А. Д. ШАТАШВИЛИ, ст. научн. сотр.
Донецкий ВЦ АН УССР

ОПТИМАЛЬНАЯ ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ И ФИЛЬТРАЦИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. I

§ 1. Введение

В настоящее время полностью (по крайней мере в теоретическом плане) решены задачи линейной экстраполяции и фильтрации случайных процессов.

В то же время линейная экстраполяция и фильтрация приводит к наилучшим оценкам только для случая гауссовских процессов. Даже в том случае, если процессы мало отличаются от гауссовских, есть все основания ожидать (а для некоторого класса процессов это установлено в предлагаемой работе), что порядок отклонения наилучших оценок от линейных равен порядку отклонения рассматриваемого процесса от гауссовского.

Изучение наилучших оценок в задачах экстраполяции и фильтрации осложняется необходимостью рассматривать все конечномерные распределения процессов. Поэтому задачи нахождения оптимальных оценок могут решаться эффективно лишь в том случае, если в замкнутой форме получена информация о всех конечномерных распределениях процесса.

Весьма удобной характеристикой, определяющей все распределения процессов, является плотность меры, соответствующей данному процессу, относительно некоторой другой меры, соответствующей более просто устроенному процессу (характер этой простоты зависит от рассматриваемой задачи).

Вычислению плотностей для мер, соответствующих случайным процессам, посвящен целый ряд работ [1—10]. Эти плотности использовались для нахождения оптимальных оценок в задачах экстраполяции и фильтрации для некоторых классов случайных процессов [11—14 и др.] для двумерных марковских процессов при условии, что наблюдается одна компонента и нужно оценивать другую компоненту процесса. Для немарковских процессов результаты подобного рода неизвестны.

В предлагаемой статье рассматривается класс случайных процессов $x(t)$, являющихся решениями уравнения вида

$$\frac{dx}{dt}+f(t,\ x(t))=\xi(t) \tag{1}$$

(и некоторых других подобного рода), где величина $\xi(t)$ — гауссовский процесс. Предполагается, что наблюдается некоторая функция $g(x(t))$ на отрезке $[0,\ T]$ и ищется наилучшая оценка в смысле среднеквадратического отклонения величины $h(x(t))$. В такой общей постановке задача содержит в себе и задачу экстраполяции, и задачу фильтрации, и задачу интерполяции (мы пользуемся классификацией А. Н. Ширяева).

Если $f(t,\ x(t))$ линейна относительно $x(t)$, то $x(t)$ является также гауссовским процессом, и решение поставленной задачи вытекает из общей теории линейной экстраполяции и фильтрации случайных процессов. Если $\xi(t)$ — гауссовский «белый шум», то уравнение (1) нужно понимать как стохастическое уравнение Ито; тогда $x(t)$ является диффузионным марковским процессом. Для таких процессов указанная задача при некотором выборе функций $g(\cdot)$ и $h(\cdot)$ решалась в работах [11—14]. Вопросы оптимальной экстраполяции и фильтрации для решения уравнения (1), когда $x(t)$ — негауссовский и немарковский случайный процесс, рассматривались в работах [15—17].

В настоящей работе обобщаются результаты [15—17]. Для получения формул оптимальных оценок здесь также используется вид плотности меры, соответствующей решению уравнения (1), относительно меры, порожденной решением соответствующего линейного уравнения. Такие формулы приведены для уравнения (1) в § 3 и для уравнений, содержащих еще линейную часть,— в § 4 (см. ч. II, которая публикуется в вып. 3).

Полученные в § 2 общие формулы затем используются в § 5 и 6 при решении задач экстраполяции и фильтрации решений различных классов дифференциальных уравнений. Особый интерес здесь представляют формулы для экстраполяции и фильтрации решений уравнений с малыми нелинейностями. Для оценок получены разложения по степеням малого параметра, позволяющие сравнивать линейные и оптимальные оценки.

В работе используются меры, порожденные векторными процессами. Поэтому все время через μ будем обозначать меру, соответствующую векторному процессу на минимальной σ-алгебре, которая содержит все цилиндрические множества пространства всех векторных функций, определенных на некотором отрезке $[0,\ a]$ и принимающих значения в некотором евклидовом пространстве $\mathbf{E}$. При этом каждый раз в индексе будет указываться процесс, которому соответствует данная мера. Например, μ_x — мера, соответствующая векторному процессу $x(t)$.

§ 2. Общие формулы экстраполяции и фильтрации

Пусть $x(t)$ — случайный процесс, определенный при $t \in [0, a]$ и принимающий значение из m-мерного евклидового пространства E. Обозначим через $\mathfrak{F}_T$ — σ-алгебру событий, порожденную величинами $x(s)$ при $s \leqslant T$. Если η — некоторая случайная величина, измеримая относительно $\mathfrak{F}_a$ (такие величины естественно называть функционалами от процесса $x(t)$), то наилучшей в среднем квадратическом оценкой величины η относительно σ-алгебры $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{F}_a$ называется такая $\mathfrak{B}$-измеримая случайная величина $\widehat{\eta}$, для которой $\mathbf{M}(\eta - \widehat{\eta})^2$ принимает минимальное значение. Когда $\mathbf{M}\eta^2 < \infty$, существует наилучшая оценка $\widehat{\eta}$, вычисляемая по формуле

$$\widehat{\eta} = \mathbf{M}(\eta/\mathfrak{B}). \tag{2}$$

При изучении задач экстраполяции и фильтрации случайных процессов в качестве η выступают величины вида $\eta = h(x(t))$, а в качестве σ-алгебр $\mathfrak{B}$ — σ-алгебры $\mathfrak{F}_T^g$, порожденные значениями $g(x(s))$ при $s \leqslant T$, где $h(\cdot)$ и $g(\cdot)$ — некоторые измеримые функции, определенные на E.

Лемма 1. Пусть $\xi(t)$ — векторный случайный процесс со значениями в E, заданный на промежутке $[0, a]$. Предположим, что мера μ_1, соответствующая векторному процессу $x(t)$, абсолютно непрерывна относительно меры μ_2, соответствующей векторному гауссовскому процессу $\xi(t)$. Пусть также $\varrho_a(\cdot)$ обозначает соответствующую плотность, вычисленную при $0 \leqslant t \leqslant a$. Если

$$\alpha(\xi, t) = \frac{\mathbf{M}\{h(\xi(t))\,\varrho_t(\xi(\cdot))/\mathfrak{F}_T^{g^*}\}}{\varrho_T(\xi(\cdot))}, \tag{3}$$

где $\mathfrak{F}_T^{g^*}$ — σ-алгебра, порожденная значениями функционала $g(\xi(s))$ при $s \leqslant T$, то наилучшая оценка $\widehat{h}(x(t))$ функционала $h(x(t))$ имеет следующий вид:

$$\widehat{h}(x(t)) = \mathbf{M}\{h(x(t))/\mathfrak{F}_T^g\} = \alpha(x, t). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть измеримая ограниченная функция n переменных $H(y_1, \ldots, y_n) = \gamma_n$ является $\mathfrak{F}_T^g$-измеримой функцией и $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, T]$. Принимая во внимание формулу (43.2) [18], имеем

$$\mathbf{M}\alpha\gamma_n = \mathbf{M}\alpha(x)\,H(x(t_1), \ldots, x(t_n)) = \mathbf{M}\alpha(\xi)\,H(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n))\,\varrho(\xi) =$$
$$= \mathbf{M}H(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n))\,\mathbf{M}\{h(\xi(t))\,\varrho(\xi(t)/\mathfrak{F}_T^{g^*}\} =$$
$$= \mathbf{M}\mathbf{M}\{H(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n))\,h(\xi(t))\,\varrho(\xi(t))/\mathfrak{F}_T^{g^*}\} =$$

$$= \mathbf{M} H(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n))\, h(\xi(t))\, \varrho(\xi) =$$

$$= \mathbf{M} H(x(t_1), \ldots, x(t_n))\, h(x(t)) = \mathbf{M}\, h(x(t))\, \gamma_n,$$

т. е.

$$\mathbf{M}\, \alpha(t, x)\, \gamma_n = \mathbf{M} h(x(t))\, \gamma_n. \tag{5}$$

Так как любую $\mathfrak{F}_T^g$-измеримую функцию γ можно аппроксимировать с помощью последовательности измеримых и ограниченных $\mathfrak{F}_T^g$-измеримых функций γ_n, переходя к пределу в (5), получим для любой $\mathfrak{F}_T^g$-измеримой функции γ равенство

$$\mathbf{M}\, \alpha(t, x)\, \gamma = \mathbf{M}\, h(x(t))\, \gamma. \tag{6}$$

Формула (6) доказывает утверждение (4).

Вычисление условного математического ожидания в (3) в общем случае весьма затруднительно, как вообще вычисление условных математических ожиданий. Желательно свести вычисление условного математического ожидания к безусловному. Такой переход возможен, если $\xi(t)$, $g(\xi(t))$ и $h(\xi(t))$ имеют совместные гауссовские распределения. Это будет тогда, когда $\xi(t)$ — гауссовский процесс, а $g(\cdot)$ и $h(\cdot)$ — линейные функционалы на E. Тогда σ-алгебра $\mathfrak{F}_T^*$ совпадает с σ-алгеброй значений $\xi(t)$ при $s \leqslant T$, которую в дальнейшем будем обозначать через $\mathfrak{F}_T^*$. Для вычисления этого условного математического ожидания представим процесс $\xi(t)$ в виде

$$\xi(t) = l_T(t) + \varepsilon_T(t), \tag{7}$$

где

$$l_T(t) = \mathbf{M}\, \{\xi(t)/\mathfrak{F}_T^*\}, \tag{8}$$

а $\varepsilon_T(t)$ — гауссовский векторный процесс со значениями в $\boldsymbol{E}$, не зависящий от σ-алгебры $\mathfrak{F}_T^*$.

Применяя формулы (7) и (8), наилучшую оценку $\hat{h}(x(t))$ функционала $h(x(t))$, представленную в виде формулы (3), можно записать так:

$$\hat{h}(x(t)) = \left. \frac{\mathbf{M}\, \{h(\xi(t))\, \varrho_t(\xi)/\mathfrak{F}_T^*\}}{\varrho_T(\xi)} \right|_{\xi = x} =$$

$$= \left. \frac{\mathbf{M}\, \{h(u(t) + \varepsilon_T(t))\, \varrho_t(u(\cdot) + \varepsilon_T(\cdot))\}}{\varrho_T(\xi(\cdot))} \right|_{\substack{u(\cdot) = l_T(\cdot) \\ \xi(\cdot) = x(\cdot)}}. \tag{9}$$

Формула (9) дает оптимальную оценку $\hat{h}(x(t))$ функции $h(x(t))$. Если в формуле (9) $t > T$, то $\hat{h}(x(t))$ является оптимальным прогнозом функции $h(x(t))$; если $t = T$, то $\hat{h}(x(t))$ — оптимальный фильтр функции $h(x(t))$, а если $t < T$, то $\hat{h}(x(t))$ — оптимальная интерполяция функции $h(x(t))$.

Таким образом, формула (9) является общей формулой для оптимальной оценки некоторой функции $h(x(t))$.

§ 3. Формула плотности мер, соответствующих решениям стохастических дифференциальных уравнений

В пространстве **E** рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} + F(t, x(t)) = \xi'(t), \tag{10}$$

$$x(0) = \xi(0) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где $\xi'(t)$ — гауссовский векторный процесс со значениями в **E**, его корреляционная матричная функция $R(t, s)$ непрерывна по совокупности обеих переменных в области $[0, T] \times [0, T]$, $\mathbf{M}\,\xi'(t) = 0$, а $F(t, x(t))$ является векторной функцией, определенной и непрерывной по совокупности обеих переменных в области $[0, T] \times \mathbf{E}$, и принимает значения в **E**. Кроме того, для функции $F(t, x)$ выполняется условие

$$\left\| \sum_i \frac{\partial F(t, x)}{\partial x_i} \right\| < \infty \tag{11}$$

(здесь и ниже символами $\|\cdot\|$ и $(\cdot, \cdot)$ будем обозначать норму и скалярное произведение в **E**). Условия, наложенные на векторы $F(t, x)$ и $\xi'(t)$ в уравнении (10), обеспечивают существование и единственность решения уравнения (10) с вероятностью 1, а это решение $x(t)$ с вероятностью 1 будет некоторым непрерывно дифференцируемым векторным процессом.

Обозначим через μ_x и μ_ξ меры, соответствующие векторным процессам $x(t)$ и $\xi(t)$ на минимальной σ-алгебре, которая содержит все цилиндрические множества пространства всех векторных функций, определенных на промежутке $[0, T]$ и принимающих свои значения в **E**.

В работе [10] в том частном случае, когда уравнение (10) одномерно, были выведены условия, при которых мера μ_x абсолютно непрерывна относительно меры μ_ξ, и в явном виде была получена формула соответствующей плотности.

В настоящем параграфе результаты работы [10] уточняются и переносятся на случай, когда уравнение (10) рассматривается в пространстве **E**. Метод, применяемый для получения основных результатов настоящего параграфа, совпадает с методом, используемым в работе [10], поэтому некоторые выкладки и утверждения будут приведены не полностью.

Разобьем промежуток $[0, T]$ на n равных частей и запишем разностное уравнение в $\mathbf{E}$

$$n\left[x\left(\frac{k+1}{n}\right)-x\left(\frac{k}{n}\right)\right]+F\left(\frac{k}{n},\ x\left(\frac{k}{n}\right)\right)=$$
$$=n\left[\xi\left(\frac{k+1}{n}\right)-\xi\left(\frac{k}{n}\right)\right], \tag{12}$$

соответствующее дифференциальному уравнению (10). Если обозначить

$$\Delta x_k = x\left(\frac{k+1}{n}\right)-x\left(\frac{k}{n}\right)$$

и (13)

$$\Delta\xi_k = \xi\left(\frac{k+1}{n}\right)-\xi\left(\frac{k}{n}\right),$$

то уравнение (12) запишется в виде

$$\Delta\xi_k = \Delta x_k + \frac{1}{n}F\left(\frac{k}{n},\ x\left(\frac{k}{n}\right)\right). \tag{14}$$

Для определенности предположим, что $\mathbf{E}$ является m-мерным евклидовым пространством.

Вычислим якобиан

$$D=\frac{D(\Delta\xi_1, \ldots, \Delta\xi_n)}{D(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)} \tag{15}$$

или, что то же,

$$D=\frac{D(\Delta\xi_1^{(1)}, \ldots, \Delta\xi_1^{(m)}, \ldots, \Delta\xi_n^{(1)}, \ldots, \Delta\xi_n^{(m)})}{D(\Delta x_1^{(1)}, \ldots, \Delta x_1^{(m)}, \ldots, \Delta x_n^{(1)}, \ldots, \Delta x_n^{(m)})}. \tag{16}$$

Для этого нужно вычислить выражение вида $\dfrac{\partial\Delta\xi_k^{(j)}}{\partial\Delta x_l^{(i)}}$ для всех k, $l=1, \ldots, n$ и i, $j=1, \ldots, m$. Легко видеть, что

$$\frac{\partial\Delta\xi_k^{(j)}}{\partial\Delta x_l^{(i)}}=\delta_{l,i}^{k,j}+\frac{1}{n}\,\frac{\partial}{\partial x_l^{(i)}}f_j\left(\frac{k}{n},\ \sum_{s=1}^{k-1}\Delta x_s\right)\sigma_l^{(k)}, \tag{17}$$

где

$$\delta_{l,i}^{k,j}=\delta_l^k\,\delta_j^i, \tag{18}$$

$$\delta_i^j=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

$$\sigma_l^{(k)}=\begin{cases}1, & l<k\\ 0, & l>k\end{cases}. \tag{19}$$

Таким образом, мы получили определитель $n \times m$-го порядка, у которого выше диагонали стоят нули, а на диагонали — единицы, поэтому

$$D = 1. \tag{20}$$

Обозначим через $\mathrm{R}(t, s)$ корреляционную матрицу векторного процесса $\xi'(t)$

$$\mathrm{R}(t, s) = \mathbf{M}\,\xi'(t)\,\xi'_*(s), \tag{21}$$

где $\xi'_*(s)$ — сопряженная матрица к матрице $\xi'(s)$.

Аналогично обозначим

$$R_n^{(i,j)} = \mathbf{M}\,\Delta\xi_i\,\Delta\xi_j^*. \tag{22}$$

Тогда корреляционная матрица вектора $\Delta\xi = \{\Delta\xi_1, \ldots, \Delta\xi_n\}$ имеет вид

$$\mathrm{R}_n = \left\| \begin{matrix} R_n^{(1,1)}, & R_n^{(1,2)}, & \ldots, & R_n^{(1,n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_n^{(n,1)}, & R_n^{(n,2)}, & \ldots, & R_n^{(n,n)} \end{matrix} \right\|. \tag{23}$$

Далее,

$$\mathbf{M}\,\Delta\xi_i\,\Delta\xi_j^* = \frac{1}{n^2}\,\mathbf{M}\,n\Delta\xi_i\,n\Delta\xi_j^* =$$

$$= \frac{1}{n^2}\,\mathbf{M}\,\xi'\left(\frac{i}{n}\right)\xi'_*\left(\frac{j}{n}\right) + o(1)$$

или

$$n^2 R_n^{(i,j)} = R\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{24}$$

Если обозначить через $R_n^{\frac{1}{2}}$ матрицу, удовлетворяющую соотношению

$$\mathrm{R}_n = \mathrm{R}_n^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{R}_n^{\frac{1}{2}}, \tag{25}$$

то аналогично тому, как это было сделано в работе [10], можно показать, что

$$n^{\frac{3}{2}} R_n^{\frac{1}{2}}(i, j) = R^{\frac{1}{2}}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) + o(1), \tag{26}$$

где $R_n^{\frac{1}{2}}(i, j)$ — элементы матрицы $\mathrm{R}_n^{\frac{1}{2}}$, а матричная функция $R^{\frac{1}{2}}(t, s)$ удовлетворяет соотношению

$$R(t, s) = \int_0^T R^{\frac{1}{2}}(t, u)\,R^{\frac{1}{2}}(u, s)\,du. \tag{27}$$

Поскольку матричная функция $R(t, s)$ непрерывна по совокупности обеих переменных в области $[0, T] \times [0, T]$, из соотношений (24) и (26) следует

$$\lim_{n\to\infty} n^2 R_n^{(i,j)} = R(t, s), \tag{28}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}} R_n^{\frac{1}{2}}(i, j) = R^{\frac{1}{2}}(t, s), \tag{29}$$

если равномерно в области $[0, T]\times[0, T]$ $\frac{i}{n} \to t$ и $\frac{j}{n} \to s$ при $n \to \infty$. Так как

$$R_n^{(i,j)} = \sum_{k=1}^{n} R_n^{\frac{1}{2}}(i, k)\, R_n^{\frac{1}{2}}(k, j), \tag{30}$$

в силу вышесказанного выражение

$$n^2 R_n^{(i,j)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} n^{\frac{3}{2}} R_n^{\frac{1}{2}}(i, k)\, R_n^{\frac{1}{2}}(k, j) \tag{31}$$

является интегральной суммой выражения (27).

Пусть в дальнейшем $\mathfrak{F}_t$ обозначает σ-алгебру событий, порожденную значениями векторного случайного процесса $\xi(t)$ до момента t, $t \in [0, T]$. Пусть существует случайная векторная функция $g(t)$ и векторный винеровский процесс $w(t)$ со значениями в E, для которых выполняются следующие условия:

а) векторная случайная функция $g(t)$ измерима по t;

б) при каждом t из промежутка $[0, T]$ векторная случайная функция $g(t)$ $\mathfrak{F}_t$-измерима;

в) с вероятностью 1

$$\int_0^T \| g(t) \|^2\, dt < \infty; \tag{32}$$

г) винеровский векторный процесс $w(s)$ $\mathfrak{F}_t$-измерим при $s < t$;

д) приращение $w(s) - w(t)$ при $s > t$ не зависит от σ-алгебры $\mathfrak{F}_t$;

е) $$F(t, \xi(t)) = \int_0^T R^{\frac{1}{2}}(t, s)\, g(s)\, ds, \tag{33}$$

$$\xi'(t) = \int_0^T R^{\frac{1}{2}}(t, s)\, dw(s). \tag{34}$$

В точках разбиения промежутка $[0, T]$ имеем

$$F\left(\frac{i}{n}, \xi\left(\frac{i}{n}\right)\right)=\int_0^T R^{\frac{1}{2}}\left(\frac{i}{n}, s\right) g(s)\, ds, \tag{35}$$

$$F\left(\frac{i}{n}, \xi\left(\frac{i}{n}\right)\right)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} R^{\frac{1}{2}}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) g\left(\frac{j}{n}\right). \tag{36}$$

Рассмотрим выражение

$$\widetilde{F}\left(\frac{i}{n}, \xi\left(\frac{i}{n}\right)\right)=\sqrt{n}\sum_{j=1}^{n} R^{\frac{1}{2}}(i, j)\, g\left(\frac{i}{n}\right). \tag{37}$$

Легко видеть, что в силу (26)

$$\widetilde{F}\left(\frac{i}{n}, \xi\left(\frac{i}{n}\right)\right)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}{}' \left(R^{\frac{1}{2}}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)+o(1)\right) g\left(\frac{i}{n}\right). \tag{38}$$

Введем обозначения

$$\widetilde{F}_n(t, \xi(t))=\widetilde{F}\left(\frac{i}{n}, \xi\left(\frac{i}{n}\right)\right), \quad \frac{i}{n}\leqslant t<\frac{i+1}{n}; \tag{39}$$

$$R_n^{\frac{1}{2}}(t, s)=R^{\frac{1}{2}}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right), \quad \frac{i}{n}\leqslant t<\frac{i+1}{n}, \quad \frac{j}{n}\leqslant s<\frac{j+1}{n}; \tag{40}$$

$$g_n(s)=g\left(\frac{i}{n}\right), \quad \frac{j}{n}\leqslant s<\frac{j+1}{n}. \tag{41}$$

Тогда выражение (38) записывается в следующем виде:

$$\widetilde{F}_n(t, \xi(t)) = \int_0^T \left[R_n^{\frac{1}{2}}(t, s)+o(1)\right] g_n(s)\, ds. \tag{42}$$

Легко видеть, что в силу непрерывности вектор-функции $F(t, x(t))$ по обеим переменным и по конструкции самой функции $\widetilde{F}_n$ имеем

$$\mathbf{M}\,\|\widetilde{F}_n(t, \xi(t))-F(t, \xi(t))\|\to 0 \text{ при } n\to\infty \tag{43}$$

равномерно в области $[0, T]\times\mathbf{E}$. Далее, пользуясь леммой 1 [10], а также конструкцией вектора $g_{\imath}(t)$ и (28), имеем

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\left(R_n^{\frac{1}{2}}(t, s)-R^{\frac{1}{2}}(t, s)\right)^2 ds=0 \tag{44}$$

равномерно относительно t в области $[0, T]$ и

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} \int_0^T \| g_n(t) - g(t) \|^2 dt = 0. \tag{45}$$

Исходя из этих рассуждений, убеждаемся, что выражение (37) сходится по вероятности к выражению (33), если $\frac{i}{n} \to t$ при $n \to \infty$ (для этого достаточно оценить разность этих выражений по вероятности и воспользоваться формулами (42) — (45), т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{F}\left(\frac{i}{n}, \xi\left(\frac{i}{n}\right)\right) = F(t, \xi(t)), \tag{46}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \sum_{j=1}^{n} R^{\frac{1}{2}}(i, j)\, g\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^T R^{\frac{1}{2}}(t, s)\, g(s)\, ds \tag{47}$$

в смысле сходимости по вероятности, а $\frac{i}{n} \to t$ при $n \to \infty$.

Теперь рассмотрим вместо преобразования (14) преобразование

$$\Delta\xi_k = \Delta\widetilde{x}_k + \frac{1}{n}\widetilde{F}\left(\frac{i}{n}, \widetilde{x}\left(\frac{i}{n}\right)\right) = T_n \Delta\widetilde{x}_k, \tag{48}$$

где $\widetilde{F}\left(\frac{i}{n}, \widetilde{x}\left(\frac{i}{n}\right)\right)$ определяется по формуле (37), а $\Delta\xi_k$ — приращение гауссовского векторного процесса на промежутке $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$.

В силу (14) и (46) решение разностного уравнения (48) сходится по вероятности к решению дифференциального уравнения (10). Легко видеть, что определитель преобразования (48) $\widetilde{D}$ такой же, как и определитель D для преобразования (14). Так же, как и в (20), имеем

$$\widetilde{D} = 1. \tag{49}$$

Используя преобразование (48), ниже мы докажем основную лемму этого параграфа.

Прежде обозначим через A_n матрицу, обратную матрице R_n,

$$A_n = R_n^{-1} = \begin{Vmatrix} A_n^{(1,1)}, & \ldots, & A_n^{(1,n)} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ A_n^{(n,1)}, & \ldots, & A_n^{(n,n)} \end{Vmatrix}, \tag{50}$$

Пусть $L^{(n)}$ — n-мерное пространство m-мерных векторов со скалярным произведением

$$(a/b) = \sum_{i=1}^{n} (a_i,\ b_i), \tag{51}$$

$$a = (a_1, \ldots, a_n), \quad b = (b_1, \ldots, b_n) \in L^{(n)}.$$

Лемма 1. Пусть $H(\widetilde{x})$ — некоторый ограниченный, измеримый неотрицательный функционал, определенный на пространстве $L^{(n)}$. Тогда

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n} H(T_n \xi) \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (A_n^{(i,j)} \Delta\xi_i,\ \Delta\xi_j)\right\} d\Delta\xi_1 \ldots d\Delta\xi_n =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n} H(\widetilde{x})\, \varrho_n(\widetilde{x}) \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (A_n^{(i,j)} \Delta\widetilde{x}_i,\ \Delta\widetilde{x}_j)\right\} d\Delta\widetilde{x}_1 \ldots d\Delta\widetilde{x}_n, \tag{52}$$

где

$$\varrho_n(\widetilde{x}) = \exp\left\{-\frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_n^{(i,j)} \widetilde{F}\left(\frac{i}{n},\ \widetilde{x}\left(\frac{i}{n}\right)\right),\ \Delta\widetilde{x}_j\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2n^2} \sum_{j,j=1}^{n} \left(A_n^{(i,j)} \widetilde{F}\left(\frac{i}{n},\ \widetilde{x}\left(\frac{i}{n}\right)\right),\ F\left(\frac{j}{n},\ \widetilde{x}\left(\frac{j}{n}\right)\right)\right)\right\}. \tag{53}$$

Доказательство. Действительно, если воспользоваться преобразованием (40) и тем, что якобиан этого преобразования $\widetilde{D} = 1$, то

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n} H(T_n \xi) \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (A_n^{(i,j)} \Delta\xi_i,\ \Delta\xi_j)\right\} d\Delta\xi_1 \ldots d\Delta\xi_n =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n} H(\widetilde{x}) \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_n^{(i,j)} \left[\Delta\widetilde{x}_i + \frac{1}{n} \widetilde{F}\left(\frac{i}{n},\ \widetilde{x}\left(\frac{i}{n}\right)\right)\right],\right.\right.$$

$$\left.\left. \left[\Delta\widetilde{x}_j + \frac{1}{n} \widetilde{F}\left(\frac{j}{n},\ \widetilde{x}\left(\frac{j}{n}\right)\right)\right]\right)\right\} d\Delta\widetilde{x}_1 \ldots d\Delta\widetilde{x}_n =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n} H(\widetilde{x})\, \varrho_n(\widetilde{x}) \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (A_n^{(i,j)} \Delta\widetilde{x}_i,\ \Delta\widetilde{x}_j)\right\} d\Delta\widetilde{x}_1 \ldots d\Delta\widetilde{x}_n; \tag{54}$$

а это доказывает лемму. Заметим, что в формуле (53) $\widetilde{x}(t)$ является гауссовским векторным процессом, а $\Delta\widetilde{x}(t)$ — его приращением. Это следует из того, что в (54) последний интеграл интегрируется по той же гауссовской мере, что и первый.

В пространстве $L^{(n)}$ введем векторы $\widetilde{F}_n$, g_n и ΔX_n, компонентами которых являются соответственно $\widetilde{F}\left(\frac{i}{n}, \widetilde{x}\left(\frac{i}{n}\right)\right)$, $g\left(\frac{i}{n}\right)$, $\Delta\widetilde{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. С помощью этих обозначений (используя симметрию матрицы R_n и формулу (39)) плотность $\varrho_n(\widetilde{x})$ можно переписать так:

$$\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_n^{(i,j)}\widetilde{F}\left(\frac{i}{n}, \widetilde{x}\left(\frac{i}{n}\right)\right),\ \Delta\widetilde{x}_j\right) =$$

$$= \frac{1}{n}(R_n^{-1}\widetilde{F}_n/\Delta X_n) = \frac{1}{n}\left(R_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\widetilde{F}_n / R_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\Delta X_n\right) =$$

$$= \left(\frac{R_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)} F_n}{\sqrt{n}} \Bigg/ \frac{R_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\Delta X_n}{\sqrt{n}}\right) = \left(g_n \Bigg/ \frac{R_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\Delta X_n}{\sqrt{n}}\right), \tag{55}$$

и аналогично (опять в силу (39) и симметрии матрицы $R_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$)

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_n^{(i,j)}\widetilde{F}\left(\frac{i}{n}, \widetilde{x}\left(\frac{i}{n}\right)\right),\ F\left(\frac{j}{n}, \widetilde{x}\left(\frac{j}{n}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}(R_n^{-1}\widetilde{F}_n/\widetilde{F}_n) = \frac{1}{n}\left(\frac{R_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\widetilde{F}_n}{\sqrt{n}} \Bigg/ \frac{R_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\widetilde{F}_n}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}(g_n,\ g_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\|g\left(\frac{i}{n}\right)\right\|^2. \tag{56}$$

Следовательно, из (56) и (57) имеем

$$\varrho_n(\widetilde{x}) = \exp\left\{-\left(g_n \Big/ \frac{R_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)} \Delta X}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2n}(g_n/g_n)\right\}. \tag{57}$$

Поскольку компоненты вектора ΔX суть приращения гауссовского векторного процесса $\xi(t)$, характеристическая функция вектора $R_n^{-\frac{1}{2}} \Delta X$ имеет вид

$$\Phi(z) = \mathbf{M}\exp\left\{\left(z/R_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)} \Delta X\right)\right\} = \mathbf{M}\exp\left\{\left(R_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)} z/\Delta X\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(R_n R_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)} z/R_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)} z\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}(z/z)\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathrm{I}z/z)\right\}, \tag{58}$$

где I — единичная матрица, действующая в $L^{(n)}$.

Таким образом, из (58) видно, что компоненты вектора $R_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)} \Delta X$ взаимно независимы и распределены нормально. Пусть

$$\Delta\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) = R_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)} \Delta X, \tag{59}$$

где $\Delta\ \alpha$ — приращение вектора α в пространстве $L^{(n)}$, а его компоненты — приращения некоторой m-мерной векторной случайной функции на делениях промежутка $[0,\ T]$, независимы, распределены нормально с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной единице.

Обозначим

$$\Delta W = (\Delta w_0, \ldots, \Delta w_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \Delta\alpha. \tag{60}$$

Вектор $\Delta\ W$ является приращением некоторого вектора в $L^{(n)}$, а его компоненты — компоненты приращения некоторой m-мерной случайной функции $w(t)$ на делениях промежутка $[0,\ T]$, независимы, нормально распределены с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной $\frac{1}{n}$ (шаг деления промежутка $[0,\ T]$):

$$\mathbf{M}\|\Delta w_i\|^2 = \mathbf{M}\frac{1}{n}\|\Delta\alpha_i\|^2 = \frac{1}{n} \tag{61}$$

$$i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

На основании этого можно считать, что последовательность случайных величин $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}, \ldots$, приращениями которых являются величины $\Delta w_0, \ldots, \Delta w_{n-1}, \ldots$, при $n \to \infty$ сходится по вероятности к некоторому m-мерному винеровскому процессу $w(t)$, определенному на промежутке $[0, T]$ (см. следствие 1 из § 6 гл. I [19]).

Из (59) и (60) видно, что

$$\Delta X = \sqrt{n} R_n^{\frac{1}{2}} \Delta W \tag{62}$$

или

$$n\Delta X = n^{\frac{3}{2}} R_n^{\frac{1}{2}} \Delta W. \tag{63}$$

Принимая во внимание выше сказанное и выражения (26) и (28), из (63) при $n \to \infty$ в смысле сходимости по вероятности в пределе имеем соотношение

$$\xi'(t) = \int_0^T R^{\frac{1}{2}}(t, s)\, dw(s), \tag{64}$$

где интеграл понимается как стохастический.

Таким образом, m-мерный винеровский процесс связан с гауссовским процессом $\xi(t)$ соотношением (64).

Используя обозначения (59) и (60), конечномерную плотность $\varrho_n(\widetilde{x})$, имеющую вид (63), можно записать так:

$$\varrho_n(\widetilde{x}) = \exp\left\{-(g_n/\Delta W) - \frac{1}{2n}(g_n/g_n)\right\} \tag{65}$$

или в силу (53)

$$\varrho_n(\widetilde{x}) = \exp\left\{-\sum_{i=0}^{n-1}(g_i, \Delta w_i) - \frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\|g_i\|^2\right\}. \tag{66}$$

Выражение $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(g\left(\frac{i}{n}\right), \Delta w_i\right)$ является интегральной суммой для стохастического интеграла

$$\int_0^T (g(t), dw(t)).$$

Кроме того, по построению (см. условия а) — г)) векторные случайные функции $g(t)$ и $w(t)$ удовлетворяют определению стохастического интеграла как предельное соотношение выражения

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(g\left(\frac{i}{n}\right), \Delta w_i\right) = \int_0^T (g_n(t), dw_n(t)), \tag{67}$$

где

$$g_n(t) = g\left(\frac{i}{n}\right) \quad \text{при} \quad \frac{i}{n} \leqslant t < \frac{i+1}{n},$$

$$dw_n(t) = w\left(\frac{i+1}{n}\right) - w\left(\frac{i}{n}\right) \quad \text{при} \quad \frac{i}{n} \leqslant t < \frac{i+1}{n}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(g\left(\frac{i}{n}\right), \Delta w_i\right) = \int_0^T (g(t), dw(t)) \tag{68}$$

в смысле сходимости по вероятности. Аналогично можно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left\| g\left(\frac{i}{n}\right)\right\|^2 = \int_0^T \|g(t)\|^2\, dt \tag{69}$$

в смысле сходимости по вероятности. Следовательно, в силу (68), (69) и (66)

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{\varrho_n(x)} = \varrho(\xi) = \exp\left\{-\int_0^T (g(t), dw(t)) - \frac{1}{2}\int_0^T \|g(t)\|^2\, dt\right\} \tag{70}$$

в смысле сходимости по вероятности.

Теорема 1. Пусть в m-мерном евклидовом пространстве задано стохастическое дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered} \frac{dx(t)}{dt} + F(t, x(t)) = \xi'(t), \\ x(0) = \xi(0) = 0, \end{gathered} \tag{71}$$

где гауссовский векторный процесс $\xi(t)$ и векторная функция $F(t, x(t))$ удовлетворяют условиям, перечисленным в начале настоящего параграфа.

Пусть матричная функция $R^{\frac{1}{2}}(t, s)$ удовлетворяет соотношению (27) и существуют случайная векторная функция $g(t)$ и векторный винеровский процесс $w(t)$ со значениями в **E**, для которых выполняются условия а) — д) и, кроме того,

$$F(t, \xi(t)) = \int_0^T R^{\frac{1}{2}}(t, s)\, g(s)\, ds, \tag{72}$$

$$\xi'(t) = \int_0^T R^{\frac{1}{2}}(t, s)\, dw(s). \tag{73}$$

Тогда мера μ_x, соответствующая решению стохастического дифференциального уравнения $x(t)$, абсолютно непрерывна относительно меры μ_ξ, соответствующей векторному гауссовскому процессу $\xi(t)$, и

$$\varrho(\xi) = \frac{d\mu_x}{d\mu_\xi}[\xi] = \exp\left\{-\int_0^T (g(t), dw(t)) - \frac{1}{2}\int_0^T \|g(t)\|^2\, dt\right\}. \quad (74)$$

Рассмотрим теперь в пространстве $\mathbf{E}$ дифференциальное уравнение высшего порядка

$$\frac{d^k x(t)}{dt^m} + \Phi(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(m-1)}(t)) = \xi^{(k)}(t), \quad (75)$$

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(k-1)}(0) = \xi(0) = \xi'(0) = \ldots = \xi^{k-1}(0) = 0,$$

где $\xi^{(k)}(t)$ — k-я производная от гауссовского векторного процесса $\xi(t)$, определенного на отрезке $[0, T]$.

Предположим, что $\Phi(t, y_1, \ldots y_k)$ как функция $k+1$-й переменной определена и непрерывна в области $[0, T] \times \mathbf{E} \times \ldots \times \mathbf{E}$ и принимает значения в пространстве $\mathbf{E}$, кроме того,

$$\sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{\partial \Phi(t, y_1, \ldots, y_k)}{\partial y_j} \right\| < \infty. \quad (76)$$

Обозначим через $B_{k,k}(t, s)$ корреляционную матрицу гауссовского векторного процесса $\xi^{(k)}(t)$. Она будет определена как функция двух переменных в области $[0, T] \times [0, T]$. Пусть $B_{k,k}^{\frac{1}{2}}(t, s)$ — матрица, удовлетворяющая соотношению

$$B_{k,k}(t, s) = \int_0^T B_{k,k}^{\frac{1}{2}}(t, u)\, B_{k,k}^{\frac{1}{2}}(u, s)\, du. \quad (77)$$

Разделим отрезок $[0, T]$ на n равных частей и в каждой точке разбиение заменим дифференциальное уравнение (75) соответствующим конечноразностным уравнением

$$\Delta^k x_i + \frac{1}{n^k}\Phi\left(\frac{i}{n}, \tilde{x}\left(\frac{i}{n}\right), \tilde{x}'\left(\frac{i}{n}\right), \ldots, \tilde{x}^{(k-1)}\left(\frac{i}{n}\right)\right) = \Delta^k \xi_i, \quad (78)$$

где, например,

$$\Delta x_i = x\left(\frac{i+1}{n}\right) - x\left(\frac{i}{n}\right), \quad (79)$$

а операции Δ^k определяются как

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= \Delta\Delta,\\ \Delta^3 &= \Delta\Delta^2,\\ &\cdots\cdots\\ \Delta^k &= \Delta\Delta^{k-1},\end{aligned} \tag{80}$$

а

$$\begin{aligned}\tilde{x}'\left(\frac{i}{n}\right) &= n\Delta y_{i-1},\\ \tilde{x}''\left(\frac{i}{n}\right) &= n^2\Delta^2 y_{i-2},\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \tilde{x}^{(k-1)}\left(\frac{i}{n}\right) &= n^{k-1}\Delta^{k-1} y_{i-k+1}.\end{aligned} \tag{81}$$

Вычисляя якобиан отображения (78) D_k и учитывая (78), получаем, что, как и для отображения (14),

$$D_k = \frac{D(\Delta^k\xi_1, \ldots, \Delta^k\xi_n)}{D(\Delta^k x_1, \ldots, \Delta^k x_n)} = 1. \tag{82}$$

Применяя теперь метод для доказательства теоремы 1 к отображению (78), убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть в m-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}$ задано стохастическое дифференциальное уравнение

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} + \Phi(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{k-1}(t)) = \xi^{(k)}(t),$$

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(k-1)}(0) = \xi(0) = \xi'(0) = \ldots = \xi^{(k-1)}(0) = 0,$$

где $\xi^{(k)}(t)$ — k-я производная от векторного гауссовского процесса $\xi(t)$, определенного на промежутке $[0, T]$, а векторная функция $\Phi(t, y_1, \ldots, y_k)$ принимает значения в $\mathbf{E}$, непрерывна по совокупности своих переменных в области $[0, T] \times \mathbf{E} \times \ldots \times \mathbf{E}$ и удовлетворяет условию (76).

Пусть, далее, матричная функция $B^{\frac{1}{2}}_{k,k}(t, s)$ удовлетворяет соотношению (77) и существуют случайная векторная функция $G(t)$ и случайный винеровский процесс $W(t)$, определенные на отрезке $[0, T]$, такие, что для них выполняются следующие условия:

1) векторная случайная функция $G(t)$ измерима по t;

2) при каждом t из отрезка $[0, T]$ векторная случайная функция $G(t)$ $\mathfrak{F}_t$-измерима;

3) с вероятностью 1

$$\int_0^T \|G(t)\|^2 dt < \infty; \tag{83}$$

4) винеровский векторный процесс $W(s)$ $\mathfrak{F}_t$-измерим при $s < t$;
5) приращение $W(s) - W(t)$ при $s > t$ не зависит от σ-алгебры $\mathfrak{F}_t$;

$$6)\ \Phi(t, \xi(t), \xi'(t), \ldots, \xi^{(k-1)}(t)) = \int_0^T B_{k,k}^{\frac{1}{2}}(t, u)\, G(u)\, du \tag{84}$$

и

$$\xi^{(k)}(t) = \int_0^T B_{k,k}^{\frac{1}{2}}(t, u)\, dW(u). \tag{85}$$

Тогда мера μ_x, соответствующая решению стохастического дифференциального уравнения $x(t)$, абсолютно непрерывна относительно меры μ_ξ, соответствующей гауссовскому векторному процессу $\xi(t)$, и

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_\xi}[\xi] = \exp\left\{-\int_0^T (G(t), dW(t)) - \frac{1}{2}\int_0^T \|G(t)\|^2 dt\right\}. \tag{86}$$

Чтобы пояснить теорему 2, можно, как и в работе [10], посчитать (82) и отображение (78) для дифференциального уравнения (75) при $k = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cameron R. H., Martin W. T. Transformations of Wiener integrals under a general class transformation.— Trans. Amer. Math. Soc., 58, 1945.
2. Cameron R. H., Martin W. T. Transformation of Wiener integrals by nonlinear Transformation.— Trans. Amer. Math. Soc., 66, 1949.
3. Гихман И. И., Скороход А. В. О плотности вероятностных мер в функциональных пространствах.— Успехи математ. наук, **21**, вып. 6 (132), 1966.
4. Скороход А. В. О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам, II.— Теория вероятн. и ее прим., 5, 1960.
5. Розанов Ю. А. О вероятностных мерах в функциональном пространстве, отвечающих гауссовским стационарным процессам.— Теор. вероят. и ее прим., 9, 1964.
6. Розанов Ю. А. Гауссовские бесконечномерные распределения.—Труды матем. инст. им. Стеклова, 108, 1969.
7. Гаек Я. Об одном свойстве нормальных распределений произвольных стохастических процессов.— Чехосл. матем. журн., 8, 1958.
8. Feldman J. Equivalence and perpendicularity of Gaussian processes.— Pasif. Journ. Math., 10, 1958.
9. Шаташвили А. Д. Об одном классе абсолютно непрерывных нелинейных преобразований гауссовских мер.— Труды Вычислительного центра АН ГрССР, 5:1, 1965.
10. Шаташвили А. Д. О плотностях мер, соответствующих решениям

стохастических дифференциальных уравнений, находящихся под воздействием гауссовских процессов.— Труды Вычислительного центра АН ГрССР, 7:1, 1966.

11. Стратанович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. Изд-во МГУ, 1966.

12. Ширяев А. Н. О стохастических уравнениях теории условных марковских процессов.— Теор. вероятн. и ее прим., XI, 1966.

13. Ширяев А. Н. Стохастические уравнения нелинейной фильтрации скачкообразных марковских процессов.— Проблемы передачи информации, 2, вып. 3, 1966.

14. Липцер Р. Ш. Сравнение нелинейной и линейной фильтрации некоторых марковских процессов.— Теория вероят. и ее прим., XI, вып. 3, 1966.

15. Шаташвили А. Д. Об оптимальном прогнозировании для некоторого класса случайных процессов.— Теория вероятн. и матем. статист., вып. 1, 1970.

16. Шаташвили А. Д. Нелинейная фильтрация для решения некоторых стохастических дифференциальных уравнений.— Кибернетика (в печати).

17. Шаташвили А. Д. О многомерном оптимальном прогнозировании и фильтрации одного класса векторных случайных процессов.— Математ. физика, вып. 7, 1970.

18. Скороход А. В. Случайные процессы с независимыми приращениями. М., «Наука», 1964.

19. Скороход А. В. Исследования по теории случайных процессов. Изд-во КГУ, 1961.

A. D. Shatashvily

OPTIMAL EXTRAPOLATION AND FILTRATION FOR SOME CLASS OF RANDOM PROCESSES. I.

Summary

The formulas which express the optimal estimations of some functionals for random processes in filtration and extrapolation problem are proved. The studied processes satisfy some differential equation with the Gaussian process in the right part.

Поступила в редакцию 22.IV 1969.