А. Ф. ТАРАСКИН, асп.
Донецкий вычислительный центр АН УССР

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ НОРМАЛЬНОСТИ ВЕКТОРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ И ОЦЕНКАХ ПАРАМЕТРОВ ПЕРЕНОСА МНОГОМЕРНОГО ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА

А. С. Холево [8] рассмотрел задачу об оценке параметров переноса диффузионного процесса. Важность этой задачи определяется техническими приложениями; ее можно трактовать, в частности, как задачу оценки характеристик некоторого объекта управления, подверженного случайным воздействиям. В указанной работе для получения оценок дается алгоритм, основанный на идее стохастической аппроксимации, при этом оценка ищется как решение некоторого стохастического уравнения; доказывается состоятельность, а в случае постоянного сноса и асимптотическая нормальность такой оценки.

Методом максимального правдоподобия (м. п.) эта задача решалась для одномерного диффузионного процесса [5]. Этот метод позволяет проще находить оценки; при достаточно общих предположениях они оказываются состоятельными и асимптотически эффективными. Основной целью данной работы является изучение асимптотических свойств оценок параметров переноса многомерных диффузионных процессов, получаемых по методу м. п. Одним из желаемых качеств оценок является, как известно, их асимптотическая нормальность.

Асимптотическая нормальность векторных стохастических интегралов

Пусть $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathrm{P})$ — основное вероятностное пространство, $w(t) = \{w_1(t), \ldots, w_m(t)\}$ — винеровский процесс с независимыми компонентами и $\mathfrak{F}_t$, $t \geqslant 0$ — семейство σ-подалгебр σ-алгебры $\mathfrak{S}$, удовлетворяющее условиям: 1) $\mathfrak{F}_{t_1} \subset \mathfrak{F}_{t_2}$ при $t_1 < t_2$, 2) $w(t)$ измерим относительно $\mathfrak{F}_t$ при каждом t, 3) при каждом s процессы $w_i(t+s) - w_i(s)$, $i = \overline{1, m}$, в совокупности не зависят от $\mathfrak{F}_s$.

Через $H[0, t]$ обозначим совокупность вещественнозначных измеримых по совокупности переменных (s, ω) функций $f(s) = f(s, \omega)$, определенных при $s \in [0, t]$, $\omega \in \Omega$ и удовлетворяющих условиям: $f(s)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}_s$ при каждом $s \in [0, t]$ и $\int\limits_0^t \mathbf{M} f^2(s)\,ds < \infty$.

Пусть имеем матричную случайную функцию $F(s) = \| f_{kj} \|$, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, такую, что ее элементы $f_{kj}(s) \in H[0, t]$ при всех $t > 0$. Тогда стохастический интеграл $\int\limits_0^t F(s)\,dw(s)$ определяется для любого $t > 0$ и представляет собой векторную случайную величину.

Нас интересуют условия, при которых случайная величина $\frac{1}{\sqrt{t}} \int\limits_0^t F(s)\,dw(s)$ имеет гауссовское предельное распределение при $t \to \infty$.

Рассмотрим некоторые вспомогательные предложения, которые доказываются методами, использованными в монографии [1].

Лемма 1. Пусть случайные функции $g_1(s)$ и $g_2(s)$ принадлежат классу $H[0, t]$, а $w_1(s)$ и $w_2(s)$ — независимые винеровские процессы. Тогда

$$\mathbf{M} \int\limits_0^t g_1(s)\,dw_1(s) \int\limits_0^t g_2(s)\,dw_2(s) = 0.$$

Лемма 2. Пусть $g_i(s) \in H[0, t]$, $i = 1, 2$; τ_1 и τ_2 — марковские моменты, для которых $\mathbf{P}\{0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant t\} = 1$. Тогда

$$\mathbf{M} \left\{ \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} g_1(s)\,dw_1(s) \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} g_2(s)\,dw_2(s) / \mathfrak{F}_{\tau_1} \right\} = 0$$

с вероятностью 1.

Замечание. Если $g_i(s) \in H[0, t]$, $i = 1, 2$, при всех $t > 0$ и марковские случайные моменты $\tau_1 < \tau_2$ таковы, что

$$\mathbf{M} \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} g_1^2(s)\,ds < \infty,$$

то

$$\mathbf{M} \left\{ \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} g_1(s)\,dw_1(s) \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} g_2(s)\,dw_2(s) / \mathfrak{F}_{\tau_1} \right\} = 0. \tag{1}$$

В самом деле, положим $g_{iT}(s) = g_i(s)$ при $s \leqslant T$ и $g_{iT}(s) = 0$ при $s > T$. На основании леммы 2

$$\mathbf{M}\left\{\int_{\tau_1}^{\tau_2} g_{1T}(s)\,dw_1(s)\int_{\tau_1}^{\tau_2} g_{2T}(s)\,dw_2(s)/\mathfrak{F}_{\tau_1}\right\} = 0.$$

Устремив в этом равенстве T к бесконечности, получим (1).

Лемма 3. Пусть $g(s) = \{g_1(s), \ldots, g_m(s)\}$ — векторная случайная функция, компоненты которой принадлежат $H[0, t]$ при каждом $t > 0$, и с вероятностью 1

$$\int_0^\infty (g(s), g(s))\,ds = \infty.$$

Положим

$$\tau_t = \inf\left\{u;\ \int_0^u (g(s), g(s))\,ds \geqslant t\right\}.$$

Тогда процесс

$$\zeta_t = \int_0^{\tau_t} (g(s), dw(s))$$

является винеровским.

Доказательство. Очевидно, что при каждом $t \geqslant 0$ τ_t является марковским моментом (относительно совокупности σ-алгебр $\mathfrak{F}_t$) и $\tau_{t_1} < \tau_{t_2}$ при $t_1 < t_2$. Так как

$$\int_0^{\tau_t} (g(s), g(s))\,ds = t,$$

то

$$\mathbf{M}\int_0^{\tau_t} (g(s), g(s))\,ds < \infty.$$

В соответствии со свойствами стохастических интегралов со случайными пределами находим

$$\mathbf{M}\left\{\int_{\tau_{t_1}}^{\tau_{t_2}} (g(s), dw(s))/\mathfrak{F}_{\tau_{t_1}}\right\} = 0$$

с вероятностью 1,

$$\mathbf{M}\left\{\left[\int_{\tau_{t_1}}^{\tau_{t_2}} (g(s), dw(s))\right]^2/\mathfrak{F}_{\tau_{t_1}}\right\} =$$

$$= \sum_{k,j=1}^{m} \mathbf{M} \left\{ \int_{\tau_{t_1}}^{\tau_{t_2}} g_k(s)\, dw_k(s) \int_{\tau_{t_1}}^{\tau_{t_2}} g_j(s)\, dw_j(s) / \mathfrak{F}_{\tau_{t_1}} \right\} =$$

$$= \mathbf{M} \left\{ \int_{\tau_{t_1}}^{\tau_{t_2}} (g(s),\, g(s))\, ds / \mathfrak{F}_{\tau_{t_1}} \right\} = t_2 - t_1$$

в силу определения случайных моментов τ_{t_1} и τ_{t_2}. Непрерывность ζ_t вытекает из общих свойств стохастических интегралов. Лемма доказана.

Теперь вернемся к рассмотрению предельного распределения стохастического интеграла $\int_0^t F(s)\, dw(s)$. Обозначим $f_k(s) = \{f_{k1}(s), \ldots$ $\ldots, f_{km}(s)\}$, $k = \overline{1, n}$. Тогда

$$\int_0^t F(s)\, dw(s) = \left\{ \int_0^t (f_1(s),\, dw(s)),\ \ldots,\ \int_0^t (f_n(s),\, dw(s)) \right\}.$$

Теорема 1. Если для матричной случайной функции $F(s)$ выполняются условия

$$\frac{1}{t} \int_0^t (f_k(s),\, f_j(s))\, ds \xrightarrow{p} c_{kj}, \tag{а}$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{M}(f_k(s),\, f_j(s))\, ds \to c_{kj} \tag{б}$$

при $t \to \infty$, где c_{kj} конечны, то распределение вектора $\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t F(s) dw(s)$ сходится к нормальному закону со средним нуль и ковариационной матрицей $C = \| c_{kj} \|$, $k, j = \overline{1, n}$.

Доказательство. Матрица C, очевидно, является симметричной и неотрицательно определенной. Покажем сначала, что для любого вектора $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \in R^n$, для которого $(C\lambda, \lambda) \neq 0$, величина

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int_0^t (f_k(s),\, dw(s)) \tag{2}$$

асимптотически нормальна при $t \to \infty$. Преобразуем эту величину следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int_0^t (f_k(s), dw(s)) = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t (f_\lambda(s), dw(s)),$$

где $f_\lambda(s) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(s)$.

Из условия (а) теоремы получаем соотношение

$$\frac{1}{t} \int_0^t (f_\lambda(s), f_\lambda(s))\, ds \xrightarrow{p} (C\lambda, \lambda), \qquad (2')$$

из которого следует, что с вероятностью 1

$$\int_0^\infty (f_\lambda(s), f_\lambda(s))\, ds = \infty.$$

Теперь введем случайный момент τ_t:

$$\tau_t = \inf \left\{ u;\ \int_0^u (f_\lambda(s), f_\lambda(s))\, ds \geqslant t\,(C\lambda, \lambda) \right\}.$$

Для векторной случайной функции $(C\lambda, \lambda)^{-\frac{1}{2}} f_\lambda(s)$ выполнены условия леммы 3 и на ее основании процесс $(C\lambda, \lambda)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\tau_t} (f_\lambda(s), dw(s))$ будет винеровским. Рассмотрим разность

$$[t\,(C\lambda, \lambda)]^{-\frac{1}{2}} \int_0^t (f_\lambda(s), dw(s)) - [t\,(C\lambda, \lambda)]^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\tau_t} (f_\lambda(s), dw(s)). \qquad (3)$$

Обозначим $\theta_1 = \min(t, \tau_t)$ и $\theta_2 = \max(t, \tau_t)$. Тогда, используя лемму 2, можем записать цепочку равенств

$$\mathbf{M} \left\{ [t\,(C\lambda, \lambda)]^{-\frac{1}{2}} \int_0^t (f_\lambda(s), dw(s)) - [t\,(C\lambda, \lambda)]^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\tau_t} (f_\lambda(s), dw(s)) \right\}^2 =$$

$$= [t\,(C\lambda, \lambda)]^{-1}\, \mathbf{M} \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta_2} (f_\lambda(s), dw(s)) \right\}^2 = [t\,(C\lambda, \lambda)]^{-1}\, \mathbf{M} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (f_\lambda(s), f_\lambda(s))\, ds =$$

$$= [t\,(C\lambda,\lambda)]^{-1}\,\mathbf{M}\left|\int_0^t (f_\lambda(s), f_\lambda(s))\,ds - \int_0^{\tau_t} (f_\lambda(s), f_\lambda(s))\,ds\right| =$$

$$= (C\lambda,\lambda)^{-1}\,\mathbf{M}\left|\frac{1}{t}\int_0^t (f_\lambda(s), f_\lambda(s))\,ds - (C\lambda,\lambda)\right|.$$

Покажем, что правая часть этого равенства стремится к нулю.

Во-первых, выражение под знаком математического ожидания стремится по вероятности к нулю в силу соотношения (2′). Во-вторых, используя условие (б) теоремы, получаем соотношение

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{M}\,(f_\lambda(s), f_\lambda(s))\,ds \to (C\lambda,\lambda),$$

которое означает возможность предельного перехода

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{M}\,\frac{1}{t}\int_0^t (f_\lambda(s), f_\lambda(s))\,ds = \mathbf{M}\left\{p - \lim\frac{1}{t}\int_0^t (f_\lambda(s), f_\lambda(s))\,ds\right\} = (C\lambda,\lambda).$$

Тогда возможен предельный переход [2] при каждом $B \in \mathfrak{S}$

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{M}\chi_B(\omega)\,\frac{1}{t}\int_0^t (f_\lambda(s), f_\lambda(s))\,ds = \mathbf{M}\chi_B(\omega)\,(C\lambda,\lambda) = (C\lambda,\lambda)\,\mathbf{P}(B),$$

где χ_B — характеристическая функция события B. Отсюда следует, что случайные величины семейства

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t (f_\lambda(s), f_\lambda(s))\,ds - (C\lambda,\lambda)\right|$$

имеют равномерно абсолютно непрерывные интегралы (по вероятностной мере $\mathbf{P}$). Поэтому

$$\mathbf{M}\left|\frac{1}{t}\int_0^t (f_\lambda(s), f_\lambda(s))\,ds - (C\lambda,\lambda)\right| \to 0$$

при $t\to\infty$, значит, средний квадратический предел разности (3) равен нулю. Отсюда вытекает сходимость распределения величины (2) к нормальному закону со средним нуль и дисперсией $(C\lambda,\lambda)$.

Пусть теперь λ такой вектор из R^n, что $(C\lambda, \lambda) = 0$. В этом случае в силу условий теоремы

$$\mathbf{M}\left|\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t (f_\lambda(s), dw(s))\right|^2 = \mathbf{M}\frac{1}{t}\int_0^t (f_\lambda(s), f_\lambda(s))\, ds \to 0.$$

Обозначим через $\psi_t(\tau; \lambda)$ характеристическую функцию случайной величины (2). По доказанному выше $\psi_t(\tau; \lambda) \to \exp\left\{-\frac{\tau^2}{2}(C\lambda, \lambda)\right\}$ для любого $\lambda \in R^n$. С другой стороны, $\psi_t(\tau; \lambda)$ при $\tau = 1$ и переменном векторе λ представляет собой характеристическую функцию вектора $\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t F(s)\, dw(s)$. Теорема, таким образом, доказана.

Пусть $\xi(s)$ — диффузионный процесс со значениями в R^m и $\mathfrak{F}_t$-измеримый для $s \in [0, t]$.

Следствие 1. Если процесс $\xi(t)$ — возвратный и обладает эргодическим распределением $G(x)$, а $\Phi(x)$ — матричная функция, определенная на R^m, с ограниченными элементами $\varphi_{kj}(x)$, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, то распределение вектора $\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t \Phi(\xi(s))\, dw(s)$ сходится к нормальному закону со средним нуль и ковариационной матрицей $\left\|\int_{R^m} (\varphi_k(x), \varphi_r(x))\, dG(x)\right\|$, где $\varphi_k(x) = \{\varphi_{k1}(x), \ldots, \varphi_{km}(x)\}$, $k = \overline{1, n}$.

Действительно, в силу эргодических свойств процесса $\xi(s)$ [3]

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{t}\int_0^t (\varphi_k(\xi(s)), \varphi_r(\xi(s)))\, ds \to \int_{R^m} (\varphi_k(x), \varphi_r(x))\, dG(x)\right\} = 1,$$

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{M}(\varphi_k(\xi(s)), \varphi_r(\xi(s)))\, ds \to \int_{R^m} (\varphi_k(x), \varphi_r(x))\, dG(x),$$

т. е. выполнены условия теоремы 1.

Оценки параметров переноса многомерного диффузионного процесса

Пусть имеется стохастическое дифференциальное уравнение при начальном значении $\xi(0)=\xi_0$

$$d\xi(t)=a(t\xi(t);\alpha)\,dt+A^{\frac{1}{2}}(t,\xi(t))\,dw(t), \tag{4}$$

где $a(t, x; \alpha)$, $A(t, x)$ — не случайны; $a(t, x; \alpha)$ — известная с точностью до параметра α векторная функция со значениями в R^m, $t\in[0, T]$, $x\in R^m$, α — параметр со значениями из R^n, подлежащий оценке по наблюдаемому решению уравнения (4); $A(t, x)$ — известный оператор диффузии, линейно отображающий R^m в R^m; $w(t)$ — m-мерный винеровский процесс с независимыми компонентами. Решением этого уравнения при достаточно общих условиях будет диффузионный процесс с фазовым пространством R^m.

Заданное начальное значение ξ_0 в уравнении (4) будем считать не зависящим от $w(t)$ вектором. Через f_t обозначим минимальную σ-алгебру, порожденную величинами ξ_0 и $w_k(s)$ при $k=\overline{1, m}$; $s\in[0, t]$. Ниже предполагаем, что $A(t, x)$ и $a(t, x; \alpha)$ таковы, что существует и единственно решение стохастического уравнения (4) на промежутке $[0, T]$. Это решение $\xi(s)$ будет f_t-измеримым случайным вектором при каждом $s\in[0, t]$. Кроме того, считаем, что параметр α принимает значения из некоторого допустимого множества $K\subset R^n$, содержащего истинное значение этого параметра в качестве своей внутренней точки. Меру, отвечающую решению уравнения (4) на интервале $[0, T]$ при фиксированном начальном значении ξ_0, будем обозначать через μ_α и будем предполагать, что для любых двух α', $\alpha''\in K$ меры $\mu_{\alpha'}$ и $\mu_{\alpha''}$ эквивалентны между собой. Через μ_0 обозначим «мажорирующую» меру, соответствующую некоторому $\alpha_0\in K$, $\alpha_0=\{\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0\}$. При каждом $\alpha\in K$ меры μ_α и μ_0 эквивалентны, и соответствующая плотность задается формулой [4].

$$\frac{d\mu_\alpha}{d\mu_0}(\xi(\cdot))=\exp\left\{\int_0^T (c(s,\xi(s)), d\xi(s)-a(s,\xi(s);\alpha_0)\,ds)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int_0^T (A(s,\xi(s))\,c(s,\xi(s)), c(s,\xi(s)))\,ds\right\}, \tag{5}$$

где $c(t, x)$ — векторная функция, определяемая соотношением $a(t, x; \alpha)-a(t, x; \alpha_0)=A(t, x)\,c(t, x)$.

Рассмотрим случай, когда оператор диффузии $A(t, x)$ невырожден при всех значениях аргументов, а коэффициент переноса линейно зависит от параметра:

$$a(t, x; \alpha) = a(t, x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(t, x), \tag{6}$$

где $\varphi_k(t, x)$, $k = \overline{1, n}$ — заданные функции со значениями в R^m и линейно независимые на $[0, T] \times R^m$.

В этом случае имеем

$$\frac{d\mu_\alpha}{d\mu_0}(\xi(\cdot)) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \alpha_k^0) \int_0^T \left(A^{-1}(t, \xi(t))\, \varphi_k(t, \xi(t)),\ (d\xi(t) - \right.\right.$$

$$\left. - \left[a(t, \xi(t)) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^0 \varphi_j(t, \xi(t))\right] dt\right) - \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{n} (\alpha_k - \alpha_k^0) \times$$

$$\left. \times (\alpha_j - \alpha_j^0) \int_0^T (A^{-1}(t, \xi(t))\, \varphi_k(t, \xi(t)),\ \varphi_j(t, \xi(t)))\, dt \right\}. \tag{5'}$$

Введя обозначение $L = \log \dfrac{d\mu_\alpha}{d\mu_0}(\xi(\cdot))$, найдем

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_k} = \int_0^T (A^{-1}(t, \xi(t))\, \varphi_k(t, \xi(t)),\ d\xi(t) - a(t, \xi(t))\, dt) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_0^T (A^{-1}(t, \xi(t))\, \varphi_k(t, \xi(t)),\ \varphi_j(t, \xi(t)))\, dt,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j} = -\int_0^T (A^{-1}(t, \xi(t))\, \varphi_k(t, \xi(t)),\ \varphi_j(t, \xi(t)))\, dt, \qquad k, j = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Пусть

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \left\{\frac{\partial L}{\partial \alpha_1}, \ \ldots, \ \frac{\partial L}{\partial \alpha_n}\right\},$$

$$\eta_T = \left\{\frac{1}{T} \int_0^T (A^{-1}(t, \xi(t))\, \varphi_k(t, \xi(t)),\ d\xi(t) - a(t, \xi(t))\, dt), \qquad k = \overline{1, n}\right\},$$

$$\mathrm{B}_T = \left\| \frac{1}{T} \int_0^T (A^{-1}(t, \xi(t))\, \varphi_k(t, \xi(t)),\ \varphi_j(t, \xi(t)))\, dt \right\|, \qquad k, j = \overline{1,\ n},$$

$$\mathrm{I}_T = M_\alpha \mathrm{B}_T.$$

(Существование фигурирующих здесь интегралов и математических ожиданий обеспечивается условиями взаимной абсолютной непрерывности мер μ_α и μ_0). Символ $M_\alpha(\cdot)$ означает математическое ожидание при условии, что процессу $\xi(t)$ соответствует мера μ_α. Тогда уравнение правдоподобия принимает вид

$$\eta_T - B_T \alpha = 0 \tag{8}$$

и является линейным. Пусть меры μ_α и μ_0 взаимно абсолютно непрерывны при всех $T > 0$.

Теорема 2. Если выполнены условия (при $T \to \infty$):

1) $$\frac{1}{T} \int_0^T (A^{-1}(t, \xi(t))\, \varphi_k(t, \xi(t)),\ \varphi_j(t, \xi(t)))\, dt \xrightarrow{p} b_{kj},$$

2) $$\frac{1}{T} \int_0^T M_\alpha (A^{-1}(t, \xi(t))\, \varphi_k(t, \xi(t)),\ \varphi_j(t, \xi(t)))\, dt \to b_{kj},$$

где $|b_{kj}| < \infty$ и $\| b_{kj} \|_{k,j=\overline{1,n}} = \mathrm{I}$*) — невырожденная матрица, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T_\varepsilon > 0$ такое, что при $T > T_\varepsilon$ с вероятностью не меньшей $1 - \varepsilon$ уравнение правдоподобия (8) имеет единственное решение $\hat{\alpha}_T$, являющееся состоятельной оценкой вектора α; распределение вектора $\sqrt{T}(\hat{\alpha}_T - \alpha)$ сводится к нормальному закону с нулевым средним и ковариационной матрицей I^{-1}.

Доказательство. Первое утверждение теоремы доказывается точно так же, как соответствующее утверждение в одномерном случае [5].

Для доказательства асимптотической нормальности оценки м. п. рассмотрим предельное распределение вектора $\frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial L}{\partial \alpha}$.

Он представим в виде

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^T (A^{-\frac{1}{2}}(t, \xi(t))\, \varphi_k(t, \xi(t)),\ dw(t)), \qquad k = \overline{1, n} \right\},$$

*) В обозначениях b_{kj} и I не указывается их зависимость от параметра α.

и для него в силу условий теоремы выполнены соотношения

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T \left(A^{-\frac{1}{2}}(t, \xi(t))\,\varphi_k(t, \xi(t)),\ A^{-\frac{1}{2}}(t, \xi(t))\,\varphi_j(t, \xi(t))\right) dt \xrightarrow{p} b_{kj},$$

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T M_\alpha\left(A^{-\frac{1}{2}}(t, \xi(t))\,\varphi_k(t, \xi(t)),\ A^{-\frac{1}{2}}(t, \xi(t))\,\varphi_j(t, \xi(t))\right) dt \to b_{kj}.$$

Тогда на основании теоремы 1 распределение вектора $\frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial L}{\partial \alpha}$ сходится к нормальному закону со средним нуль и ковариационной матрицей J.

Лемма. Если при $t \to t_0$ выполняются условия:

1) $D_t \xrightarrow{p} D$, где D — неслучайная невырожденная матрица;

2) $P(|\zeta_t^{(j)}| > M) \to 0$ при $M \to \infty$ равномерно по всем t из области изменения, $j = \overline{1, n}$;

3) $\zeta_t \Rightarrow \zeta$ (символ $\Rightarrow$ означает слабую сходимость распределений), то $D_t\zeta_t \Rightarrow D\zeta$.

Доказательство этой леммы имеется в работе [5].

Из (8) получаем

$$\sqrt{T}(\hat{\alpha}_T - \alpha) = B_T^{-1}\frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial L}{\partial \alpha}. \qquad (9)$$

В силу условий теоремы $B_T^{-1} \xrightarrow{p} \mathrm{I}^{-1}$. Используя неравенство Чебышева, получаем

$$P\left\{\left|\frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial L}{\partial \alpha_j}\right| > M\right\} \leqslant \frac{1}{M^2 T}\int\limits_0^T M_\alpha\left(A^{-1}(t, \xi(t))\,\varphi_j(t, \xi(t)),\ \varphi_j(t, \xi(t))\right) dt.$$

Непрерывные функции $\frac{1}{T}\int\limits_0^T M_\alpha\left(A^{-1}(t, \xi(t))\,\varphi_j(t, \xi(t)),\ \varphi_j(t, \xi(t))\right) dt$, $j = \overline{1, n}$, ограничены на $[0, \infty)$ в силу условия 2) теоремы 2, поэтому $P\left\{\left|\frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial L}{\partial \alpha_j}\right| > M\right\} \to 0$ при $M \to \infty$ равномерно по T. Применением леммы к правой части равенства (9) доказательство теоремы завершается.

Пусть коэффициент переноса и оператор диффузии в уравнении (4) зависят только от x: $a(t, x) \equiv a(x)$, $\varphi_k(t, x) \equiv \varphi_k(x)$,

$k=\overline{1, n}$, $A(t, x) \equiv A(x)$. Решением такого уравнения будет однородный диффузионный марковский процесс. Предположим, что он возвратный и при каждом $\alpha \in K$ обладает эргодическим распределением $G_\alpha(x)$.

Теорема 2'. Если норма оператора $A(x)$ и нормы функций $\varphi_k(x)$ ограничены, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T_\varepsilon > 0$ такое, что при $T > T_\varepsilon$ с вероятностью не меньшей $1-\varepsilon$ уравнение правдоподобия имеет единственное решение $\widehat{\alpha}_T$, являющееся состоятельной оценкой вектора α; распределение вектора $\sqrt{T}(\widehat{\alpha}_T-\alpha)$ сходится к нормальному закону с нулевым средним и ковариационной матрицей, обратной к матрице

$$\left\| \int (A^{-1}(x)\varphi_k(x), \varphi_j(x))\, dG_\alpha(x) \right|_{k,j=\overline{1,n}}.$$

Действительно, в силу условий теоремы функции $(A^{-1}(x)\varphi_k(x), \varphi_j(x))$, $k, j = \overline{1, n}$, ограничены. Из эргодичности процесса $\xi(t)$ вытекают [3] соотношения

$$\frac{1}{T}\int_0^T (A^{-1}(\xi(t))\varphi_k(\xi(t)), \varphi_j(\xi(t)))\, dt \to \int (A^{-1}(x)\varphi_k(x), \varphi_j(x))\, dG_\alpha(x)$$

с вероятностью единица и

$$\frac{1}{T}\int_0^T M_\alpha(A^{-1}(\xi(t))\varphi_k(\xi(t)), \varphi_j(\xi(t)))\, dt \to$$

$$\to \int (A^{-1}(x)\varphi_k(x), \varphi_j(x))\, dG_\alpha(x).$$

Из линейной независимости функций $\varphi_k(x)$ на R^m вытекает линейная независимость функций $A^{-\frac{1}{2}}(x)\varphi_k(x)$. В самом деле, если $\{c_1, \ldots, c_n\} \neq \{0, 0, \ldots, 0\}$, то вектор $A^{-\frac{1}{2}}(x)\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)$ не будет тождественно нулевым вследствие невырожденности оператора $A^{-\frac{1}{2}}(x)$. При этом матрица

$$\left\| \frac{1}{T}\int_0^T (A^{-1}(x)\varphi_k(x), \varphi_j(x))\, dG_\alpha(x) \right\|_{k,j=\overline{1,n}}$$

будет матрицей Грамма системы функций $\frac{1}{\sqrt{T}} A^{-\frac{1}{2}}(x)\,\varphi_k(x)$, $k=\overline{1, n}$, и будет, следовательно, положительно определенной. Таким образом, оказываются выполненными условия теоремы 2.

Теперь предположим, что $A(t, x) \equiv A(t)$ и $\varphi_k(t, x) \equiv \varphi_k(t)$, $k=\overline{1, n}$. Уравнение правдоподобия принимает вид

$$\eta_T - \mathrm{I}_T \alpha = 0, \tag{8'}$$

так как $\mathrm{B}_T = \mathrm{I}_T = \left\| \frac{1}{T} \int\limits_0^T (A^{-1}(t)\,\varphi_k(t), \varphi_j(t)\,dt \right\|$.

Теорема 3. Решение $\hat{\alpha}_T$ уравнения правдоподобия (8′) является эффективной оценкой м. п. Вектор $\sqrt{T}(\hat{\alpha}_T - \alpha)$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей I_T^{-1}.

Доказательство. Матрица I_T положительно определена как матрица Грамма линейно независимой системы функций $\frac{1}{\sqrt{T}} A^{-\frac{1}{2}}(t)\,\varphi_k(t)$, $k=\overline{1, n}$, поэтому уравнение (8′) имеет единственное решение $\hat{\alpha}_T = \mathrm{I}_T^{-1}\eta_T$. Оценка $\hat{\alpha}_T$ будет несмещенной, что видно из следующей цепочки равенств:

$$M_\alpha \hat{\alpha}_T = M_\alpha \mathrm{I}_T^{-1}\eta_T = \mathrm{I}_T^{-1} M_\alpha \eta_T = \mathrm{I}_T^{-1} M_\alpha \left(\mathrm{I}_T \alpha + \frac{1}{T}\frac{\partial L}{\partial \alpha} \right) =$$

$$= \mathrm{I}_T^{-1}\mathrm{I}_T \alpha + \frac{1}{T} \mathrm{I}_T^{-1} M_\alpha \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \alpha.$$

Найдем распределение вектора

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \int\limits_0^T (A^{-\frac{1}{2}}(t)\,\varphi_k(t), dw(t)), \qquad k=\overline{1, n} \right\}.$$

Пусть $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — произвольный вектор из R^n. Обозначим через $\psi(s; \lambda)$ характеристическую функцию линейной комбинации $\left(\lambda, \frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right)$ компонент вектора $\frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial L}{\partial \alpha}$. Введем еще обозначения $\Phi^{(k)}(t) = \{\Phi_1^{(k)}(t), \ldots, \Phi_m^{(k)}(t)\} = A^{-\frac{1}{2}}(t)\,\varphi_k(t)$, $k=\overline{1, n}$, и

$\Phi_j(t) = \{\Phi_j^{(1)}(t), \ldots, \Phi_j^{(n)}(t)\}$, $j = \overline{1, m}$. Таким образом, можем записать

$$\psi(s; \lambda) = M_\alpha \exp\left\{is\left(\lambda, \frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right)\right\} =$$
$$= M_\alpha \exp\left\{is\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T (\Phi_j(t), \lambda)\, dw_j(t)\right\}.$$

Случайные величины $\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T (\Phi_j(t), \lambda)\, dw_j(t)$ независимы и имеют нормальные распределения с нулевым средним и дисперсией, равной $\frac{1}{T}\int_0^T (\Phi_j(t), \lambda)^2\, dt$. Поэтому

$$\psi(s; \lambda) = \exp\left\{-\frac{s^2}{2}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{T}\int_0^T (\Phi_j(t), \lambda)^2\, dt\right\} = \exp\left\{-\frac{s^2}{2}(\mathrm{I}_T\lambda, \lambda)\right\}. \tag{10}$$

При $s = 1$ $\psi(s; \lambda)$ является характеристической функцией вектора $\frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial L}{\partial \alpha}$, и правая часть равенства (10) показывает, что он нормально распределен с нулевым средним и ковариационной матрицей I_T. Так как $\sqrt{T}(\hat{\alpha}_T - \alpha) = I_T^{-1}\frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial L}{\partial \alpha}$, то вектор $\sqrt{T}(\hat{\alpha}_T - \alpha)$ также будет нормально распределенным с нулевым средним и ковариационной матрицей I_T^{-1}.

Согласно неравенству Крамера—Рао—Фреше, для ковариационной матрицы B вектора $\sqrt{T}(\alpha_T^* - \alpha)$, где α_T^* — какая-то несмещенная оценка вектора α, имеем $B \geqslant I_T^{-1}$. Для оценки м. п. $\hat{\alpha}_T$, как показано выше, в этом неравенстве достигается равенство. Это означает ее эффективность. Теорема доказана.

Применим наши результаты к одной геофизической задаче.

Известно, что мгновенная ось вращения Земли перемещается относительно малой оси земного эллипсоида. Это перемещение состоит из периодической и флуктуационной частей. Последнюю можно приближенно считать стационарным решением системы стохастических уравнений вида [6]

$$\begin{aligned} d\xi(t) &= -\lambda\xi(t)\, dt - \omega\eta(t)\, dt + \sqrt{a}\, dw_1(t), \\ d\eta(t) &= \omega\xi(t)\, dt - \lambda\eta(t)\, dt + \sqrt{a}\, dw_2(t), \end{aligned} \tag{11}$$

в которой $w_1(t)$ и $w_2(t)$ — два независимых стандартных винеровских процесса, а параметры λ и ω, вообще говоря, неизвестны. Систему (11) можно записать в виде одного уравнения

$$d\zeta(t) = -\gamma\zeta(t)\,dt + \sqrt{a}\,dw(t), \tag{11'}$$

положив $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, $w(t) = w_1(t) + iw_2(t)$, $\gamma = \lambda - i\omega$. Комплексная корреляционная функция процесса $\zeta(t)$ имеет вид $\frac{a}{\lambda}\exp\{-\lambda|\tau| - i\omega\tau\}$. Используя результаты службы наблюдения за перемещением полюса Земли [7], можно строить оценки параметров λ и ω.

Выбирая в рассматриваемом случае в качестве «мажорирующей» меры меру, отвечающую решению системы с нулевыми параметрами и начальным значением, распределение которого совпадает с распределением наблюдаемой пары $\{\xi(t), \eta(t)\}$, получаем

$$L = -\frac{1}{a}\int_0^T [\lambda\xi(t) + \omega\eta(t)]\,d\xi(t) + \frac{1}{a}\int_0^T [\omega\xi(t) - \lambda\eta(t)]\,d\eta(t) -$$

$$-\frac{1}{2a}\int_0^T [\lambda\xi(t) + \omega\eta(t)]^2\,dt - \frac{1}{2a}\int_0^T [\omega\xi(t) - \lambda\,\eta(t)]^2\,dt,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\lambda^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial\omega^2} = -\frac{1}{a}\int_0^T |\zeta(t)|^2\,dt, \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial\lambda\,\partial\omega} = 0.$$

Для оценок м. п. параметров λ и ω получаем формулы

$$\hat{\lambda}_T = -\int_0^T [\xi(t)\,d\xi(t) + \eta(t)\,d\eta(t)] : \int_0^T |\zeta(t)|^2\,dt,$$

$$\hat{\omega}_T = \int_0^T [\xi(t)\,d\eta(t) - \eta(t)\,d\xi(t)] : \int_0^T |\zeta(t)|^2\,dt. \tag{12}$$

Для стационарного процесса $\zeta(t)$ имеем $\frac{1}{aT}\int_0^T M|\zeta(t)|^2\,dt = \frac{1}{\lambda}$,

а в силу его эргодичности

$$\frac{1}{aT}\int_0^T |\zeta(t)|^2\,dt \to \frac{1}{\lambda}$$

с вероятностью 1. На основании теоремы 2 оценки (12) состоятельны, и векторная величина $\sqrt{T}\{\widehat{\lambda}_T-\lambda,\ \widehat{\omega}_T-\omega\}$ асимптотически нормальна с нулевым средним и ковариационной матрицей $\left\|\begin{matrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{matrix}\right\|$. Заметим, что указанная оценка параметра ω совпадает с найденной [6], в то время как оценка параметра «затухания» λ в нашем случае имеет более простой вид. Кроме того, оценки, определяемые по формулам (12), асимптотически независимы.

В заключение выражаю глубокую благодарность научному руководителю И. И. Гихману за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. К., «Наукова думка», 1968.

2. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. Гостехиздат, М., 1956.

3. Хасьминский Р. З. Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов и стабилизация решений задачи Коши для параболических уравнений.— Теория вер. и ее примен., **5**, вып. 2, 1960.

4. Гихман И. И., Скороход А. В. О плотностях вероятностных мер в функциональных пространствах.— УМН, **21**, вып. 6 (132), 1966.

5. Тараскин А. Ф. Об асимптотической нормальности стохастических интегралов и оценках коэффициента переноса диффузионного процесса. (В печати).

6. Арато М., Колмогоров А. Н., Синай Я. Г. Об оценке параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса.— ДАН СССР, **146**, № 4, 1962.

7. Орлов А. Я. Служба широты. Изд-во АН СССР, М., 1958.

8. Холево А. С. Оценки параметров сноса диффузионного процесса методом стохастической аппроксимации.— В сб.: Исследования по теории самонастраивающихся систем. Изд-во АН СССР, М., 1967.

A. F. Taraskin

ON THE ASYMPTOTIC NORMALITY OF THE VECTORIAL STOCHASTIC INTEGRALS AND THE ESTIMATES DRIFT-PARAMETERS FOR THE MULTIDIMENSIONAL DIFFUSION PROCESS

Summary

Let $F(s)$ be a matrix random function for which the Ito stochastic integral $\int_0^t F(s)\,dw(s)$ is defined for each $t>0$, where $w(s)$ is the Wiener process with independent components. The sufficient conditions for asymptotic normality of a random variable $\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t F(s)\,dw(s)$ are obtained. This result is used to prove asymptotic normality of the maximum likelyhood estimates for the parameters of a diffusion process.

Поступила в редакцию 8.IV. 1969.