Г. Н. СЫТАЯ, мл. научн. сотр.
Институт математики АН УССР

О ПЛОТНОСТИ ВЗВЕШЕННЫХ ГАУССОВЫХ МЕР ПРИ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ СДВИГАХ

Пусть в измеримом гильбертовом пространстве $(H, \mathfrak{B})$ заданы зависящие от m-мерного числового параметра $u = (u_1, \ldots, u_m)$, $u_i > 0$, гауссовы меры $\mu\left(\sum_1^m u_i A_i, dx\right)$, которые будем обозначать также символом $\mu_u(dx)$, с характеристическими функционалами $\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_1^m u_i (A_i z, z)\right\}$ и их взвешенные суммы

$$\mu(dx) = \int_{E_m^+} \mu_u(dx)\, s(du),\ E_m^+ = (0, \infty)^{\times(m)}. \tag{1}$$

Как показано в [2], множество допустимых сдвигов меры $\mu(dx)$, т. е. таких, при которых сдвинутая мера абсолютно непрерывна относительно исходной, совпадает с $\left(\sum_1^m A_i\right)^{1/2} H$. В случае $m = 1$ в [2] найдена также формула плотности $\mu^{(a)}(dx)$ — сдвинутой на вектор a меры $\mu(dx)$ — относительно $\mu(dx)$. При выводе этой формулы использовано то обстоятельство, что при различных u меры $\mu(uA, dx)$ сосредоточены на непересекающихся между собой $\mathfrak{B}$-измеримых множествах $X_u \subset H$, плотность $\varrho_u(a, x) = \mu^{(a)}(uA, dx)/\mu(uA, dx)$ известна, функция $\varrho_{u(x)}(a, x) = \{\varrho_u(a, x), x \in X_u\}$ оказывается $\mathfrak{B}$-измеримой и совпадает с $\mu^{(a)}(dx)/\mu(dx)$.

Подобное расслоение по параметру u множества мер

$$\mathfrak{M} = \{\mu_u(dx), u \in E_m^+\} \tag{2}$$

может быть произведено и в общем случае. Точнее, в леммах 1—3 доказано следующее. Условимся символом Π_l обозначать l-мерную плоскость в пространстве E_m, Δ_{m-l} — подпространство, ортогональное к Π_l,

$$\Pi_l^+ = \Pi_l \cap E_m^+,\ \Delta_{m-l}^+ = \Delta_{m-l} \cap E_m^+. \tag{3}$$

Тогда при некотором l, $l \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ существует набор параллельных l-мерных множеств $\Pi_l^+(c)$, $E_m^+ = \bigcup\limits_{c \in \Delta_{m-l}^+} \Pi_l^+(c)$, таких, что для всех $u \in \Pi_l^+(c)$ $\mu_u(dx)$ эквивалентны между собой, а каждому вектору $c \in \Delta_{m-l}^+$ можно сопоставить такое $\mathfrak{B}$-измеримое множество $\mathfrak{A}(c)$, что

$$\mu_u(\mathfrak{A}(c)) = 1,\ u \in \Pi_l^+(c),$$

$$\mathfrak{A}(c)\,\mathfrak{A}(c') = \varnothing,\ c \neq c'.$$

Этот факт позволяет доказать следующую теорему.

Теорема. При сдвиге меры $\mu(dx)$ (1) на вектор $a \in \left(\sum\limits_1^m A_i\right)^{1/2} H$

$$\frac{\mu^{(a)}(dx)}{\mu(dx)} = \varrho_{c(x)}(a, x) = \{\varrho_c(a, x),\ x \in \mathfrak{A}(c)\}, \tag{4}$$

где, в свою очередь,

$$\varrho_c(a, x) = \frac{k(x+a, c)}{k(x, c)}\, p(a, x; c), \tag{5}$$

$$k(x, c) = \int\limits_{\Pi_l^+(c)} \frac{\mu_u(dx)}{\mu_{u^\bullet}(dx)}\, \tilde{s}(du|c), \tag{6}$$

$$p(a, x; c) = \frac{\mu_{u^\bullet}^{(a)}(dx)}{\mu_{u^\bullet}(dx)}, \tag{7}$$

u^0 — произвольная точка $\Pi_l^+(c)$.

Доказательство. Будем считать параметр u случайной величиной на E_m^+ с распределением $s(du)$. При фиксированном $c \in \Delta_{m-l}^+$ для u существует условное распределение в широком смысле $\tilde{s}(du|c)$ на множестве $\Pi_l^+(c)$, поэтому имеет смысл величина

$$\tilde{\mu}(dx; c) = \int\limits_{\Pi_l^+(c)} \mu_u(dx)\, \tilde{s}(du|c), \tag{8}$$

и если $\check{s}(dc)$ — распределение $M\{u|c\}$, то

$$\mu(dx) = \int\limits_{\Delta_{m-l}^+} \tilde{\mu}(dx; c)\, \check{s}(dc). \tag{9}$$

Очевидно, что $\tilde{\mu}(\mathfrak{A}(c), c) = 1$, и по формуле (9) мера $\mu(dx)$ представляет собой взвешенную сумму ортогональных мер $\tilde{\mu}(dx, c)$, каждая из которых сосредоточена на своем $\mathfrak{B}$-измеримом подмножестве $\mathfrak{A}(c)$. Таким образом, для меры $\mu(dx)$ можно воспользоваться схемой, рассмотренной в лемме 4 [2]: если для $a \in \left(\sum_1^m A_i\right)^{1/2} H$ $\varrho_c(a, x) = \dfrac{\tilde{\mu}^{(a)}(dx, c)}{\tilde{\mu}(dx, c)}$ и функция $\varrho_{c(x)}(a, x) = \{\varrho_c(a, x), x \in \mathfrak{A}(c)\}$ $\mathfrak{B}$-измерима, то справедлива формула (4). Вид функции $\varrho_c(a, x)$ (см. формулы (5) — (7)) устанавливаем с помощью доказываемой ниже леммы 4. В лемме 5 устанавливается измеримость $\varrho_{c(x)}(a, x)$. Теорема доказана.

Перейдем теперь к формулировке и доказательству лемм.

Лемма 1. В области E_m^+ всегда можно выделить набор параллельных множеств $\Pi_{m-1}^+(c)$, $c \in (0, \infty)$, таких, что любые две меры из разных совокупностей

$$\mathfrak{M}_c = \{\mu_u(dx), u \in \Pi_{m-1}^+(c)\} \tag{10}$$

ортогональны между собой и $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{c \in (0,\infty)} \mathfrak{M}_c$.

Доказательство. Пусть P_n—последовательность проекционных операторов на систему H_n собственных подпространств оператора $\left(\sum_1^m A_i\right)$, $\overline{\bigcup_n H_n} = H$, и

$$g_n(x) = \frac{1}{n}\left(\left(\sum_1^m A_i\right)^{-1} P_n x, P_n x\right).$$

Так как для любого $j = 1, 2, \ldots, m$ $\left\|\left(\sum_1^m A_i\right)^{-1/2} A_j \left(\sum_1^m A_i\right)^{-1/2}\right\| \leqslant 1$

и, следовательно,

$$\left\|P_n\left(\sum_1^m A_i\right)^{-1/2} P_n A_j P_n \left(\sum_1^m A_i\right)^{-1/2} P_n\right\| \leqslant 1,$$

то

$$\int g_n(x)\,\mu(A_j, dx) = \frac{1}{n}\,\mathrm{Sp}\left(P_n\left(\sum_1^m A_i\right)^{-1/2} P_n A_j P_n \left(\sum_1^m A_i\right)^{-1/2} P_n\right) \in [0,1]$$

и

$$\int \left[g_n(x) - \int g_n(x)\,\mu(A_j, dx)\right]^2 \mu(A_j, dx) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Следовательно, найдутся такие $\alpha_j \in [0, 1]$, $\Sigma\alpha_j = 1$, и такая последовательность $n_k \to \infty$, что для всех $j = 1, 2, \ldots, m$

$$\int g_{n_k}(x)\,\mu(A_j, dx) \to \alpha_j,\ n_k \to \infty;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int [g_{n_k}(x) - \int g_{n_k}(x)\,\mu(A_j, dx)]^2\,\mu(A_j, dx) < \infty.$$

Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $u = (u_1, \ldots, u_m)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_u \left\{x;\ |g_{n_k}(x) - \sum_1^m u_j\alpha_j| \geqslant \varepsilon\right\} < \infty,$$

т. е.

$$\mu_u\left\{x;\ g_{n_k}(x) \to \sum u_j\alpha_j\right\} = 1.$$

Пусть

$$\mathfrak{A}(c) = \{x;\ \lim_{k\to\infty} g_{n_k}(x) = c\},$$

тогда для каждого $u \in E_m^+$ найдется такое $c \in (0, \infty)$ $\left(c = \sum_1^m u_j\alpha_j\right)$, что $\mu_u(\mathfrak{A}_c) = 1$ и $\mu_{u^{(1)}}(dx)$ может быть эквивалентна $\mu_{u^{(2)}}(dx)$ лишь в том случае, если $\sum u_j^{(1)}\alpha_j = \sum u_j^{(2)}\alpha_j$, т. е. векторы $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ принадлежат некоторой области

$$\Pi_{m-1}^+(c) = \left\{u \in E_m^+,\ \sum_1^m u_j\alpha_j = c\right\}.$$

Поскольку $\alpha_j \geqslant 0$, то множество $\Pi_{m-1}^+(c)$ либо параллельно произвольной координатной оси, либо отсекает на ней положительный отрезок. Лемма доказана.

Выясним структуру множества эквивалентных мер.

Лемма 2. Совокупность мер (2) либо совсем не содержит попарно эквивалентных мер, либо в области E_m^+ существует такой $(m-l)$-параметрический набор параллельных между собой множеств $\Pi_l^+(c)$, $l \leqslant m-1$, что в каждой из совокупностей $\mathfrak{M}_c = \{\mu_u(dx),\ u \in \Pi_l^+(c)\}$ меры взаимно эквивалентны и ортогональны всем мерам других совокупностей.

Доказательство. Отметим следующие свойства эквивалентных мер.

а) Если $\mu(B_1, dx) \sim \mu(B_2, dx)$, то при любом $\lambda > 0$ $\mu(\lambda B_1, dx) \sim \mu(\lambda B_2, dx)$ и при любом корреляционном операторе B $\mu(B + B_1, dx) \sim \mu(B + B_2, dx)$.

б) Если $\mu_{u0}(dx) \sim \mu_{u(1)}(dx)$, то $\mu_u(dx) \sim \mu_{u(0)}(dx)$ для всех u

из интервала $S = \{\gamma u^{(0)} + (1-\gamma) u^{(1)},\ \ \gamma \in \Gamma\}$, $\Gamma = \{k,\ \ ku^{(0)} + (1 - k) u^{(1)} \in E_m^+\}$. Действительно, так как для любого $u \in E_m^+ \left(\sum_1^m u_i A_i\right) H = \left(\sum_1^m A_i\right) H$, то оператор $D_u = \left(\sum_1^m u_i A_i\right)\left(\sum_1^m u_i^0 A_i\right)^{-1}$ определим на H и обратим. Но тогда для эквивалентности $\mu_u(dx) \sim \mu_{u^{(0)}}(dx)$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{Sp}\,(I - D_u)(I - D_u^*) < \infty$ (I — единичный оператор). Но для $u(\gamma) = \gamma u^{(0)} + (1-\gamma) u^{(1)}$

$$D_{u(\gamma)} = \gamma I + (1-\gamma) D_{u^{(1)}}$$

и

$\mathrm{Sp}\,(I - D_{u(\gamma)})(I - D^*_{u(\gamma)}) = (1-\gamma)^2\,\mathrm{Sp}\,(I - D_{u^{(1)}})(I - D^*_{u^{(1)}}) < \infty$, т. е. $\mu_{u(\gamma)}(dx) \sim \mu_{u^{(0)}}(dx)$.

в) Если меры $\{\mu_u(dx),\ \ u \in S\}$ эквивалентны, то для любого интервала $S' \parallel S$, $S' \in E_m^+$, $\{\mu_u(dx),\ \ u \in S'\}$ также эквивалентны.

Так как отрезок $\bar{S}$ принадлежит одной из областей $\Pi_{m-1}^+(c)$ (см. лемму 1) и не может быть параллелен более чем одной координатной оси, то предположим для определенности, что $\bar{S}$ пересекает координатную гиперплоскость, образованную осями $u_1, \ldots, u_{m-1}$, в некоторой точке $v^{(0)} = (v_1^{(0)}, \ldots, v_{m-1}^{(0)}, 0)$, $v_i^{(0)} \geqslant 0$. Легко убедиться в том, что любая точка $v = (v_1, \ldots, v_{m-1}, 0)$ с $v_i > 0$ может быть записана в виде $v = \lambda v^{(0)} + \sum_1^{m-1} c_i v^{(i)}$, $(v_i^{(i)} = 1,\ \ v_j^{(i)} = 0,\ \ j \neq i)$, $c_i \geqslant 0$, $\lambda > 0$. Поэтому любой интервал $S' \subset E_m^+$, $S' \parallel S$ допускает представление в виде

$$S' = \{\lambda [\gamma u^{(0)} + (1-\gamma) u^{(1)}] + c,\ \ \gamma \in \Gamma'\},\ \ c = (c_1, \ldots, c_{m-1}, 0).$$

Γ', вообще говоря, шире Γ, однако ввиду свойства б) достаточно доказать взаимную эквивалентность мер совокупности

$$\left\{\mu\left(\lambda \sum_1^m [\gamma u_i^{(0)} + (1-\gamma) u_i^{(1)}] A_i + \sum_1^{m-1} c_i A_i, dx\right),\ \ \gamma \in \Gamma\right\},$$

которая следует из эквивалентности мер $\{\mu_u(dx),\ \ u \in S\}$ и свойств мер, указанных в а).

г) Если в E_m^+ найдется l линейно независимых векторов $u^{(1)}, \ldots u^{(l)}$, таких, что $\mu_{u^{(i)}}(dx)$ эквивалентны между собой, и если множество Π_l^+ натянуто на $u^{(1)}, \ldots, u^{(l)}$, то из доказанного следует, что для любого $u \in \Pi_l^+$ $\mu_u(dx) \sim \mu_{u^{(i)}}(dx)$. Эквивалентными между собой будут также меры, принадлежащие любому множеству $(\Pi_l^+)' \parallel \Pi_l^+$. Набор таких множеств удобнее всего описать с помощью параметра $c\in\Delta^+_{m-l}$ (см. (3)), т. е. полагая $\Pi_l^+=\Pi_l^+(c)$ при $c\in\Pi_l^+$. Очевидно, что $\bigcup\limits_{c\in\Delta^+_{m-l}}\Pi_l^+(c)=E_m^+$.

Если не существует точки $u^{(l+1)}\overline{\in}\Pi_l^+$ такой, что

$$\mu_{u^{(l+1)}}(dx)\sim\mu_{u^{(i)}}(dx),\ u^{(i)}\in\Pi_l^+,$$

то l — максимальная размерность множества эквивалентности. Очевидно, что в этом случае в подпространстве, ортогональном к Π_l^+, не может быть взаимно эквивалентных мер, так что Π_l^+ односвязно. Лемма доказана.

Лемма 3. Каждому множеству $\mathfrak{M}(c)$ эквивалентных мер совокупности (2) можно сопоставить $\mathfrak{B}$-измеримое множество $\mathfrak{A}(c)$, такое, что для всех $\mu_u\in\mathfrak{M}(c)$ $\mu_u(\mathfrak{A}(c))=1$ и для $c\neq c'$ $\mathfrak{A}(c)\,\mathfrak{A}(c')=\varnothing$.

Замечание. В ходе доказательства леммы используется иная, более естественная для доказательства параметризация множеств $\mathfrak{M}(c)$ (значит, и $\mathfrak{A}(c)$): каждое множество $\mathfrak{M}(c)$ эквивалентных мер описывается с помощью набора параметров $(c_1,\dots,c_{m-l})$, областью изменения параметра c_i служит положительный интервал $I(c_1,\dots$ $\dots,c_{i-1})$, границы которого зависят от значений $c_1,\dots,c_{i-1}$.

Доказательство. Ввиду леммы 1 в случае $l=m-1$ утверждение леммы справедливо.

Предположим теперь, что в области $\Pi^+_{m-1}(c)$ существуют точки, соответствующие взаимно ортогональным мерам. Пусть q_i-q_0 $(i=1,\dots,m-1)$ — базис в $\Pi^+_{m-1}(c_1)$ $(q_i\in E_m^+)$, Q_i — оператор, соответствующий точке q_i $\left(\text{т. е. } Q_i=\sum\limits_j\alpha_j^{(i)}A_j,\text{ если } q_i=\sum\limits_j\alpha_j^{(i)}u_j\right)$, $\{e_r\}$ — произвольный ортонормированный базис в H.

Предположим для определенности, что для некоторой последовательности $k_n\to\infty$ (будем полагать $\{k_n\}\subset\{n_k\}$, так что по лемме 1 $\lim\limits_{k_n\to\infty}g_{k_n}(x)$ существует)

$$\lim_{k_n\to\infty}\operatorname{Sp}[(Q_0)_{k_n}^{-1}((Q_1)_{k_n}-(Q_0)_{k_n})]^2=\infty$$

(т. е. $\mu(Q_0,dx)$ ортогональна $\mu(Q_1,dx)$), а для $i=2,\dots,m-1$

$$\lim_{k_n\to\infty}\frac{\operatorname{Sp}[(Q_0)_{k_n}^{-1}((Q_i)_{k_n}-(Q_0)_{k_n})]^2}{\operatorname{Sp}[(Q_0)_{k_n}^{-1}((Q_1)_{k_n}-(Q_0)_{k_n})]^2}=z_i\in[0,\infty).$$

Здесь $(Q_i)_{k_n}$ — матрица с элементами

$$(\varkappa_i)(j,k)=\begin{cases}(Q_ie_j,e_k), & j,k\leqslant n\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Положим [1]

$$v_n(x) = ((Q_0)_n^{-1}[(Q_1)_n - (Q_0)_n](Q_0)_n^{-1}x, x) = (V_n x, x),$$

$$D_i v_n(x) = \int [v_n(x) - \int v_n(x)\mu(Q_i, dx)]^2 \mu(Q_i, dx) = 2\,\mathrm{Sp}\,(V_n Q_i)^2,$$

$$\varphi_n(x) = 2\frac{v_n(x) - \int v_n(x)\mu(Q_1, dx)}{D_1 v_n(x)}.$$

Прежде всего заметим, что для введенных операторов V величины $D_i v(x)$ эквивалентны в том смысле, что для любых i и k найдется такое $0 < c_{i,k} < \infty$, что

$$D_i v(x) \leqslant c_{i,k}^2 D_k v(x). \tag{11}$$

В самом деле [2], оператор $\left(\sum_1^m A_i\right)^{-1/2} A_j^{1/2}$ определен в H и $\left\|\left(\sum A_i\right)^{-1/2} A_j^{1/2}\right\| \leqslant 1$, сопряженный оператор $A_j^{1/2}\left(\sum A_i\right)^{-1/2}$ может быть расширен на H с $\left\|A_j^{1/2}\left(\sum A_i\right)^{-1/2}\right\| \leqslant 1$. Поэтому

$$\|Q_i^{1/2}Q_k^{-1/2}\|^2 = \left\|\left(\sum_1^m \alpha_j^{(i)}A_j\right)^{1/2}\left(\sum_1^m \alpha_j^{(k)}A_j\right)^{-1/2}\right\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j^{(i)}}{\alpha_j^{(k)}} = c_{i,k},$$

откуда

$$\frac{1}{2}D_i v_n(x) = \mathrm{Sp}\,(V_n Q_i)^2 = \mathrm{Sp}\,[(Q_i^{1/2}V_n Q_k^{1/2})(Q_k^{-1/2}Q_i^{1/2})(Q_i^{1/2}Q_k^{-1/2})(Q_k^{1/2} \times$$

$$\times V_n Q_i^{1/2})] = \sum_{r=1}^{\infty}\|(Q_i^{1/2}Q_k^{-1/2})(Q_k^{1/2}V_n Q_i^{1/2})e_r\|^2 \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} c_{i,k}\|(Q_k^{1/2}V_n Q_k^{1/2}) \times$$

$$\times (Q_k^{-1/2}Q_i^{1/2})e_r\|^2 = c_{i,k}\sum_{r=1}^{\infty}\|(Q_i^{1/2}Q_k^{-1/2})(Q_k^{1/2}V_n Q_k^{1/2})e_r\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant c_{i,k}^2\sum_{r=1}^{\infty}\|Q_k^{1/2}V_n Q_k^{1/2}e_r\|^2 = \frac{1}{2}c_{i,k}^2 D_k v_n(x).$$

Справедливость (11) установлена. В силу этого неравенства

$$D_i\varphi_{k_n}(x) = \frac{8D_i v_{k_n}(x)}{(D_1 v_{k_n}(x))^2} \leqslant \frac{8c_{i,1}^2}{\mathrm{sp}\,[(Q_0)_{k_n}^{-1}((Q_1)_{k_n} - (Q_0)_{k_n})]^2} \to 0,$$

$$i = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Так как

$$\left|\int \varphi_{k_n}(x)\mu(Q_i, dx)\right| =$$

$$= \left| \frac{\mathrm{Sp}\,[(Q_0)_{k_n}^{-1}((Q_1)_{k_n} - (Q_0)_{k_n})((Q_0)_{k_n}^{-1})((Q_i)_{k_n} - (Q_0)_{k_n})]}{\mathrm{Sp}\,[(Q_0)_{k_n}^{-1}((Q_1)_{k_n} - (Q_0)_{k_n})]^2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{Sp}\,[(Q_0)_{k_n}^{-1}((Q_i)_{k_n} - (Q_0)_{k_n})]^2}{\mathrm{Sp}\,[(Q_0)_{k_n}^{-1}((Q_1)_{k_n} - (Q_0)_{k_n})]^2} \to \frac{1}{2}(1 + z_i),$$

то для некоторой подпоследовательности k_n' из k_n для всех $i = 0, 1, \ldots$ $\ldots, m-1$ существует

$$\lim_{k_n' \to \infty} \int \varphi_{k_n'}(x)\, \mu(Q_i, dx) = \beta_i$$

и, следовательно,

$$\lim_{k_n' \to \infty} \int \varphi_{k_n'}(x)\, \mu\left(Q_0 + \sum_1^{m-1} c_i (Q_i - Q_0),\, dx\right) = \beta_0 + \sum_1^{m-1} c_i (\beta_i - \beta_0).$$

Таким образом, мера $\mu\left(Q_0 + \sum\limits_1^{m-1} c_i (Q_i - Q_0),\, dx\right)$ сосредоточена на таком $\mathfrak{B}$-измеримом подмножестве в H, на элементах которого существует

$$\lim_{k_n' \to \infty} \varphi_{k_n'}(x) = \beta_0 + \sum c_i (\beta_i - \beta_0)$$

(и, как было установлено в лемме 1, $\lim\limits_{k_n' \to \infty} g_{k_n'}(x) = c_1$). Итак, последовательность функционалов $\varphi_{k_n'}(x)$ в области $\Pi_{m-1}^{+}(c_1)$ определяет линейную функцию $f(q_0 + \sum c_i (q_i - q_0)) = \beta_0 + \sum c_i (\beta_i - \beta_0)$ ($f(q_0) = 0$, $f(q_1) = 1$, так что $f(q)$ не является константой), и, следовательно, множество областей $\Pi_{m-2}^{+}(c_1, c_2)$, $c_2 \in I(c_1)$

$$(\Pi_{m-2}^{+}(c_1, c_2) = \{q \in \Pi_{m-1}^{+}(c_1),\ f(q) = c_2\},\ \bigcup_{c_2 \in I(c_1)} \Pi_{m-2}^{+}(c_1, c_2) = \Pi_{m-1}^{+}(c_1)),$$

с помощью которого так же, как это делается в лемме 1, можно разделить совокупность мер $\mathfrak{M}_1(c_1) = \{\mu_u(dx),\ u \in \Pi_{m-1}^{+}(c_1)\}$ на ортогональные совокупности $\mathfrak{M}_2(c_1, c_2) = \{\mu_u(dx),\ u \in \Pi_{m-2}^{+}(c_1, c_2)\}$.

Каждой совокупности мер $\mathfrak{M}_2(c_1, c_2)$ можно сопоставить $\mathfrak{B}$-измеримое множество $\mathfrak{A}_2(c_1, c_2) = \{x, \lim\limits_{k_n' \to \infty} g_{k_n'}(x) = c_1, \lim\limits_{k_n' \to \infty} \varphi_{k_n'}(x) = c_2\}$, такое, что для всех $\mu_u \in \mathfrak{M}_2(c_1, c_2)$, $\mu(\mathfrak{A}_2(c_1, c_2)) = 1$ и $\mathfrak{A}_2(c_1, c_2) \times$

$\times \mathfrak{A}_2(c_1, c_2') = \varnothing$, $c_2 \neq c_2'$. Таким образом, при $l = m-2$ расслоение H построено.

Если же $l < m-2$, то в каждой области $\mathfrak{A}_2(c_1, c_2)$ строим новый функционал $\varphi_n^{(3)}(x)$, аналогичный функционалу $\varphi_n(x)$, который определит новую линейную функцию в области $\Pi_{m-2}^+(c_1, c_2)$ и даст дальнейшее расслоение совокупности мер $\mathfrak{M}_2(c_1, c_2)$ и множества $\mathfrak{A}_2(c_1, c_2)$. Эта процедура обрывается на $(m-l)$-м шаге, так как полученные после $(m-l)$-го расслоения множества $\mathfrak{M}_{m-l}(c_1, \ldots, c_{m-l})$ будут содержать в себе только взаимно эквивалентные меры. Итак, для каждого набора $c_1, \ldots, c_{m-l}$, $c_i \in I(c_1, \ldots, c_{i-1})$, существует последовательность $k_n \to \infty$ и набор функционалов

$$\varphi_{k_n}^{(i)}(c_1, \ldots, c_{i-1}, x), \quad i = 1, 2, \ldots, m-l \; (\varphi^{(1)}(x) = g(x), \; \varphi^{(2)}(x) = \varphi(x)),$$

такие, что все меры $\mu_u(dx) \in \mathfrak{M}_{m-l}(c_1, \ldots, c_{m-l})$ между собой эквивалентны и сосредоточены на $\mathfrak{B}$-измеримом подмножестве H вида

$$\mathfrak{A}_{m-l}(c_1, \ldots, c_{m-l}) = \{x, \varphi_{k_n}^{(1)}(x) \to c_1, \; \varphi_{k_n}^{(2)}(x) \to c_2, \ldots$$
$$\ldots, \varphi_{k_n}^{(m-l)}(x) \to c_{m-l}\}.$$

При этом участвующие в построении $\mathfrak{A}_{m-l}(c_1, \ldots, c_{m-l})$ промежуточные множества $\mathfrak{A}_i(c_1, \ldots, c_i)$ при $i = 1, 2, \ldots, m-l-1$ связаны соотношениями

$$\mathfrak{A}_i(c_1, \ldots, c_i) \supseteq \bigcup_{c_{i+1} \in I(c_1, \ldots, c_i)} \mathfrak{A}_{i+1}(c_1, \ldots, c_{i+1}),$$

$$\mathfrak{A}_i(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_i)\, \mathfrak{A}_i(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_i') = \varnothing, \quad c_i \neq c_i'.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь следующую схему. Заданы две произвольные системы мер $\{\mu_\alpha(dx), \alpha \in I\}$ и $\{\nu_\alpha(dx), \alpha \in I\}$, $I \subset E_m^+$, в каждой из систем выделена некоторая стандартная мера $\mu_0(dx)$ и $\nu_0(dx)$,

$$\mu(dx) = \int_I \mu_\alpha(dx)\, ds(\alpha),$$
$$\nu(dx) = \int_I \nu_\alpha(dx)\, ds(\alpha).$$

Лемма 4. Если почти для всех α по мере $ds(\alpha)$

$$\nu_\alpha(dx) \sim \nu_0(dx),$$
$$\mu_\alpha(dx) \sim \mu_0(dx),$$
$$\nu_0(dx) \sim \mu_0(dx),$$

то

1) $\mu(dx) \sim \mu_0(dx)$

и

$$\frac{\mu(dx)}{\mu_0(dx)} = \int_I \frac{\mu_\alpha(dx)}{\mu_0(dx)} ds(\alpha); \tag{12}$$

2) $\nu(dx) \sim \mu(dx)$

и

$$\frac{\nu(dx)}{\mu(dx)} = \left(\int_I \frac{\nu_\alpha(dx)}{\nu_0(dx)} ds(\alpha)\right)\left(\int_I \frac{\mu_\alpha(dx)}{\mu_0(dx)} ds(\alpha)\right)^{-1} \frac{\nu_0(dx)}{\mu_0(dx)}. \tag{13}$$

Доказательство. Абсолютная непрерывность $\mu(dx)$ относительно $\mu_0(dx)$ и формула (12) следуют из равенств

$$\mu(\mathfrak{A}) = \int_I \int_{\mathfrak{A}} \frac{\mu_\alpha(dx)}{\mu_0(dx)} \mu_0(dx)\, ds(\alpha) = \int_{\mathfrak{A}} \left(\int_I \frac{\mu_\alpha(dx)}{\mu_0(dx)} ds(\alpha)\right) \mu_0(dx).$$

Если, однако, $\mu(\mathfrak{A}) = 0$, то почти всюду по мере $ds(\alpha)$ $\mu_\alpha(\mathfrak{A}) = 0$' т. е. $\mu_0(\mathfrak{A}) = 0$. Таким образом, $\mu_0(dx)$ также абсолютно непрерывна относительно $\mu(dx)$ и, следовательно,

$$\frac{\mu_0(dx)}{\mu(dx)} = \left[\int_I \frac{\mu_\alpha(dx)}{\mu_0(dx)} ds(\alpha)\right]^{-1},$$

откуда

$$\nu(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}} \left(\int_I \frac{\nu_\alpha(dx)}{\nu_0(dx)} ds(\alpha)\right) \frac{\nu_0(dx)}{\mu_0(dx)} \mu_0(dx) =$$

$$= \int_{\mathfrak{A}} \frac{\nu_0(dx)}{\mu_0(dx)} \int_I \frac{\nu_\alpha(dx)}{\nu_0(dx)} ds(\alpha) \left[\int_I \frac{\mu_\alpha(dx)}{\mu_0(dx)} ds(\alpha)\right]^{-1} \mu(dx),$$

что доказывает справедливость формулы (13), а также эквивалентность мер $\mu(dx)$ и $\nu(dx)$ ввиду их эквивалентной роли. Лемма доказана.

Лемма 5. Функция $\varrho_{c(x)}(a, x)$, определяемая формулой (4), $\mathfrak{B}$-измерима.

Доказательство. Убедимся в $\mathfrak{B}$-измеримости функции $k(x, c(x)) = \{k(x, c),\ x \in \mathfrak{A}(c)\}$ (см. (6)). Очевидно, что для элементов совокупности $\{\Pi_l^+(c),\ c \in \Delta_{m-l}^+\}$ можно определить взаимно-однозначное преобразование $T(c, c')$, переводящее $\Pi_l^+(c)$ в $\Pi_l^+(c')$, непрерывное и транзитивное. Таким образом, при фиксированом c^0 каждая точка $u \in \Pi_l^+(c^0)$ порождает некоторую непрерывную траекторию

$$\gamma_u(\cdot) = \{\gamma_u(c) = T(c^0, c)\, u,\ c \in \Delta^+_{m-l}\}.$$

Пусть u и u^0 — две произвольные точки области $\Pi_l^+(c^0)$; $\gamma_u(\cdot)$, $\gamma_{u^0}(\cdot)$ — соответствующие им траектории; $B_u(c)$, $B_{u^0}(c)$ — операторы, соответствующие точкам $\gamma_u(c)$ и $\gamma_{u^0}(c)$; $\{e_k\}$ — ортонормированный базис в H,

$$\widetilde{B}_{n,u}(c) = \| (B_u(c)\, e_k,\ e_j \|_1^n,$$

$$\widetilde{B}_{n,u^0}(c) = \| B_{u^0}(c)\, e_k,\ e_j \|_1^n.$$

При каждом $c \in \Delta^+_{m-l}$

$$\frac{\mu_{\gamma_u(c)}(dx)}{\mu_{\gamma_{u^0}(c)}(dx)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n,\gamma_u(c)}(dx)}{\mu_{n,\gamma_{u^0}(c)}(dx)},$$

где для $x = \sum_1^\infty (x,\ e_k)\, e_k$, $\quad y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\quad y_k = (x,\ e_k)$

$$\frac{\mu_{n,\gamma_u(c)}(dx)}{\mu_{n,\gamma_{u^0}(c)}(dx)} = \left[\frac{\det \widetilde{B}_{n,u^0}(c)}{\det \widetilde{B}_{n,u}(c)}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\widetilde{B}_{n,u}(c)^{-1} y,\ y\right)\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\widetilde{B}_{n,u^0}(c)^{-1}\, y, y\right)\right\}},$$

а так как при каждом n

$$\frac{\mu_{n,\gamma_u(c)}(dx)}{\mu_{n,\gamma_{u^0}(c)}(dx)} \to \frac{\mu_{n,u}(dx)}{\mu_{n,u^0}(dx)}, \quad c \to c^0,$$

то определенная на $\bigcup_{c\in\Delta^+_{m-l}} \mathfrak{A}(c)$ функция

$$\pi_{n,u}(x) = \left\{\frac{\mu_{n,\gamma_u(c)}(dx)}{\mu_{n,\gamma_{u^0}(c)}(dx)},\quad x \in \mathfrak{A}(c)\right\}$$

$\mathfrak{B}$-измерима. Следовательно, $\mathfrak{B}$-измеримы также функции

$$\pi_u(x) = \lim_{n\to\infty} \pi_{n,u}(x) = \left\{\frac{\mu_{\gamma_u(c)}(dx)}{\mu_{\gamma_{u^0}(c)}(dx)},\quad x \in \mathfrak{A}(c)\right\},$$

$$k(x,\ c(x)) = \left\{\int_{\Pi_l^+(c^0)} \pi_u(x)\, \widetilde{s}(d_u \gamma_u(c) \mid c),\quad x \in \mathfrak{A}(c)\right\}.$$

Доказательство измеримости $p(a, x, c(x)) = \{p(a, x, c), x \in \mathfrak{A}(c)\}$ может быть проведено аналогично. По формуле (5) получаем измеримость $\varrho_{c(x)}(a, x)$. Лемма доказана.

В заключение выражаю глубокую благодарность А. В. Скороходу за внимание к работе и ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И. И., Скороход А. В. О плотностях вероятностных мер в функциональных пространствах.—УМН, т. XXI, вып. 6 (132), 1966.

2. Сытая Г. Н. О допустимых сдвигах взвешенных гауссовых мер. — Теория вероятн. и ее прим., **14**, 3, 1969.

G. N. Sytaya

ON THE DENSITY OF THE WEIGHTED GAUSSIAN MEASURES UNDER ABSOLUTE CONTINUOUS TRANSLATIONS

Summary

The measure $\mu(dx)$ in the measurable Hilbert space $(H\ \mathfrak{B})$ and its translation $\mu^{(a)}(dx)$, such that $\mu^{(a)}(dx) \ll \mu(dx)$, are considered and the formula on the density $\frac{d\mu^{(a)}}{d\mu}(x)$ is obtained. The stratification of the set of the Gaussian measures $\{\mu_u(dx)\}$ participating in the presentation of the measure $\mu(dx)$ on the sets $\mathfrak{M}_c$, such stratification, that for $\mu_u, \mu_u' \in \mathfrak{M}_c$ $\mu_u \sim \mu_{u'}$ anp $\mu_u \perp \mu_{u'}$ if $\mu_u \in \mathfrak{M}_c$, $\mu_{u'} \in \mathfrak{M}_{c'}$ and $c \neq c'$ is odtained. $\mathfrak{A}(c)$ is constructed for $\mathfrak{M}(c)$ under $\mathfrak{A}(c) \in \mathfrak{B}$ and $\mathfrak{A}(c)\ \mathfrak{A}(c') = \varnothing$, $c \neq c'$ and for $\mu_u \in \mathfrak{M}_c$, $\mu_u(\mathfrak{A}(c)) = 1$.

Поступила в редакцию 1.XII 1968.