Ю. П. СТУДНЕВ, доц.
Ужгородский университет

ТЕОРИЯ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ В КЛАССЕ *B*. I

Применение к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

которое мы должны решать, например, при условии

$$u(x, 0)=\delta(x), \tag{2}$$

двух различных конечноразностных схем приводит к двум различным уравнениям в конечных разностях, например, таким:

$$u(x, t+\Delta t)=\frac{1}{2} u(x-\Delta x, t)+\frac{1}{2} u(x+\Delta x, t), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} u(x, t+\Delta t)= & -\frac{1}{4} u(x-2\Delta x, t)+\frac{3}{4} u(x-\Delta x, t)+ \\ & +\frac{3}{4} u(x+\Delta x, t)-\frac{1}{4} u(x-r\Delta x, t). \end{aligned} \tag{4}$$

Причем начальное условие (2) трансформируется в условие

$$u(0, 0)=1, \quad u(x, 0)=0 \quad (x \neq 0). \tag{5}$$

Обратим внимание на то, что коэффициенты в правых частях уравнений (3) и (4) образуют две конечные последовательности

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \tag{6}$$

$$\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right). \tag{7}$$

В связи с тем, что сумма членов этих последовательностей равна единице, мы назовем последовательность (6) вероятностной структурой, соответствующей задаче (3)—(5), а последовательность (7), содержащую отрицательные члены, квазивероятностной структурой, соответствующей задаче (4)—(5).

Как известно, при применении конечноразностных схем основным является вопрос об их устойчивости. Этот вопрос в применении к задаче (3)—(5) решается в положительном смысле редукцией к вероятностной схеме — схеме неограниченного блуждания, начинающегося в нуле, когда блуждающая частица в моменты времени, кратные Δt, испытывает толчки на Δx вправо или влево с одинаковой вероятностью, равной половине. При этом применяется локальная предельная теорема. Но схема, соответствующая задаче (4)—(5), уже не может быть исследована на устойчивость с помощью классических вероятностных методов, поскольку попытка истолковать уравнение (4) как формулу полной вероятности невозможна без признания того, что в некоторые точки блуждающая частица может попадать с отрицательной вероятностью. Этот элементарный пример показывает, что в теории дифференциальных уравнений параболического типа могут возникнуть проблемы, неразрешимые классическими вероятностными методами.

Возникает вопрос: нельзя ли вероятностные методы определенным образом дополнить, привлекая отрицательные вероятности, для исследований уже квазивероятностного типа в более широких областях теории дифференциальных уравнений с частными производными. Идея рассматривать квазивероятностные объекты в различных задачах не нова [1—5]. В настоящей работе развивается теория, аналогичная разделу теории вероятностей, изучающему свойства безгранично делимых законов.

Функции распределения на прямой. В рамках предлагаемой теории функциями распределения мы будем называть более общие объекты, чем классические функции распределения.

Определение 1. Вещественную функцию $V(x)$, определенную на $(-\infty, \infty)$, назовем функцией распределения, или функцией, принадлежащей классу B, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$V(-\infty) = 0, \quad V(\infty) = 1,$$

$$\operatorname{var}_{-\infty}^{\infty} V = \int |dV(x)| < \infty.$$

Не ограничивая общности, наши функции распределения можно считать непрерывными слева.

Конечно, можно было бы поступить более последовательно, предпослав нашей теории аксиоматическое начало, построенное на базе квазимер, т. е. функций множеств произвольного знака, обладающих счетной аддитивностью (такие функции часто называют зарядами), но в силу малосодержательности возникающей при этом теории мы ограничимся лишь следующим замечанием.

Каждая функция $V(x) \in B$ индуцирует на прямой $\Omega = (-\infty, \infty)$ с заданной на ней σ-алгеброй борелевских множеств $\mathfrak{S}$ с помощью интеграла Лебега—Стильтьеса вполне аддитивную функцию множеств

$$P(A) = \int_{A \in \mathfrak{S}} dV(x),$$

которая наряду с очевидным свойством $P(\Omega) = 1$ обладает еще свойством полноты. Возникающая тройка $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ называется квазивероятностным пространством и является объектом, вполне аналогичным понятию «вероятностное пространство». Этот объект может служить носителем аксиоматики, которая лишь в некоторых чертах отличается от аксиоматики теории вероятностей. В такой аксиоматике случайные величины возникают, как борелевские функции. Совершенно аналогично определяются такие понятия, как независимость случайных величин, функция распределения и др.

Будем считать такие понятия, как плотность (хотя она может принимать и отрицательные значения), моменты, семиинварианты и многие другие, известными. В частности, для «гомологичных» объектов будем использовать названия «математическое ожидание», «дисперсия». Для нас будет существенным следующее замечание.

Момент r-го порядка считается существующим, если

$$\int |x|^r \, |dV(x)| < \infty,$$

при этом учитывается, что моменты четного порядка могут принимать значения произвольного знака. В частности, дисперсия может оказаться отрицательной или равной нулю.

Отметим также, что мы будем избегать названия «характеристическая функция» для преобразования Фурье—Стильтьеса (п. ф. с.)

$$w(t) = \int e^{itx} dV(x) \quad (V(x) \in B)$$

ввиду специальных свойств характеристических функций (эрмитовость).

Приведем хорошо известные или совершенно просто получаемые свойства функций распределения (ф. р.) и их п. ф. с.

1. Каждая ф. р. $V(x)$ может быть разложена по формуле

$$V(x) = a_1 F_1(x) - a_2 F_2(x) \quad (a_1 - a_2 = 1),$$

где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — классические функции распределения. Причем всегда можно полагать $a_1 F_1(x) = \mathrm{var}_{-\infty}^{x} V$.

2. $V(x) \in B$ может иметь лишь счетное множество точек разрыва первого рода.

3. П. ф. с. $w(t)$ функции распределения $V(x)$ равномерно непрерывна на $(-\infty, \infty)$,

$$w(0) = 1,$$

$$|w(t)| \leqslant \mathrm{var}_{-\infty}^{\infty} V.$$

4. Если последовательность ф. р. $\{V_n(x)\}$ равномерно ограничена по вариации ($\mathrm{var}_{-\infty}^{\infty} V_n \leqslant C$, где C не зависит от n), то из нее можно извлечь подпоследовательность $\{V_{n_k}(x)\}$, сходящуюся к некоторой ф. р. $V(x)$ в каждой точке непрерывности последней.

5. Для каждых двух точек непрерывности x_1 и x_2 функции $V(x)$ имеет место формула

$$V(x_2) - V(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} w(t)\, dt, \tag{8}$$

которая единственным образом определяет $V(x)$ по ее п. ф. с.

6. Если $V(x)$ имеет плотность $p(x)$, то при $w(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ справедлива формула обращения

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} w(t)\, dt.$$

7. Для того чтобы последовательность ф. р. $\{V_n(x)\}$, ограниченная по вариации, сходилась к предельной функции распределения $V(x)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность соответствующих п. ф. с. $\{w_n(t)\}$ сходилась к п. ф. с. предельного закона $w(t)$, причем равномерно в каждом конечном промежутке.

8. Если функция $f(x)$ ограничена и не меняет знака на $(-\infty, \infty)$, $G(x)$ — функция ограниченной вариации на $(-\infty, \infty)$, то при условии существования при любом u интеграла

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{u} f(x)\, dG(x)$$

функция $G(x)$ однозначно определяется по функции $\varphi(u)$.

Заметим, что, несмотря на сложность формулируемых выше предложений, они являются тривиальными следствиями известных теорем о свойствах монотонных функций и свойства 1 немонотонных функций ограниченной вариации.

Введение квазивероятностных зон. Характер предлагаемой теории предполагает следующее разбиение класса B (множества всех функций распределения) на подклассы, которые называются зонами.

Определение 2. Функцию распределения $V(x)$ назовем принадлежащей квазивероятностной 1-зоне, если: либо она имеет конечную, отличную от нуля, дисперсию, либо дисперсия бесконечна; и принадлежащей квазивероятностной q-зоне, если: либо четный центральный момент порядка $2q$ $(q>1)$ конечен и отличен от нуля, а все четные центральные моменты низшего порядка равны нулю, либо центральный момент порядка $2q$ бесконечен, но все четные центральные моменты низшего порядка существуют и равны нулю.

Единичный закон, выпадающий из классификации, предлагаемой определением 2, будем считать принадлежащим всем зонам. Если его игнорировать, то определение 2 вводит счетное множество попарно непересекающихся зон, из которых только первую можно рассматривать в качестве «концентрического» расширения множества всех вероятностных законов распределения.

Схема суммирования независимых случайных величин. Сумме независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 с ф. р. $V_{\xi_1}(x)$ и $V_{\xi_2}(x)$ соответствует свертка

$$V_{\xi_1+\xi_2}(x)=V_{\xi_1}*V_{\xi_2}=\int V_{\xi_1}(x-z)\,dV(z),$$

представляющая операцию, замкнутую относительно класса B. Свертка обобщается на случай любого конечного количества функций. Другие свойства сверток предполагаются известными.

Не будем останавливаться на таких понятиях, как «последовательность серий», «схема нарастающих сумм» — они вполне аналогичны классическим. Рассмотрим только некоторые особенности схемы суммирования, связанные с немонотонностью функций распределения.

Оказывается, что функции распределения возрастающего количества независимых слагаемых могут в определенных случаях неограниченно расти по вариации. Это всегда случается, например, в схеме нарастающих сумм одинаково распределенных слагаемых, когда п. ф. с. в некоторых точках превышает по модулю единицу (случай этот более подробно рассмотрен в [5]). В таких условиях мы не можем пользоваться аналогами известных предельных теорем (свойства 4 и 7 $V(x)$). В связи с этим особый вес приобретают случаи, в которых п. ф. с. компонент или сверток ограничены по модулю единицей или же равномерно ограничены.

В определении 2 ничего не сказано о центральных моментах нечетного порядка, которые могут быть отличными от нуля, в то время как многие моменты четного порядка равны нулю. Тем не менее часто удобно принимать их равными нулю, имея в виду возможность операции, аналогичной центровке.

Известно, что операция центровки в терминах п. ф. с. определяется как умножение на характеристическую функцию единичного закона $e^{-(it)a}$ (центровка с помощью числа a). Этим, в частности, достигается обращение в нуль математического ожидания у центрированной случайной величины. Если же в квазивероятностной q-зоне функция распределения $V(x)$ имеет отличный от нуля момент порядка $2q-1$, равный a, то умножение ее п. ф. с. на функцию

$$\exp \frac{(it)^{2q-1}}{(2q-1)!} a \tag{9}$$

приводит к тому, что у возникшего распределения этот момент оказывается равным нулю. Такая операция выглядит искусственной хотя бы потому, что умножение на функцию вида (9) искажает тип закона, но в ряде случаев наличие компоненты с п. ф. с. такого вида относится к органическим свойствам рассматриваемого распределения. Как выяснится в дальнейшем, функции с п. ф. с. вида (9), не являющиеся, кстати, функциями распределения (они все при $q>1$ имеют бесконечную вариацию), играют роль «единичного закона» квазивероятностной q-зоны.

Безгранично делимые в широком смысле законы. *Определение 3.* Случайная величина ξ и ее функция распределения $V(x)$ называются безгранично делимыми в широком смысле, если при любом натуральном n она может быть представлена в виде суммы

$$\xi = \xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \ldots + \xi_n^{(n)}$$

взаимно независимых одинаково распределенных случайных величин с ф. р. $V_n(x)$, удовлетворяющей условию

$$\operatorname{var}_{-\infty}^{\infty} V_n(x) < C, \tag{10}$$

где C — независимая от n постоянная.

Вот некоторые свойства безгранично делимых в широком смысле законов.

Теорема 1. П. ф. с. безгранично делимого в широком смысле закона нигде не обращается в нуль.

Теорема 2. Сумма любого конечного количества безгранично делимых в широком смысле взаимно независимых случайных величин есть безгранично делимая в широком смысле случайная величина.

Теорема 3. Если последовательность безгранично делимых в широком смысле ф. р. $\{V_{(x)}^{(k)}\}$ сходится к функции распределения $V(x)$ в каждой точке непрерывности последней и существует постоянная C такая, что при любых натуральных n и k

$$\operatorname{var}_{-\infty}^{\infty} V_n^{(k)} < C,$$

где $V_n^{(k)}(x)$ — компонента функции $V^{(k)}(x)$, соответствующая определению 3, то ф. р. $V(x)$ безгранично делима в широком смысле.

Из этих теорем докажем только первую, так как здесь приходится применять несколько иной, хотя и элементарный, метод, чем в соответствующем вероятностном аналоге.

Доказательство теоремы 1. Пусть п. ф. с. $w(t)$ безгранично делимой в широком смысле ф. р. $V(x)$ имеет непустое множество нулей N, расположенных справа от начала координат. В силу свойства 3 множество N замкнуто и, следовательно, $x_0 = \inf N$ — нуль, причем $|w(t)| > 0$, когда $t \in [0, t_0)$. Если ф. р. $V(x)$ сопоставить ф. р. $V_n(x)$ в соответствии с определением 3, то очевидно, что $\{w_n(t)\}^n = w(t)$, где $w_n(t)$ — п. ф. с. ф. р. $V_n(x)$. Легко видеть, что $|w_n(t)| \underset{n\to\infty}{\to} 1$, когда $t \in [0, t_0)$ и $|w_n(t_0)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Очевидно, этим свойством обладает и любая подпоследовательность последовательности $\{w_n(t)\}$. Но в силу (10) должна существовать подпоследовательность $\{V_{n_k}(x)\}$, сходящаяся к некоторой функции распределения с непрерывным п. ф. с., что, конечно, противоречит полученному результату. Теорема 1 доказана.

В соответствии с предложенной выше классификацией функций распределения и в связи с определенными функциональными трудностями нам в следующем пункте придется провести определенное сужение класса безгранично делимых в широком смысле законов.

Безгранично делимые в узком смысле законы. *Определение 4*. Безгранично делимую в широком смысле ф. р. $V(x)$, принадлежащую квазивероятностной q-зоне, назовем безгранично делимой в узком смысле, если при любом n она (дополнительно к условию (10)) удовлетворяет условию

$$n \int \frac{x^{2q}}{1 + x^{2q}} |dV_n(x)| < C_1, \tag{11}$$

а в случае существования конечного момента порядка $2q$ — условию

$$n \int x^{2q} |dV_n(x)| < C_2. \tag{12}$$

Здесь C_1, C_2 — независящие от n постоянные.

Теорема 4. Если ф. р. $V(x)$, принадлежащая квазивероятностной q-зоне, безгранично делима в узком смысле, то логарифм п. ф. с. ее представим в виде

$$\log w(t) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!} \gamma_{2k+1} + \int \left(e^{itx} - \left(\sum_{k=0}^{2q-1} \frac{(itx)^k}{k!} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{(itx)^{2q-1}}{(2q-1)!\,(1+x^{2q})} \right)\right) \frac{1+x^{2q}}{x^{2q}}\, dG(x), \qquad (13)$$

где γ_{2k+1} — некоторые вещественные постоянные, $G(x)$ — функция ограниченной вариации на $(-\infty, \infty)$, а подынтегральная функция удовлетворяет условию

$$\left[\left\{ e^{itx} - \sum_{k=0}^{2(q-1)} \frac{(itx)^k}{k!} - \frac{(itx)^{2q-1}}{(2q-1)!\,(1+x^{2q})} \right\} \frac{1+x^{2q}}{x^{2q}} \right]_{x=0} =$$

$$= (-1)^q \frac{t^{2q}}{(2q)!}.$$

Представление (13) единственно.

Теорема 5. Если ф. р. $V(x)$, принадлежащая квазивероятностной q-зоне, являясь безгранично делимой в узком смысле, удовлетворяет условию (12), то логарифм п. ф. с. этой функции представим в виде

$$\log w(t) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!} \gamma_{2k+1} + \int \left(e^{itx} - \sum_{k=0}^{2q-1} \frac{(itx)^k}{k!} \right) \times$$

$$\times \frac{1}{x^{2q}}\, dG(x), \qquad (14)$$

где γ_{2k+1}, $G_n(x)$ и подынтегральная функция имеют те же свойства, что и в теореме 4.

Мы докажем только теорему 4 отметив, что теорема 5 является ее особым случаем. Пусть $V(x)$ — безгранично делима в узком смысле. При любом натуральном n имеем $w(t) = [w_n(t)]^n$, где $w_n(t)$ — п. ф. с. ф. р. $V_n(x)$, удовлетворяющей условию (11). Очевидно, что равенства

$$\log w(t) = n \log w_n(t)$$

и

$$w_n(t) = \sqrt[n]{w(t)}$$

приводят нас к справедливости соотношения

$$\lim_{n\to\infty} n\,[w_n(t) - 1] = \lim_{n\to\infty} \int (e^{itx} - 1)\, dV_n(x) = \log w(t),$$

выполняющемуся равномерно в каждом конечном промежутке. Вводя обозначение

$$G_n(x) = n \int_{-\infty}^{x} \frac{u^{2q}}{1+u^{2q}}\, dV_n(x),$$

записываем

$$n \int (e^{itx} - 1)\, dV_n(x) = \sum_{k=0}^{q-2} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!} a_{2k+1} +$$

$$+ \int \left(e^{itx} - \sum_{k=0}^{2(q-1)} \frac{(itx)^k}{k!} \right) \frac{1+x^{2q}}{x^{2q}}\, dG_n(x),$$

где $a_{2k+1} = \int x^{2k+1} dV(x)$.

В силу условия (10) $G_n(x)$ имеют ограниченные в совокупности полные вариации и, следовательно, существует подпоследовательность $\{G_{n_k}(x)\}$, сходящаяся к некоторой функции ограниченной вариации $G(x)$ в каждой ее точке непрерывности. Положив

$$\gamma_{n_k} = \int \frac{dG_{n_k}(x)}{x} = n_k \int \frac{x^{2q-1}}{1+x^{2q}}\, dV_{n_k}(x),$$

мы можем переписать предельные соотношения (14) так:

$$\log \omega(t) = \sum_{k=0}^{q-2} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!} a_{2k+1} + \lim_{p\to\infty} \int \left(e^{itx} - \sum_{k=0}^{2(q-1)} \frac{(itx)^k}{k!} \right) \times$$

$$\times \frac{1+x^{2q}}{x^{2q}}\, dG_{n_k}(x) = \sum_{k=0}^{q-2} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!} a_{2k+1} + \lim_{k\to\infty} \left\{ \int \left(e^{itx} - \right.\right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{2(q-1)} \frac{(itx)^k}{k!} - \frac{(itx)^{2q-1}}{(2q-1)!\,(1+x^{2q})} \right) \times$$

$$\left. \times \frac{1+x^{2q}}{x^{2q}}\, dG_{n_k}(x) + \frac{(it)^{2q-1}}{(2q-1)!} \gamma_{n_k} \right\}.$$

Как нетрудно показать, интеграл, стоящий под знаком предела, сходится к интегралу

$$\int \left(e^{itx} - \sum_{k=0}^{2(q-1)} \frac{(itx)^k}{k!} - \frac{(itx)^{2q-1}}{(2q-1)!\,(1+x^{2q})} \right) \frac{1+x^{2q}}{x^{2q}}\, dG(x).$$

Поскольку последовательность $\{\gamma_{n_k}\}$ при $k \to \infty$ тоже сходится к некоторому пределу, который мы обозначим γ_{2q-1}, справедливость представления логарифма п. ф. с. функции распределения $V(x)$ по формуле (13) теперь очевидна. Доказательство единственности (13) представления $\log w(t)$ опустим, поскольку она доказывается теми же методами, что и ее вероятностный аналог. При этом применяются свойства 5 и 7.

ЛИТЕРАТУРА

1. Студнев Ю. П. О сходимости к нормальному закону. Диссертация, 1953.
2. Студнев Ю. П. О свертках функций ограниченной вариации.— Докл. и сообщ. УжГУ, 1958.
3. Жуков А. И. Предельная теорема для разностных операторов.— Успехи матем. наук, **14**, 3, 1959.
4. Крылов В. Ю. Об одной предельной теореме.— ДАН СССР, **139**, 1, 1961.
5. Студнев Ю. П. О некоторых обобщениях предельных теорем теории вероятностей.— Теория вероятн. и ее примен., **12**, вып. 4, 1967.

Yu. P. Studnev

THEORY OF THE INFINITELY DIVISIBLE LAWS IN THE CLASS B. I.

Summary

This paper deals with the properties of the functions which have a bounded variation on the line, satisfying the following conditions $v(-\infty)=0$, $v(+\infty)=1$. These fundamental results of the paper are the generalization of the formulae of P. Levy and A. Kolmogorov.

Поступила в редакцию 25.III 1969.