А. В. СКОРОХОД, чл.-корр. АН УССР
Институт математики АН УССР

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ФОРМУЛА ГРИНА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $(X, \mathfrak{A})$ — сепарабельное гильбертово пространство с σ-алгеброй борелевских множеств, μ — вероятностная мера на $\mathfrak{A}$. Рассмотрим гладкую поверхность S в X, т. е. поверхность, имеющую в каждой точке единственную касательную гиперплоскость с непрерывно меняющимся направлением нормали. Наша цель — построить на S меру, согласованную с μ точно таким образом, как в конечномерном пространстве согласуется площадь поверхности с лебеговым объемом. Построив поверхностный интеграл, мы установим формулу, связывающую интеграл по замкнутой поверхности с интегралом по множеству, ограниченному этой поверхностью, аналогичную формулам Грина и Гаусса — Остроградского в конечномерном случае.

Предположим сначала, что X конечномерно и мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега в X с непрерывной всюду положительной плотностью $f(x)$. Если dS лебегова мера на S, т. е. площадь поверхности, то естественно для всякого борелевского множества E на S положить

$$\mu_S(E) = \int_E f(x)\, dS. \tag{1}$$

Эта мера согласована с μ в том смысле, что

$$2\mu_S(E)\varepsilon = \mu(V_\varepsilon) + o(\varepsilon),$$

где V_ε — множество точек, расстояние от которых до E не превосходит расстояния до S, которое в свою очередь не более ε. Формулу (1) для тех E, которые взаимно однозначно проектируются на некоторую гиперплоскость Γ, можно записать еще так:

$$\mu_S(E) = \int_{P_\Gamma E} f(x + \varphi(x) n_\Gamma) \left| (n_\Gamma, n_S(x + \varphi(x) n_\Gamma)) \right|^{-1} dx,$$

где P_Γ — оператор проектирования на Γ, $x \in \Gamma$; $\varphi(x)$ таково, что $x + \varphi(x) n_\Gamma \in E$; n_Γ — нормаль к Γ; $n_S(y)$ — нормаль к S в точке y.

Введем на Г меру

$$\mu^{\Gamma}(\Lambda) = \mu(P_{\Gamma}^{-}\Lambda),$$

являющуюся проекцией μ на Г. Очевидно

$$\mu^{\Gamma}(\Lambda) = \int_{\Lambda}\left[\int f(x + tn_{\Gamma})\,dt\right]dx$$

$\left(\int . dx\right.$ — интеграл по лебеговой мере на $\left.\Gamma\right)$. Значит,

$$\mu_S(E) = \int_{P_\Gamma E} \frac{f(x + \varphi(x) n_\Gamma)}{|(n_\Gamma, n_S(x + \varphi(x) n_\Gamma))| \int f(x + tn_\Gamma)\,dt} \mu^{\Gamma}(dx). \qquad (2)$$

Обозначим $\frac{f(x-a)}{f(x)} = \varrho(a, x)$. Пусть μ_a — мера, получаемая из μ сдвигом на a,

$$\mu_a(G) = \mu(G - a),$$

где

$$G - a = \{x : x + a \in G\}.$$

Тогда

$$\varrho(a, x) = \frac{d\mu_a}{d\mu}(x).$$

Используя это обозначение, перепишем формулу (2) так:

$$\mu_S(E) = \int_{P_\Gamma E} \frac{\varrho(-\varphi(x) n_\Gamma, x)}{|(n_\Gamma, n_S(x + \varphi(x) n_\Gamma))| \int \varrho(tn_\Gamma, x)\,dt} \mu^{\Gamma}(dx). \qquad (3)$$

В таком виде формула может служить для определения меры на поверхности в гильбертовом пространстве.

Пусть мера μ на гильбертовом пространстве X обладает следующими свойствами: существует всюду плотное в X линейное многообразие L такое, что для всех $a \in L$ меры μ_a и μ эквивалентны, и функция

$$\varrho(a, x) = \frac{d\mu_a}{d\mu}(x)$$

такова, что $\varrho(a, x+b)$ почти для всех x непрерывно по a и b, если они меняются в произвольном конечномерном подпространстве многообразия L, и для всех $a \in L$ существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varrho(ta, x)\,dt.$$

Тогда можно с помощью формулы (3) определить $\mu_S(E)$ для тех E, для которых найдется гиперплоскость Γ, нормаль к которой n_Γ принадлежит L, и E взаимно однозначно проектируется на Γ. Можно убедиться, что выражение (3) не зависит от выбора Γ. Чтобы определить $\mu_S(E)$ для произвольного борелевского множества E из S, представим E в виде суммы попарно не пересекающихся множеств $E_k : E = \bigcup\limits_k E_k$ таких, что для каждого из них найдется гиперплоскость Γ_k с нормалью из L, на которую E_k проектируется взаимно однозначно. Положим теперь

$$\mu_S(E) = \sum_k \mu_S(E_k),$$

где E_k находим по формуле (3). $\mu_S(E)$, определяемые по формуле (3), не зависят от выбора Γ, следовательно, не зависят от выбора E_k, так как если

$$E = \bigcup_k E_k = \bigcup_j E'_j,$$

то

$$\sum_k \mu_S(E_k) = \sum_{k,j} \mu_S(E_k \cap E'_j) = \sum_j \mu_S(E'_j).$$

Определенная таким образом для всех борелевских множеств $E \subset S$ мера $\mu_S(E)$ является σ-конечной.

Пусть S замкнутая поверхность, служащая границей множества V. Предположим, что на V задана гладкая векторная функция $g(x)$ со значениями из X. Для лебеговой меры в конечномерном пространстве справедлива формула

$$\int_S (g(x), n_S(x))\, dS = \int_V \operatorname{div} g(x)\, dx,$$

где $\operatorname{div} g = \sum\limits_k \dfrac{\partial g_k}{\partial x_k}$, если g_k и x_k координаты g и x соответственно в некотором ортонормированном базисе.

Используем эту формулу для интегралов по мере μ в том же пространстве, если μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега с положительной непрерывно дифференцируемой плотностью $f(x)$:

$$\int_S (g(x), n_S(x))\, \mu_S(dx) = \int_S (f(x)\, g(x), n_S x))\, dS =$$

$$= \int_V \operatorname{div}(f(x)\, g(x))\, dx = \int_V [(\operatorname{grad} f, g) + f \operatorname{div} g]\, dx =$$

$$= \int_V \left[\left(\frac{\operatorname{grad} f}{f}, g\right) + \operatorname{div} g\right] \mu(dx).$$

Таким образом, при наших предположениях относительно f в конечномерном пространстве справедлива формула

$$\int_S (g(x), n_S(x))\, \mu_S(dx) = \int_V \left[\left(\frac{\operatorname{grad} f}{f}, g\right) + \operatorname{div} g\right] \mu(dx). \qquad (4)$$

Перенесем эту формулу на гильбертово пространство, заметив, что

$$\left(\frac{\operatorname{grad} f}{f}, g\right) = \frac{d}{dt} \frac{f(x+tg)}{f(x)}\Bigg|_{t=0} = -\frac{d}{dt}\, \varrho(tg, x)\Bigg|_{t=0}.$$

Кроме того, если $dg(x)$ линейный оператор, определяемый соотношением

$$dg(x)\, a = \frac{d}{dt}\, g(x+ta)\Bigg|_{t=0},$$

то

$$\operatorname{div} g(x) = \operatorname{Sp} dg(x),$$

где $\operatorname{Sp} A$ — след оператора A.

Пусть для всех $a \in L$ и почти всех x по мере μ существует

$$\frac{d}{dt}\, \varrho(ta, x)\Bigg|_{t=0} = h(x, a)$$

и $g(x) \in L$ для всех x. Тогда формулу (4) можно переписать так:

$$\int_S (g(x), n_S(x))\, \mu_S(dx) = \int_V [\operatorname{Sp} dg(x) - h(x, g(x))]\, \mu(dx). \qquad (5)$$

Эта формула справедлива, если, кроме перечисленных, выполняются следующие условия:

1) величина $\operatorname{Sp} dg(x)$ конечна;

2) существует такой ортонормированный базис $\{e_k\} \in L$, что

$$h(x, g(x)) = \lim_{n\to\infty} h(x, P_n g(x)),$$

где P_n — оператор проектирования на подпространство, натянутое на $e_1, \ldots, e_n$;

3) выражение $|\operatorname{div} P_n g(x)| + |h(x, P_n g(x))|$ равномерно относительно n интегрируемо на V, а $|(g(x), P_n n_S(x))|$ — на S.

A. V. Skorokhod

SURFACE INTEGRAL AND GREEN'S FORMULA IN HILBERT SPACE

Summary

A surface integral connected with some measure on Hilbert space is determined. The formula expressing the integral on the volume with surface integral on its boundary is obtained.

Поступила в редакцию 28.IV 1969.