Д. ШАГДАР, асп.
Киевский университет

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ КРИТЕРИИ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Пусть в пространстве реализаций $L_2[a, b]$ некоторого действительного гауссовского случайного процесса $\xi(t)$ заданы две гауссовские меры μ_1 и μ_2 со средними значениями, равными нулю, и корреляционными функциями $r_1(s, t)$, $r_2(s, t)$ соответственно.

Задача заключается в выборе одной из двух гипотез H_1 и H_2, утверждающих, что процессу $\xi(t)$ соответствует мера $\mu_i (i=1, 2)$.

Известно, что две гауссовские меры либо эквивалентны, либо ортогональны [1]. В том случае, когда меры μ_1, μ_2 ортогональны, гипотезы различаются по одному наблюдению реализации с вероятностью единица. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\lambda \int_a^b r_2(s, t)\varphi(t)\,dt = \int_a^b r_1(s, t)\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

и предположим, что существует последовательность решений $\{\varphi_k(t)\}$ с соответствующей последовательностью собственных чисел $\lambda_k \to 1$. Если умножим обе части интегрального уравнения

$$r_2(s, t) - r_1(s, t) = \int_a^b r_1(s, u)\,c(u, t)\,du \tag{2}$$

на $\varphi_k(s)$ (где $c(u, t)$ — интегрируемая с квадратом функция) и проинтегрируем, то получим

$$\frac{1-\lambda_k}{\lambda_k} g_k(t) = \int_a^b c(u, t)\,g_k(u)\,du,$$

где $g_k(s) = \int_a^b r_2(s, t)\varphi_k(t)\,dt$, т. е. $g_k(t)$ есть левая собственная функция ядра $c(s, t)$.

Заметим, что последовательности $\{\varphi_k(t)\}$ и $\{g_k(t)\}$ образуют биортогональную систему. Действительно,

$$\int_a^b \varphi_j(s)\, g_k(s)\, ds = \int_a^b \int_a^b r_2(s, t)\, \varphi_j(s)\, \varphi_k(t)\, ds dt =$$

$$= \lambda_j^{-1} \int_a^b \int_a^b r_1(s, t)\, \varphi_j(s)\, \varphi_k(t)\, ds dt =$$

$$= \lambda_k^{-1} \int_a^b \int_a^b r_1(s, t)\, \varphi_j(s)\, \varphi_k(t)\, ds dt = \begin{cases} 0 \text{ при } j \neq k \\ a_k \text{ при } j = k \end{cases}. \qquad (3)$$

Нормируем $\varphi_k(t)$ так, чтобы

$$\int_a^b g_k(t)\, \varphi_k(t)\, dt = 1. \qquad (4)$$

Легко заметить, что функция $c(s, t)$ имеет разложение

$$c(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \lambda_k}{\lambda_k}\, \varphi_k(s)\, g_k(t). \qquad (5)$$

Если в качестве наблюдаемых координат взяты величины

$$x_k = \int_a^b \xi(t)\, \varphi_k(t)\, dt,$$

то они образуют последовательность независимых, нормально распределенных случайных величин относительно обеих гипотез. Если через M_i и D_i $(i=1, 2)$ обозначить знак математического ожидания и дисперсии, соответствующие мере μ_i, то в силу (3) и (4) x_k имеет следующие характеристики:

$$M_1 x_k = 0,$$

$$D_1 x_k = \int_a^b \int_a^b r_1(s, t)\, \varphi_k(t)\, \varphi_k(s)\, ds dt = \lambda_k$$

по гипотезе H_1,

$$M_2 x_k = 0,$$

$$D_2 x_k = \int_a^b \int_a^b r_2(s, t) \varphi_k(s) \varphi_k(t) ds dt = 1,$$

по гипотезе H_2. Следовательно, отношение правдоподобия

$$s(x_1, \ldots, x_n) = (\Pi\lambda_k)^{1/2} \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda_k}{\lambda_k}x_k^2\right\}.$$

Предположим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}|1-\lambda_k| < \infty. \tag{6}$$

Условия (6) обеспечивают абсолютную сходимость бесконечного произведения $\prod_{k=1}^{\infty}\lambda_k$. Кроме того, существует много равносильных друг другу условий эквивалентности гауссовых мер [2—4]. Например, если

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-\lambda_k)^2}{\lambda_k} < \infty, \tag{7}$$

то гауссовские меры эквивалентны. При условии (7) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\lambda_k}{\lambda_k}x_k^2$$

сходится по той и другой мере, так как ряды

$$M_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\lambda_k}{\lambda_k}x_k^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-\lambda_k),$$

$$D_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\lambda_k}{\lambda_k}x_k^2\right) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-\lambda_k{}^2)}{\lambda_k}$$

$$M_2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\lambda_k}{\lambda_k}x_k^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\lambda_k}{\lambda_k},$$

$$D_2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\lambda_k}{\lambda_k}x_k^2\right) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-\lambda_k}{\lambda_k}\right)^2$$

сходятся. Следовательно, наилучшая критическая область для гипотезы H_1 относительно альтернативы H_2 будет определяться неравенством [5]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\lambda_k}{\lambda_k} x_k^2 \geqslant c. \tag{8}$$

Этому критерию придадим более удобную форму. Считая известным решение $c(s, t)$ уравнения (2), определяем случайную функцию $\eta(t)$ следующим образом:

$$\eta(t) = \int_a^b c(s, t)\, \xi(s)\, ds. \tag{9}$$

Если существует решение для интегрального уравнения

$$\int_a^b r_2(s, t)\, \zeta(s)\, ds = \eta(t), \tag{10}$$

то интеграл

$$\int_a^b \xi(s)\, \zeta(s)\, ds$$

дает такую же случайную величину, как и левая часть (8). Действительно, пользуясь разложением (5) и равенством

$$\int_a^b r_2(s, t)\, \varphi_k(t)\, dt = g_k(s),$$

получим

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\lambda_k}{\lambda_k} x_k g_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\lambda_k}{\lambda_k} x_k \int_a^b r_2(s, t)\, \varphi_k(s)\, ds =$$

$$= \int_a^b r_2(s, t) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\lambda_k}{\lambda_k} x_k \varphi_k(s)\right] ds.$$

Сравнивая последнее с (10), имеем

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\lambda_k}{\lambda_k} x_k \varphi_k(s).$$

Следовательно,

$$\int_a^b \xi(s)\, \zeta(s)\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\lambda_k}{\lambda_k} x_k \int_a^b \xi(s)\, \varphi_k(s)\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\lambda_k}{\lambda_k} x_k^2.$$

Таким образом, мы получили другую форму критерия для проверки рассматриваемых гипотез:

$$\int_a^b \xi(s)\,\zeta(s)\,ds \geqslant c. \tag{11}$$

Из предыдущих рассуждений ясно, что задача нахождения критерия (11) сводится к решению уравнения (2). Однако такое уравнение решается в явном виде лишь в исключительных случаях.

В настоящей работе предлагается один приближенный метод решения уравнения (2), позволяющий построить приближенный критерий для проверки гипотез о корреляционной функции гауссовского случайного процесса.

Если уравнение (2) имеет квадратично суммируемое решение, то последовательность, определяемая соотношением

$$c_n(s, t) = c_{n-1}(s, t) + \lambda \left[r_2(s, t) - r_1(s, t) - \int_a^b r_1(s, u)\, c_{n-1}(u, t)\, du \right], \tag{12}$$

сходится в среднем к решению уравнения (2). Здесь $c_0(s, t)$ — произвольная квадратично суммируемая на $[a, b] \times [a, b]$ функция,

$$0 < \lambda < \frac{1}{\beta_1} \tag{13}$$

и β_1 — наибольшее собственное число ядра $r_1(s, t)$.

Действительно, если положим в (12)

$$c_n(s, t) = c(s, t) + k_n(s, t),$$

то имеем

$$k_n(s, t) = k_n(s, t) - \lambda \int_a^b r_1(s, u)\, k_{n-1}(u, t)\, du.$$

Пусть $\{v_i(s)\}$ — ортонормированная полная система собственных функций ядра $r_1(s, t)$. Умножим обе части последнего равенства на $v_i(s)\, v_j(t)$ и проинтегрируем

$$\alpha_{ij}^n = \alpha_{ij}^{n-1} - \lambda \int_a^b \int_a^b v_i(s)\, v_j(t)\, ds\, dt \int_a^b r_1(s,u)\, k_{n-1}(u, t)\, du,$$

где

$$\alpha_{ij}^n = \int_a^b \int_a^b k_n(s, t)\, v_i(s)\, v_j(t)\, ds\, dt.$$

Так как

$$\int_a^b r_1(s, u)\, v_i(s)\, ds = \beta_i v_i(u),$$

то

$$\int_a^b \int_a^b v_i(s)\; v_j(t)\, ds\, dt \int_a^b r_1(s, u)\, k_{n-1}(u, t)\, du = \beta_i\, \alpha_{ij}^{n-1}.$$

Таким образом,

$$\alpha_{ij}^n = (1 - \beta_i \lambda)\, \alpha_{ij}^{n-1} = (1 - \lambda\beta_i)^n\, \alpha_{ij}^0 .$$

Подлежащий оценке интеграл

$$\int_a^b \int_a^b k_n^2(st)\, ds\, dt = \sum_{i,j=1}^{\infty} (\alpha_{ij}^n)^2 .$$

Ряд $\sum\limits_{i=p,j=q}^{\infty} (\alpha_{ij}^n)^2 = \sum\limits_{i=p,j=q}^{\infty} (1-\lambda\beta_i)^{2n} (\alpha_{ij}^0)^2$ мажорируется рядом $\sum\limits_{i=p,j=q}^{\infty} (\alpha_{ij}^0)^2$, так как на основании (13)

$$(1 - \lambda\beta_i)^2 < 1. \tag{14}$$

Следовательно, при любом наперед заданном малом $\varepsilon > 0$ могут быть указаны такие $p > p_0$, $q > q_0$, не зависящие от n, что

$$\sum_{i=p,j=q}^{\infty} (\alpha_{ij}^n)^2 < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Вместе с тем, выбрав $n > N(\varepsilon)$, можно получить следующее неравенство:

$$\sum_{i=1,\ j=1}^{i=p,\ j=q} (\alpha_{ij}^n)^2 = \sum_{i=1,\ j=1}^{i=p,\ j=q} (1 - \lambda\beta_i)^{2n} (\alpha_{ij}^0)^2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

так как при конечном i в формуле (14) имеет место знак неравенства. Таким образом,

$$\int_a^b \int_a^b k_n^2(s, t)\, ds\, dt < \varepsilon.$$

Наше утверждение доказано.

Определив функцию $\eta^{(n)}(t)$ равенством

$$\int_a^b c_n(s, t)\, \xi(s)\, ds = \eta^{(n)}(t), \tag{15}$$

рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_a^b r_2(s,\ t)\ \zeta^{(n)}(s)\, ds = \eta^{(n)}(t). \tag{16}$$

Если уравнение (16) имеет решение, то критерии с критической областью

$$\int_a^b \zeta^{(n)}(s)\, \xi(s)\, ds \geqslant c$$

можно рассматривать как приближенные, для которых при заданной вероятности ошибки первого рода вероятность ошибок второго рода стремится к минимальной при $n \to \infty$. Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что последовательность случайных величин $\int_a^b \zeta^{(n)}(s)\, \xi(s)\, ds$ сходится в среднем к случайной величине $\int_a^b \zeta(s)\, \xi(s)\, ds$, так как сходимость в среднем влечет за собой сходимость по распределению [6].

Пусть $\{u_k(t)\}$ есть ортонормированная система собственных функций ядра $r_2(s,\ t)$ и ν_k — соответствующие собственные числа. Если уравнения (10) и (16) имеют решение, то они соответственно имеют вид

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_a^b \eta(t)\, u_k(t)\, dt}{\nu_k}\, u_k(s),$$

$$\zeta^{(n)}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_a^b \eta^{(n)}(t)\, u_k(t)\, dt}{\nu_k}\, u_k(s).$$

Учитывая (9) и (15), имеем

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_a^b \int_a^b c(s,\ t)\, \xi(s)\, u_k(t)\, ds\, dt}{\nu_k}\, u_k(s),$$

$$\zeta^{(n)}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_a^b \int_a^b c_n(s,\ t)\, \xi(s)\, u_k(t)\, ds\, dt}{\nu_k}\, u_k(s).$$

Следовательно,

$$M_i\left|\int_a^b \xi(s)(\zeta(s)-\zeta^{(n)}(s))ds\right|^2 = M_i\left|\int_a^b \xi(s)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\int_a^b\int_a^b (c(s,t)-c_n(s,t))\,\xi(s)\,u_k(t)\,ds\,dt}{\nu_k}\,u_k(s)\right]ds\right|^2.$$

Применим теперь неравенство Коши—Буняковского несколько раз:

$$M_i\left[\int_a^b \xi(s)(\zeta(s)-\zeta^{(n)}(s))\,ds\right]^2 \leqslant M_i\int_a^b \xi^2(s)\,ds\times$$

$$\times\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\int_a^b\int_a^b (c(s,t)-c_n(s,t))\,\xi(s)\,u_k(t)\,ds\,dt}{\nu_k}\right]^2 ds =$$

$$= M_i\int_a^b \xi^2(s)\,ds\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[\int_a^b\int_a^b (c(s,t)-c_n(s,t))\,\xi(s)\,u_k(t)\,ds\,dt\right]^2}{\nu_k^2}\leqslant$$

$$\leqslant M_i\left(\int_a^b \xi^2(s)\,ds\right)^2\int_a^b\int_a^b (c_n(s,t)-c(s,t))^2\,ds\,dt\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_k^2}.$$

Если $\int_a^b M_i\,\xi^4(s)\,ds<\infty$, то правая часть полученного неравенства стремится к нулю при $n\to\infty$ в силу сходимости в среднем последовательности $\{c_n(s,t)\}$ к $c(s,t)$. Этим доказано наше утверждение.

Автор выражает глубокую благодарность проф. А. В. Скороходу за постановку задачи и руководство настоящей работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И. И. и Скороход А. В. О плотностях вероятностных мер в функциональных пространствах.— УМН, XXI, № 6, 1966.

2. Hajek J. A property of j-divergences of marginal probability distributions.— Чех. мат. журнал, 8, 1958.

3. Hajek J. On linear statistical problems in stochastic processes.— Чех. мат. журнал, 12, 1962.

4. Прохоров Ю. В. и Розанов Ю. А. Теория вероятностей. М., «Наука», 1967.

5. Гренандер У. Случайные процессы и статистические выводы. М., ИЛ, 1961.

6. Лоэв М. Теория вероятностей. ИЛ, М., 1962.

D. Shagdar

ON AN APPROXIMATE CRITERION FOR DISORIMINATE HYPOTHESIS FOR CORRELATION FUNCTIONS OF GAUSSIAN RANDOM PROCESS

Summary

The criterion with criterion region $\int\limits_a^b \zeta(s)\,\zeta(s)\,ds \geqslant c$ is constructed. The sequence of such criterions with criterion region $\int\limits_a^b \zeta^{(n)}(s)\,\zeta(s)\,ds \geqslant c$ is found. For this sequence probability of the error of second kind approaches to the minimum if probability of the error of first kind is given.

Поступила в редакцию 21.XII 1968.