П. В. СЛЮСАРЧУК, асп.
Ужгородский университет

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ К НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с функциями распределения соответственно $F_1(x), \ldots, F_n(x), \ldots$, характеристическими функциями $f_1(t), \ldots, f_n(t), \ldots$, математическими ожиданиями нуль и дисперсиями $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2, \ldots$. Пусть

$$B_n^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2,$$

$$\Phi_n(x) = P\left\{\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{B_n} < x\right\},$$

$$\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\Phi_n(x) = \prod_{k=1}^{n} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right),$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Как известно, любая функция распределения $F_k(x)$ представима в виде

$$F_k(x) = \alpha_k G_k(x) + (1 - \alpha_k)\overline{G}_k(x), \qquad 0 \leqslant \alpha_k \leqslant 1,$$

где G_k — абсолютно непрерывная компонента.

Будем предполагать, что производная G_k' имеет ограниченную полную вариацию v_k на всей прямой $(-\infty, \infty)$ и выполняются условия Крамера ([2], стр. 105):

$$\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1 + v_k^2} \to \infty,$$

$$\frac{1}{\log n}\frac{T_{kn}^2}{B_n^2}\sum_{r=1}^{n}\frac{\alpha_r}{1+v_r^2}\to\infty\,(n\to\infty), \tag{1}$$

где T_{kn}/B_n определяется при доказательстве теорем.

Лемма. Для $|t|>\dfrac{T_{kn}}{B_n}$

$$\prod_{k=1}^{n}|f_k(t)|\leqslant\exp\left\{-\frac{1}{64}\min\left(1,\frac{T_{kn}^2}{B_n^2}\right)\sum_{r=1}^{n}\frac{\alpha_r}{1+v_r^2}\right\}. \tag{2}$$

Оценка (2) дается у Крамера. Из (2) вытекает, что при условии (1) $\prod\limits_{k=1}^{n}|f_k(t)|=o(n^{-A})$, где $A>0$ любое число.

Теорема 1. Если случайные величины ξ_i имеют конечные моменты до q-го порядка ($q\geqslant 3$) включительно и удовлетворяют условиям Крамера (1), то

$$\sup_x|\Phi_n(x)-\Phi(x)|=O\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=3}^{q}\frac{|\delta_k^{(i)}|}{B_n^k}+\frac{1}{B_n^q}\cdot\frac{1}{B_n}\int_0^{B_n}L_n^{(q)}(x)\,dx\right), \tag{3}$$

где

$$\delta_k^{(i)}=\int_{-\infty}^{\infty}x^k d\Psi_i(x),$$

$$\Psi_i(x)=F_i(x)-\Phi\left(\frac{x}{\sigma_i}\right),$$

$$L_n^{(q)}(x)=\sum_{i=1}^{n}\int_{|z|>x}|z|^q\,dv_i(z),$$

$$V_i(x)=\mathrm{var}_{-\infty}^{x}\Psi_i(x).$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1, случайные величины ξ_i имеют плотность $p_i(x)$, при этом

$$p_i(x)\leqslant M<\infty\qquad(i=1,2). \tag{4}$$

Тогда

$$\sup_x|P_n(x)-\varphi(x)|=O\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=3}^{q}\frac{|\delta_k^{(i)}|}{B_n^k}+\frac{1}{B_n^q}\,\frac{1}{B_n}\int_0^{B_n}\overline{L}_n^{(q)}(x)\,dx\right), \tag{5}$$

где $P_n(x)$ — плотность случайной величины $\dfrac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{B_n}$,

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$\delta_k^{(i)}=\int_{-\infty}^{\infty}x^k u_i(x)\,dx,$$

$$u_i(x)=p_i(x)-\frac{1}{\sigma_i}\varphi\left(\frac{x}{\sigma_i}\right),$$

$$\overline{L}_n^{(q)}(x)=\sum_{i=1}^{n}\int_{|z|>x}|z|^q|u_i(z)|\,dz.$$

Следствие 1. Если выполняются условия теоремы 1 и для $3\leqslant k\leqslant k'\leqslant q$ $\delta_k^{(i)}=0$, то

$$\sup_x|\Phi_n(x)-\Phi(x)|=O\left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=k'}^{q}\frac{|\delta_k^{(i)}|}{B_n^k}+\frac{1}{B_n^q}\frac{1}{B_n}\int_0^{B_n}\overline{L}_n^{(q)}(x)\,dx\right).$$

Следствие 2. Пусть выполняются условия теоремы 2 и для $3\leqslant k\leqslant k'\leqslant q$ $\overline{\delta}_k^{(i)}=0$, тогда

$$\sup_x|P_n(x)-\varphi(x)|=O\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=k'}^{q}\frac{|\overline{\delta}_k^{(i)}|}{B_n^k}+\frac{1}{B_n^q}\frac{1}{B_n}\int_0^{B_n}\overline{L}_n^{(q)}(x)\,dx\right).$$

Докажем теорему 1.

Очевидно, что для $|t|\leqslant\dfrac{B_n}{2\overline{\sigma}_n}$ $(\overline{\sigma}_n=\max\{\sigma_1,\ldots,\sigma_n\})$ имеет место неравенство

$$|\varphi_n(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}|\leqslant e^{-\frac{t^2}{2}+|\gamma_n|}|\gamma_n|,$$

где

$$\gamma_n=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\widetilde{\gamma}_{nk}),$$

$$\widetilde{\gamma}_{nk}=e^{\frac{t^2\sigma_k^2}{2B_n^2}}\gamma_{nk},$$

$$\gamma_{nk}=f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)-e^{-\frac{t^2\sigma_k^2}{2B_n^2}}.$$

Учитывая, что в рассматриваемсм промежутке $|\widetilde{\gamma}_{nk}| \leqslant \frac{1}{2}$, легко можем получить

$$|\gamma_n| \leqslant 4\sum_{k=1}^{n} |\gamma_{nk}|.$$

Пусть

$$T_n' = \min\left\{\frac{B_n}{2\overline{\sigma}_n},\ \frac{3B_n^3}{8\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|^3 dV_k(x)}\right\}.$$

Тогда для $|t| \leqslant T_n'$

$$e^{-\frac{t^2}{2}+|\gamma_n|} \leqslant e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

Оценим $|\gamma_{nk}|$ следующим образом:

$$|\gamma_{nk}| = \left|f_k\left(\frac{t}{B_n}\right) - e^{-\frac{t^2\sigma_k^2}{2B_n^2}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{\frac{itx}{B_n}} - \sum_{s=0}^{q}\frac{(itx)^s}{s!\,B_n^s}\right)d\Psi_k(x)\right| + \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{s=3}^{q}{}'\frac{(itx)^s}{s!\,B_n^s}\,d\Psi_k(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=3}^{q}{}'\frac{|t|^s\,|\delta_s^{(k)}|}{s!\,B_n^s} + \frac{|t|^{q+1}}{(q+1)!\,B_n^{q+1}}\int\limits_{|x|\leqslant B_n}|x|^{q+1}dV_k(x) +$$

$$+\frac{|t|^q}{q!\,B_n^q}\int\limits_{|x|>B_n}|x|^q dV_k(x).$$

Из выше сказанного следует, что в промежутке $|t| \leqslant T_n'$

$$|\varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}| \leqslant 4e^{-\frac{t^2}{4}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{|t|^{q+1}}{(q+1)!\,B_n^{q+1}}\int\limits_{|x|\leqslant B_n}|x|^{q+1}dV_k(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{|t|^q}{q!\,B_n^q}\int\limits_{|x|>B_n}|x|^q dV_k(x) + \sum_{s=3}^{q}\frac{|t|^s\,|\delta_s^{(k)}|}{s!\,B_n^s}\right). \tag{6}$$

В известной теореме Эссена положим

$$F(x)=\Phi_n(x),\qquad G(x)=\Phi(x),\qquad A=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

$$T=T_n=\left(\frac{1}{B_n^{q+1}}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|\leqslant B_n}|x|^{q+1}dV_k(x)\right)^{-1},$$

а величину

$$\varepsilon=\int\limits_{-T_n}^{T_n}\left|\frac{\varphi_n(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}}{t}\right|dt.$$

Область интегрирования разобьем на части $|t|\leqslant T_n'$ и $T_n'<|t|\leqslant\leqslant T_n$, тогда

$$\varepsilon\leqslant\int\limits_{|t|\leqslant T_n'}\left|\frac{\varphi_n(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}}{t}\right|dt+\int\limits_{T_n'<|t|<T_n}\left|\frac{\varphi_n(t)}{t}\right|dt+$$

$$+\int\limits_{T_n'<|t|\leqslant T_n}e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dt}{|t|}.$$

Учитывая (6), лемму при $T_{kn}/B_n=T_n'/B_n$ и равенство

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{B_n^{q+1}}\int\limits_{|x|\leqslant B_n}|x|^{q+1}dV_k(x)+\frac{1}{B_n^q}\int\limits_{|x|>B_n}|x|^q dV_k(x)\right]=$$

$$=\frac{1}{B_n^q}\frac{1}{B_n}\int\limits_{0}^{B_n}L_n^{(q)}(x)\,dx,$$

получим (3).

Переходим к доказательству теоремы 2. Дла этого случая при

$$|t|\leqslant T_n''=\min\left\{\frac{B_n}{2\bar{\sigma}_n},\ \frac{3B_n^3}{8\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|^3|u_k(x)|\,dx}\right\}$$

имеет место неравенство

$$|\varphi_n(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}|\leqslant 4e^{-\frac{t^2}{4}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{|t|^{q+1}}{(q+1)!\,B_n^{q+1}}\int\limits_{|x|\leqslant B_n}|x|^{q+1}|u_k(x)|\,dx+\right.$$

$$+\frac{|t|^q}{q!\,B_n^q}\int\limits_{|x|>B_n}|x|^q\,|u_k(x)|\,dx+\sum_{s=3}^{q}\frac{|t|^s\,|\bar{\delta}_s^{(k)}|}{s!\,B_n^s}\Bigg),$$

аналогичное неравенству (6). Очевидно,

$$\sup_x|P_n(x)-\varphi(x)|\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi_n(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}|\,dt.$$

Правую часть предыдущего неравенства перепишем следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi_n(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}|\,dt\leqslant\int\limits_{|t|\leqslant T_n''}|\varphi_n(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}|\,dt+\int\limits_{|t|>T_n''}|\varphi_n(t)|\,dt+$$

$$+\int\limits_{|t|>T_n''}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=I_1+I_2+I_3.$$

Очевидно, $I_3=o(n^{-A})$, где $A>0$ — любое число. Учитывая равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{B_n^{q+1}}\int\limits_{|x|\leqslant B_n}|x|^{q+1}\,|u_i(x)|\,dx+\frac{1}{B_n^q}\int\limits_{|x|>B_n}|x|^q\,|u_i(x)|\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{B_n^q}\cdot\frac{1}{B_n}\int\limits_0^{B_n}\bar{L}_n^{(q)}(x)\,dx,$$

для I_1 легко получить оценку

$$I_1=O\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=3}^{q}\frac{|\bar{\delta}_k^{(i)}|}{B_n^k}+\frac{1}{B_n^q}\frac{1}{B_n}\int\limits_0^{B_n}\bar{L}_n^{(q)}(x)\,dx\right).$$

Положим в лемме $T_{kn}/B_n=T_n''/B_n$, тогда при выполнении условия (4) получим

$$I_2=B_n\int\limits_{|t|>T''/B_n}\prod_{k=1}^{n}|f_k(t)|\,dt\leqslant B_n\exp\left\{-\frac{1}{64}\min\left(1,\frac{T_{kn}^2}{B_n^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{r=1}^{n}\frac{\alpha_r}{1+v_r^2}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{64}\min\left(1,\frac{T_{kn}^2}{s_n^2}\right)\sum_{r=1}^{2}\frac{\alpha_r}{1+v_r^2}\right\}\times$$

$$\times \int\limits_{|t|>T_n''/B_n} |f_1(t)||f_2(t)|\,dt \leqslant 2B_n \exp\left\{-\frac{1}{64}\min\left(1, \frac{T_{kn}^2}{s_n^2}\right)\sum_{r=1}^{n}\frac{\alpha_r}{1+v_r^2}\right\} \times$$

$$\times\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f_1(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f_2(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2MB_n \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{64}\min\left(1, \frac{T_{kn}^2}{s_n^2}\right)\sum_{r=1}^{n}\frac{\alpha_r}{1+v_r^2}\right\} = O(n^{-A}),$$

где $A > 0$ — любое число.

Из этих оценок и следует (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Студнев Ю. П. Об одной форме оценки скорости сходимости к нормальному закону.— Укр. мат. журнал, **20**, № 2, 1968.
2. Крамер Г. Случайные величины и распределение вероятностей. М., ИЛ, 1947.
3. Esseen C. G. Fourier of analysis distribution functions.— Acta Math., 77, 1945.

P. V. Slyusarchuk

SOME ESTIMATIONS OF CONVERGENCE RATE TO NORMAL LAW

Summary

Let $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ be sequence of independent random variables and $M\xi_i = 0$, $D\xi_i = \sigma_i^2$, $F_i(x)$ be their distribution functions, $f_i(t)$ be their characteristic functions.

Theorem 1. If random variables ξ_i have finite moments to order q ($q \gg 3$) and satisfy the well-known Cramer's conditions, then

$$\sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| = O\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=3}^{q}\frac{|\delta_k^{(i)}|}{B_n^k} + \frac{1}{B_n^q}\frac{1}{B_n}\int\limits_0^{B_n} L_n^{(q)}(x)\,dx\right),$$

where

$$\delta_k^{(i)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k d\Psi_i(x), \qquad \Psi_i(x) = F_i(x) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma_i}\right),$$

$$L_n^{(q)}(x) = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{|L|>x}|L|^q dv_i(L), \qquad v_i(x) = \mathrm{var}_{-\infty}^{x}\Psi_i(x).$$

Theorem 2 gives the similar estimation for convergence rate of densities of sums to Gaussian density.

Поступила в редакцию 25.III 1969.