Д. В. ЧУДНОВСКИЙ, студ.
Киевский университет

ЛОГИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ НА БУЛЕВЫХ АЛГЕБРАХ

В работе исследуются некоторые свойства вероятности на языке первого порядка над моделью и условной вероятности в смысле Реньи на булевых алгебрах [2]. Приведено следствие из теоремы компактности для вероятностной логики [1], дающее критерий существования логической вероятности, удовлетворяющей бесконечному числу дополнительных условий. С помощью теоремы компактности языка первого порядка даются ответы на некоторые вопросы [3].

Приводится критерий существования на булевой алгебре σ-аддитивной условной вероятности.

I. Рассмотрим логическую вероятность над моделью $\mathfrak{A}$ (см. [1]) как функцию из множества всех формул языка первого порядка над моделью в отрезок [0, 1]. Предполагается, что логическая вероятность $\mu\mathfrak{A}$ удовлетворяет требованиям, сформулированным в работе [1].

Если $\mathfrak{A}$ — модель языка первого порядка, $\mu_{\mathfrak{A}}$ — вероятность на $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}^{\mu}$ — модель вероятностной логики L^{μ} [1]. Полагаем $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}^{\mu}) \in [0, 1]^{\Sigma_{\mu}}$, где $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}^{\mu})$ определяется так: $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}^{\mu})(\varphi) = \mu_{a}\ (\varphi)$, если φ — аксиома (т. е. $\varphi \in \Sigma_{\mu}$).

Определяем так же, как и в [1]:

$$\mathrm{Th}(K) = \{\mathrm{Th}(\mathfrak{A}^{\mu}) : \mathfrak{A}^{\mu} \in K\},$$

и если $S \subseteq [0, 1]^{\Sigma_{\mu}}$, то $\mathrm{Mod}(S) = \{\mathfrak{A}^{\mu} : \mathrm{Th}(\mathfrak{A}^{\mu}) \in S\}$. Класс K вероятностных моделей определим в L^{μ}, если существует такое замкнутое подмножество $S \subseteq [0, 1]^{\Sigma_{\mu}}$, что $K = \mathrm{Mod}(S)$.

Теорема 1 [1]. Если класс K — определим в L^{μ}, то $\mathrm{Th}(K)$ — замкнутое подмножество в $[0, 1]^{\Sigma_{\mu}}$.

Этот результат доказывается с помощью ультрапроизведений. Из теоремы 1 выводится следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть A — совокупность условий вида $\mu(\varphi)=r$, где $\varphi\in\Sigma_\mu$, $r\in[0, 1]$. Тогда существует модель, на которой система A выполняется, если для всякой конечной подсистемы A' системы A существует модель, на которой она выполняется.

Доказательство. Пусть для всякой конечной подсистемы A' системы A существует модель $\mathfrak{A}_{A'}$, такая, что $\mu_{\mathfrak{A}_{A'}}(\varphi)=r$, если $\mu(\varphi)=r$ — условие из системы A. Положим $A=\{\mu(\varphi_\xi)=r_\xi:\xi<\alpha\}$. Пусть

$$S=\{f\in[0. 1]^{\Sigma_\mu}:f(\varphi_\xi)=r_\xi \text{ для } \xi<\alpha\},$$

и для любого конечного подмножества Γ множества α

$$S_\Gamma=\{f\in[0, 1]^{\Sigma_\mu}:f(\varphi_\xi)=r_\xi \text{ для } \xi\in\Gamma\}.$$

Тогда $\bigcap S_\Gamma=S$ и S_Γ замкнуто в $[0, 1]^{\Sigma_\mu}$.

Согласно теореме 1, $\mathrm{Th}(M)$ — замкнуто в $[0, 1]^{\Sigma_\mu}$, где M — класс всех вероятностных моделей. Значит, $\mathrm{Th}(M)$ — компактное подпространство $[0, 1]^{\Sigma_\mu}$. Покажем, что совокупность множеств вида $S_\Gamma\bigcap \mathrm{Th}(M)$ — центрированная. Имеем

$$S_{\Gamma_1}\bigcap S_{\Gamma_2}\bigcap \mathrm{Th}(M)=S_{\Gamma_1\cap\Gamma_2}\bigcap \mathrm{Th}(M)\neq\varnothing$$

по условию. Значит,

$$\bigcap S_\Gamma\bigcap \mathrm{Th}(M)=S\bigcap \mathrm{Th}(M)\neq\varnothing.$$

Тогда существует такая модель $\mathfrak{A}^\mu$, что $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}^\mu)\in S$, т. е. на $\mathfrak{A}^\mu$ выполняется множество условий A.

Кроме того, аналог теоремы 2 имеет место и в том случае, если A состоит из условий вида $\mu(\varphi)\in X$, где $\varphi\in\Sigma_\mu$ и X — замкнуто в $[0, 1]$.

Теорема 2 может быть применена для исследования вероятностных моделей $\mathfrak{A}^\mu$, где $\mathfrak{A}=\langle A, \in\rangle$ — модель теории множеств. Например, из теоремы 2 могут быть просто выведены некоторые результаты [5].

II. Рассмотрим булевы алгебры (т. е. дистрибутивные структуры с дополнениями), как модели сигнатуры $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\wedge$, $\vee$, —, символы которой соответствуют $\varnothing$, $\cap$, $\cup$, $\setminus$. Символы Σ и Π соответствуют символам $\bigcap$ и $\bigcup$ в булевой алгебре. Конечно (или счетно) аддитивная вероятность на булевой алгебре B — это конечно (или счетно) аддитивная нормированная мера на B.

Действительнозначная функция $p(\cdot|\cdot)$ на $B\times(B\setminus\{\bar{0}\})$ называется конечно (или счетно) аддитивной вероятностью (см. [3]), если: 1) $p(\cdot\,|\,y)$ — конечно (или счетно) аддитивная вероятность на B для

$y \in B \setminus \{\bar{0}\}$ и $p(y \mid y) = 1$; 2) для любых $x, y, z \in B$ при $x \wedge z \neq \bar{0}$

$$p(x \wedge y \mid z) = p(x \mid z)\, p(y \mid x \wedge z)^{*)}.$$

Нетрудно заметить, что если m — строго положительная неархимедовская вероятность на B со значениями в упорядоченном расширении F поля R и $p(x \mid y) = \left(\frac{m(x \wedge y)}{m(y)}\right)_R$ для $y \neq \bar{0}$, то p — условная вероятность на B (определение x_R см. [3]).

Используя теоретико-модельный прием, можно показать и обратный факт.

Замечание 1 [3]. Если p—условная вероятность на булевой алгебре B, то существует упорядоченное поле F, являющееся расширением поля действительных чисел R, и строго положительная вероятность m на B со значениями в F такие, что $p(x \mid y) = \left(\frac{m(x \wedge y)}{m(y)}\right)_R$ для $x, y \in B$, $y \neq \bar{0}$. Это замечание доказывается с помощью теоремы компактности языка первого порядка.

Замечание 2 (ср. [3]). Конечноаддитивная условная вероятность на подалгебре A булевой алгебры B распространяется до условной вероятности на всей булевой алгебре B.

Замечание 2 — это аналог известной теоремы Хорна—Тарского о том, что конечноаддитивная вероятность распространяется с подалгебры булевой алгебры на всю алгебру.

Очень сложным является вопрос о том, когда на булевой алгебре вообще существует σ-аддитивная нетривиальная условная вероятность и когда σ-аддитивная условная вероятность может быть распространена с подалгебры булевой σ-алгебры на всю алгебру (см. [3]).

Существуют простые примеры булевых σ-алгебр, на которых нет никакой σ-аддитивной условной вероятности. Кроме того [3], в общем случае σ-аддитивная условная вероятность на булевой σ-алгебре B не определяется ее значениями на подалгебре A алгебры B, которая σ порождает B.

Однако в некоторых случаях теоретико-модельные методы дают ответ на поставленный выше вопрос.

Пусть α — такой несчетный кардинал, что всякий α-полный фильтр над произвольным множеством расширяется до α-полного ультрафильтра над этим же множеством (т. е. $\alpha \notin C_2$ [4]). Тогда в языке L_α, содержащем язык L и допускающем конъюнкции и дизъюнкции $<\alpha$ формул и квантификации $<\alpha$ переменных, выполняется аналог теоремы компактности [4]: если Σ — множество аксиом L_α и всякая часть Σ мощности $<\alpha$ имеет модель, то и Σ имеет модель.

---

*) В [2] приводится определение условной вероятности над ${}^{\prime} \times A$, где $A \subseteq B \setminus \{\bar{0}\}$. Результаты настоящей работы можно обобщить и на случай такой условной вероятности.

Теорема 3. Пусть на всякой подалгебре A булевой σ-алгебры B мощности $<\alpha$ существует σ-аддитивная условная вероятность. Тогда и на B существует σ-аддитивная условная вероятность.

Доказательство. Будем рассматривать модели сигнатуры $\{\bar{0}, \bar{1}, \wedge, \vee\} \cup \{m\} \cup \sigma_R \cup \{b_\xi : \xi < \beta\}$, где $\bar{0}, \bar{1}, \wedge, \vee$ — символы булевой алгебры, σ_R — сигнатура $\{0, 1, +, \times, \leqslant, \ldots, r, \ldots\}_{r \in R}$, соответствующая полю R, m — трехместный предикат, а $b_\xi : \xi < \beta$ — нумерация элементов B ($\bar{\bar{B}} = \beta$). Пусть множество Σ аксиом L_α состоит из следующих групп.

Σ_1: описание B в терминах $b_\xi : \xi < \alpha$ и $\{\bar{0}, \bar{1}, \wedge, \vee\}$. Например, если $c, a, b \in B, a \wedge b = c$ и $b_{\xi_1}, b_{\xi_2}, b_{\xi_3}$ соответствуют a, b и c, то формула $b_{\xi_1} \wedge b_{\xi_2} = b_{\xi_3}$ включается в Σ_1.

$$\Sigma_2 : \forall z \, (m \, (b_\zeta, b_\xi, z) \to \bigvee_{r \in R} z = r); \; m \, (\bar{0}, b_\xi, 0);$$

$$m \, (\bar{1}, b_\xi, 1); \; \forall z \, (m \, (b_\zeta, b_\xi, z) \to z \geqslant 0); \; m \, (b_\xi, b_\xi, 1);$$

$$\forall x \, \{m \, (b_\zeta \wedge b_\eta, b_\mu, x) \leftrightarrow \exists y \exists z \, (x = y \times z \, \& m \, (b_\zeta, b_\mu, y) \, \&$$

$$\& m \, (b_\eta, b_\zeta \wedge b_\mu, z))\};$$

$$\forall x \forall y \, (m \, (b_\zeta, b_\xi, y) \, \& \, m \, (b_\zeta, b_\xi, x) \to x = y)$$

для всех $b_\xi \neq \bar{0}$, $b_\zeta \wedge b_\mu \neq \bar{0}$ и $\zeta, \mu, \eta < \beta$.

Σ_3: аксиомы языка L_α сигнатуры $\sigma_R \cup \{\Sigma, m\} \cup \{b_\xi : \xi < \beta\}$, показывающие, что

$$\forall x \, (m \, (b_\xi, \sum_{n < \omega} b_{\xi_n}, x) \leftrightarrow \exists y_1 \cdots \exists y_n \cdots \big(\mathop{\&}_{n < \omega} m \, (b_\xi, b_{\xi_n}, y) \, \& x = \sum_{n < \omega} y_n \big) \big),$$

где $b_{\xi_n} \wedge b_{\xi_k} = \bar{0}$ для $n \neq k < \omega$.

Для того чтобы на B существовала σ-аддитивная условная вероятность, система $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ должна быть совместна. Так как Σ — система аксиом L_α, то достаточно показать, что всякая часть Σ' системы Σ мощности $<\alpha$ — совместима. В Σ' встречается $<\alpha$ символов b_ξ; тогда из условия теоремы вытекает совместимость всякой Σ', а, значит, и Σ.

Если предположить, что $\alpha \notin C_1$ в смысле [4], то теорема 3 верна при $\bar{\bar{B}} = \alpha$. Метод доказательства теоремы 3 может быть применен и для получения других результатов о σ-аддитивной условной вероятности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чудновський Д. В. Імовірність на логіках першого ступеня.—ДАН УРСР, 1968, № 1.
2. Renyi A. On a new axiomatic theory of probability.— Acta Math., 1955, 6, N 4.
3. Krauss P. Representation of conditional probability.— Acta Math., 19, 229, 1968.
4. Keisler H. J., Tarski A. From accessible to inaccessible cardinals.— Fund. Math., 53, 1964.
5. Chang C. C. Infinite valued logic as a basis for set theory.—II International congress for logic.

D. V. Choodnovsky

LOGICAL PROBABILITY AND CONDITIONAL PROBABILITY ON BOOLEAN ALGEBRAS

Summary

This work investigates some properties of logical probability defined on first order language on a model and also the properties of conditional probability in the sense of Renyi on Boolean algebras.

Поступила в редакцию 15.IV 1969.