frac{1}{c_1 w(\alpha, t)} \sum_{k=0}^{\nu(\alpha, t)} \lambda_k(a, \alpha) < u\right\} - P\{\xi(q) < u\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant A_2 (d(\alpha, t) + w(\alpha, t)^{-\frac{1}{3}} + |v(\alpha) - c_1|^{\frac{2}{3}}) = d_1(\alpha, t),$$

если $c_1 \neq 0$, и

$$\left| P\left\{\frac{1}{u(\alpha, t)} \sum_{k=0}^{\nu(\alpha, t)} \lambda_k(a, \alpha) < u\right\} - \int_0^\infty \Phi((1 - r)v,\ r^2 c_2 v, u)\, d\Psi(q, v) \right| \leqslant$$

$$\leqslant A_3 \left(d(\alpha, t) + w(\alpha, t)^{-\frac{1}{4}} + |c_2(\alpha) - c_2| + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{1}{1 + v(\alpha)\sqrt{w(\alpha, t)}} - r \right| \right) = d_2(\alpha, t),$$

если $c_1 = 0$ и $\lim\limits_{\alpha \to 1,\, t \to \infty} (1 + v(\alpha)\sqrt{w(\alpha, t)})^{-1} = r \in [0, 1]$.

При этом константы A_i, $i=1-3$ входят (как множители) первые три абсолютных момента случайной величины $\lambda_1(a_1\alpha)$. Но, очевидно,

$$|\lambda_1(a,\alpha)|\leqslant L\tau_\alpha,$$

где

$$\tau_\alpha=\int_{\mu_1}^{\mu_2}\chi[-a,a](\chi_\alpha(u)\,du$$

и, в свою очередь,

$$\tau_\alpha\leqslant 2a(1+\nu_\alpha),$$

где $\nu_\alpha=\max(k: x_\alpha(\theta_k(\alpha)<x_\alpha(\theta_{k-1}(\alpha)+2a,\ x_\alpha(\theta_{k-1}(\alpha))\geqslant -a)$.

$P\{\nu_\alpha=k\}=e^{-2a}(1-e^{-2a})^k$, $k=0,1,\ldots$. Теперь нетрудно получить нужные оценки для моментов $\lambda_1(a,\alpha)$.

Лемма 3. Если для случайных величин ξ_t, η_t, ξ выполняются оценки

$$|P\{\xi_t<u\}-P\{\xi<u\}|\leqslant a_t,$$
$$P\{\eta_t>\varepsilon\}\leqslant b_{\varepsilon,t},$$

то

$$|P\{\xi_t+\eta_t<u\}-P\{\xi<u\}|\leqslant 2b_{\varepsilon,t}+3a_t+2\sup_x P\{|\xi-x|\leqslant\varepsilon\}.$$

Доказательство. Обозначим $A(\varepsilon,t)=\{\eta_t\leqslant\varepsilon\}$. Тогда

$$|P\{\xi_t+\eta_t<u\}-P\{\xi<u\}|\leqslant P\{\bar{A}(\varepsilon,t)\}+$$
$$+|P\{\xi_t+\eta_t<u,A(\varepsilon,t),\xi_t<u-\varepsilon\}+P\{\xi_t+\eta_t<u,A(\varepsilon,t),\xi_t>$$
$$>u+\varepsilon\}+P\{\xi_t+\eta_t<u,A(\varepsilon,t),|\xi_t-u|\leqslant\varepsilon\}-P\{\xi<u\}|\leqslant$$
$$\leqslant P\{\bar{A}(\varepsilon,t)\}+|P\{A(\varepsilon,t),\xi_t<u-\varepsilon\}-P\{\xi<u\}|+$$
$$+P\{|\xi_t-u|\leqslant\varepsilon\}\leqslant 2b_{\varepsilon,t}+3a_t+2\sup_x P\{|\xi-x|\leqslant\varepsilon\}.$$

Нетрудно записать оценки для абсолютных первых моментов случайных величин μ_0, β, $\int_0^{\mu_0} f_\alpha(x_\alpha(u))\,du$. Так как плотности предельных законов равномерно ограничены сверху, то, применяя лемму 3, можно привести оценки для $K_i(\alpha,t,u)$, $i=1,2$ к виду

$$K_i(\alpha,t,u)\leqslant d_i(\alpha,t)+\frac{A_{4+i}}{\varepsilon w_i(\alpha,t)}+A_{6+i}\varepsilon+A_{8+i}R_i(\alpha,t,\varepsilon),\qquad i=1,2,$$

где

$$w_1(\alpha,t)=w(\alpha,t),$$
$$w_2(\alpha,t)=u(\alpha,t)$$

$$R_i(\alpha, t, \varepsilon) = P\left\{\frac{1}{w_i(\alpha, t)} \int\limits_{\mu}^{\pi_c(a', t)} f_\alpha(x_\alpha^c(u))\, du > \varepsilon\right\},$$

$$a' \geqslant \max(b, x_0, a).$$

Необходимо оценить $R_i(\alpha, t, \varepsilon)$, $i = 1, 2$. Для этого покажем вначале, что

$$M\nu(\alpha, t) \leqslant A_{11} w(\alpha, t).$$

Так как $\nu(\alpha, t) = \min(\nu_1(\alpha, t), \nu_2(\alpha))$, где

$$\nu_1(\alpha, t) = \max\left(n : \sum_{k=0}^{n} \varrho_k'(\alpha) < t\right),$$

$$\nu_2(\alpha) = \max\left(n : \sum_{k=0}^{n} \varrho_k(\alpha) < \infty\right),$$

причем $\varrho_0'(\alpha) = 0$, $\varrho_k'(\alpha)$, $k = 1, 2, \ldots$ независимы и

$$P\{\varrho_k'(\alpha) < u\} = P\{\varrho_k(\alpha) < u / \varrho_k(\alpha) < \infty\},$$

то при $q < 1$

$$M\nu(\alpha, t) \leqslant M\nu_2(\alpha) = \frac{a_{21}(\alpha)}{r(\alpha)} \leqslant A_{12} w(\alpha, t)$$

для α, близких к 1, и больших t, поскольку $\lim\limits_{\alpha\to 1, t\to\infty} [r(\alpha) w(\alpha, t)]^{-1} = \frac{1}{1-q}$.

Пусть теперь $q = 1$. Введем в рассмотрение независимые случайные величины

$$\tilde{\varrho}_k(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varrho_k'(\alpha) < \varepsilon \\ \varepsilon, & \text{если } \varrho_k'(\alpha) \geqslant \varepsilon \end{cases}$$

и

$$\tilde{\nu}(\alpha, t) = \max\left(n : \sum_{k=1}^{n} \tilde{\varrho}_k(\alpha) < t\right).$$

Очевидно,

$$M\nu(\alpha, t) \leqslant M\tilde{\nu}(\alpha, t) \leqslant \left(\frac{t}{\varepsilon} + 1\right) P\{\varrho_1'(\alpha) \geqslant \varepsilon\}^{-1}.$$

Используя тауберову теорему [3] и то, что нам известен явный вид преобразования Лапласа для функции распределения $\varrho_1'(\alpha)$, можно показать, что

$$P\{\varrho_k'(\alpha) \geqslant \varepsilon\} \sim \varepsilon^{-\frac{1}{2}} A_{13} \quad \text{при } \varepsilon \to \infty,\ A_{13} = \text{const} \in (0, \infty)$$

и для получения нужной оценки достаточно выбрать $\varepsilon = t$. Поэтому

$$R_1(\alpha, t, \varepsilon) \leqslant \frac{M|\lambda_1(a, \alpha)|}{\varepsilon \omega(\alpha, t)} A_{14} M\omega(\alpha, \zeta_t(\mu)).$$

Так как

$$\zeta_t(\mu) \leqslant \pi_c(a', t) - t$$

и, следовательно,

$$M\zeta_t(\mu) \leqslant A_{15}\omega(\alpha, t),$$

то окончательно

$$R_1(\alpha, t, \varepsilon) \leqslant A_{16}\varepsilon^{-1}\omega(\alpha, t)^{-\frac{1}{2}}$$

и нужно выбрать $\varepsilon = \omega(\alpha, t)^{-\frac{1}{4}}$. Аналогично получается оценка

$$R_2(\alpha, t, \varepsilon) \leqslant A_{17}\varepsilon^{-2}\omega(\alpha, t)^{-\frac{1}{2}},$$

и в этом случае нужно взять $\varepsilon = \omega(\alpha, t)^{-\frac{1}{6}}$. Теорема доказана

ЛИТЕРАТУРА

1. Сильвестров Д. С. Предельные теоремы для непрерывного блуждания на полупрямой, управляемого марковским процессом с двумя состояниями, в схеме серий. I. — Теория вероят. и матем. стат., 1, 1969.

2. Сильвестров Д. С. Предельные теоремы для дискретного случайного блуждания на полупрямой, управляемого цепью Маркова. II. (См. настоящий сборник).

3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. «Мир», М., 1967.

D. S. Silvestrov

THE LIMIT THEOREMS FOR THE CONTINUOUS RANDOM WALK ON THE HALF-LINE, WHICH IS CONTROLLED BY THE MARKOVIAN PROCESS WITH TWO STATES IN SCHEME OF SERIES. II

Summary

The speed of convergence for the function of distribution of the functional of integral kind of one continuous random walk on the half-line is estimated in the scheme of series.

Поступила в редакцию 1.IV 1969.