Киевский университет

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО И ИЗОТРОПНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

В настоящей заметке рассматривается задача линейной экстраполяции для однородного и изотропного поля на плоскости Лобачевского, которое наблюдается на некоторой окружности.

Спектральное разложение однородного и изотропного случайного поля на плоскости Лобачевского

Будем исходить из следующей модели плоскости Лобачевского, предложенной А. Пуанкаре ([1], стр. 151—155). Пусть R_3^1 — псевдоевклидово пространство индекса 1, т. е. совокупность векторов $x=(x_0, x_1, x_2)$, в которой метрика определена с помощью квадратичной формы

$$s^2(x) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2. \tag{1}$$

Сфера радиуса i

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1 \tag{2}$$

в этом пространстве представляет собой в евклидовой метрике двухполостный гиперболоид. Верхнюю полость Γ ($x_0>0$) гиперболоида (2) можно рассматривать как модель плоскости L_2 Лобачевского.

«Прямой» в такой модели называется ветвь гиперболы, которая получается при пересечении Γ с плоскостью, проходящей через начало координат. Если прямая L в R_3^1, проходящая через начало координат, лежит внутри конуса K

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0, \tag{3}$$

то плоскости, проходящие через эту прямую, определяют в L_2 пучок прямых, проходящих через одну точку. Если l — образующая конуса K, то плоскости, проходящие через l, высекают на Γ «прямые», которые называются параллельными; если же l расположена вне конуса K, то соответствующие плоскости определяют расходящиеся прямые в L_2. Легко проверить, что теперь в L_2 выполнены все аксиомы геометрии Лобачевского. Метрика в L_2 индуцируется квадратичной формой (2).

Окружность в L_2 определяется как геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой точки. В частности, сечения гиперболоида Г плоскостями $x_0=\mathrm{const}>1$ являются окружностями в L_2 (это также евклидовы окружности радиуса $\sqrt{x_0^2-1}$). Удобно пользоваться полярными координатами в L_2. Полярными координатами (r, φ) точки $A_2 \in L_2$ называется радиус r окружности с центром в точке $(1, 0, 0)$, проходящей через точку A, и угол φ между прямыми, определяемыми плоскостями x_0Ox_1 и x_0OA. Расстояние r между двумя точками с полярными координатами (r_1, φ_1) и (r_2, φ_2) находим из соотношения

$$\operatorname{ch} r = \operatorname{ch} r_1 \operatorname{ch} r_2 - \operatorname{sh} r_1 \operatorname{sh} r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{4}$$

Пусть $\xi(x)$, $x \in L_2$ — однородное и изотропное непрерывное в среднем квадратичном случайное поле в L_2 (предположим, что $M\xi(x) = 0$, $M\xi^2(x) < +\infty$). Тогда $M\xi(x)\overline{\xi(y)}$ зависит только от расстояния r между x и y; будем обозначать эту зависимость так:

$$M\xi(x)\overline{\xi(y)} = B(\operatorname{ch} r). \tag{5}$$

Функция $B(\operatorname{ch} r)$ является эрмитово-положительным ядром на $L_2 \times L_2$, зависящим только от расстояния. Поэтому, согласно результату М. Г. Крейна о структуре таких ядер [2],

$$B(\operatorname{ch} r) = \int_0^\infty P_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)\, d\Phi(\lambda), \tag{6}$$

где $P_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)$ — функция Лежандра первого рода,

$$\nu(\lambda) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}; \tag{7}$$

$\Phi(\lambda)$ — некоторая не убывающая функция.

Из равенства (6) можно получить спектральное представление случайного поля $\zeta(x)$. Используя формулу сложения для функций Лежандра и соотношение (6.737) из [3], получаем

$$B(\operatorname{ch} r) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi_1-\varphi_2)} \int_0^\infty \gamma_m(\lambda)\, p_{\nu(\lambda)}^m(\operatorname{ch} r_1)\, p_{\nu(\lambda)}^m(\operatorname{ch} r_2)\, d\Phi(\lambda), \tag{8}$$

где

$$\gamma_m(\lambda) = (-1)^m \frac{\Gamma(\nu - m + 1)}{\Gamma(\nu + m + 1)}. \tag{9}$$

Заметим, что $\gamma_m(\lambda) > 0$ при каждом целом m, если $\nu = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$. Это следует из соотношений

$$\gamma_0(\lambda) = 1,$$

$$\gamma_1(\lambda) = -\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+2)} = -\frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{\lambda} > 0,$$

$$\gamma_m(\lambda) = (\nu - m)(\nu + m + 1)(\nu - m - 1)(\nu + m + 2)\gamma_{m+2}(\lambda),$$

$$(\nu - m)(\nu + m + 1)(\nu - m + 1)(\nu + m + 2) > 0.$$

Применяя теорему Карунена ([4], стр. 261), из (8) получим

$$\xi(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^\infty \sqrt{\gamma_m(\lambda)}\, p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)\, dZ_m(\lambda), \tag{10}$$

где (r, φ) — полярные координаты точки x, а $Z_m(S)$ — последовательность случайных «мер» на борелевских множествах $(0, \infty)$, обладающих свойствами

$$MZ_m(S) = 0 \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{11}$$

$$MZ_m(S_1)\overline{Z_r(S_2)} = \delta^r_m \Phi(S_1 \cap S_2). \tag{12}$$

Представление (10) было указано А. М. Ягломом [5]. Спектральные представления однородных и изотропных случайных полей в n-мерном и бесконечномерном пространстве Лобачевского приведены в работах [6, 7].

Пусть S_r — окружность радиуса r с центром в точке $(1, 0, 0)$, а H_r — замкнутое линейное многообразие, порожденное случайными величинами $\xi(x)$, $x \in S_r$. Из (10) вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. Каждый элемент $\eta \in H_r$ имеет вид

$$\eta = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_0^\infty \sqrt{\gamma_m(\lambda)}\, p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)\, dZ_m(\lambda), \tag{13}$$

где $\{c_m\}$ — некоторая последовательность такая, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^2 \int_0^\infty \gamma_m(\lambda)\, [p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)]^2\, d\Phi(\lambda) < +\infty. \tag{14}$$

Об экстраполяции изотропного случайного поля по наблюдениям на окружности

Предположим, что случайное поле $\xi(x)$ наблюдается на окружности S_r и нужно получить линейную оценку $\eta(y)$ величины $\xi(y)$, наилучшую в смысле минимума среднеквадратической погрешности. Это задача линейной экстраполяции, которая сводится к отысканию проекции $\eta(y)$ элемента $\xi(y)$ на многообразие H_r. Решение последней задачи находится из условия

$$M\xi(y)\overline{\xi(x)} = M\eta(y)\overline{\xi(x)} \tag{15}$$

для всех $x \in S_r$.

Принимая во внимание лемму 1, будем искать экстраполирующую формулу для $\xi(y)$ в виде

$$\eta(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(y) \int_0^{\infty} \sqrt{\gamma_m(\lambda)}\, p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)\, dZ_m(\lambda). \tag{16}$$

Пусть (ϱ, ψ) — полярные координаты точки y. Используя спектральное представление (10) случайного поля $\xi(x)$, запишем условие (15) так:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\psi-\varphi)} \int_0^{\infty} \gamma_m(\lambda)\, p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch}\varrho)\, p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)\, d\Phi(\lambda) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(y)\, e^{-im\varphi} \int_0^{\infty} \gamma_m(\lambda)\, [p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)]^2 d\Phi(\lambda). \tag{17}$$

Из (17) следует

$$c_m(y) = e^{im\psi} \frac{\int_0^{\infty} \gamma_m(\lambda)\, p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch}\varrho)\, p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)\, d\Phi(\lambda)}{\int_0^{\infty} \gamma_m(\lambda)\, [p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)]^2 d\Phi(\lambda)}, \tag{18}$$

если

$$\int_0^{\infty} \gamma_m(\lambda)\, [p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)]^2 d\Phi(\lambda) \neq 0. \tag{19}$$

Если же

$$\int_0^{\infty} \gamma_m(\lambda)\, [p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)]^2 d\Phi(\lambda) = 0, \tag{20}$$

то $c_m(y)$ можно выбрать произвольно (например, $c_m(y)=0$); в этом случае из условия (20) следует, что с вероятностью единица

$$\int_0^\infty \sqrt{\gamma_m(\lambda)} p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)\, dZ_m(\lambda) = 0. \tag{21}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. Линейная экстраполяционная формула для $\xi(y)$ по результатам наблюдения $\xi(x)$ на окружности S_r имеет вид (16), где $c_m(y)$ определяется по формуле (18), если выполнено условие (19), и $c_m(y)=0$, если имеет место (20).

Экстраполяционная формула (16) выражается через последовательность случайных мер $Z_m(\cdot)$. Естественно, однако, выразить ее через значения $\xi(x)$ на окружности S_r. Это можно сделать, принимая во внимание соотношение

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi(x) e^{-im\varphi} d\varphi = \int_0^\infty \sqrt{\gamma_m(\lambda)}\, p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)\, dZ_m(\lambda), \tag{22}$$

которое следует из (10). Получим тогда

$$\eta(y) = \int_0^{2\pi} c(y, x)\, \xi(x)\, d\varphi, \tag{23}$$

где

$$c(y, x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\psi-\varphi)} \frac{\int_0^\infty \gamma_m(\lambda)\, p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} \varrho)\, p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)\, d\Phi(\lambda)}{\int_0^\infty \gamma_m(\lambda)\, [p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)]^2\, d\Phi(\lambda)} \tag{24}$$

(если выполнено (20), соответствующее слагаемое в (24) считается равным нулю).

Среднеквадратическая ошибка экстраполяции равна

$$\sigma^2(y, r) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\int_0^\infty \gamma_m(\lambda)\, [p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} \varrho)]^2\, d\Phi(\lambda) \int_0^\infty \gamma_m(\lambda)\, [p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)]^2\, d\varphi(\lambda) - \left[\int_0^\infty \gamma_m(\lambda)\, p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} \varrho)\, p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)\, d\Phi(\lambda)\right]^2}{\int_0^\infty \gamma_m(\lambda)\, [p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)]^2\, d\Phi(\lambda)}. \tag{25}$$

Ошибка $\sigma^2(y, r)$ равна нулю тогда и только тогда, когда при всех m выполнены равенства

$$\int_0^\infty \gamma_m(\lambda) [p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} \varrho)]^2 d\varphi(\lambda) \int_0^\infty \gamma_m(\lambda) [p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)]^2 d\varphi(\lambda) =$$

$$= \left[\int_0^\infty \gamma_m(\lambda) p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} \varrho) p^m_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r) d\Phi(\lambda)\right]^2. \tag{26}$$

Из формулы (25) вытекает, что среднеквадратическая ошибка экстраполяции зависит только от ϱ.

Экстраполяционная формула и среднеквадратическая ошибка принимают простой вид в том случае, если поле экстраполируется в центре окружности S_r. Именно,

$$\eta(O) = \frac{1}{2\pi} \frac{\int_0^\infty p_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} \varrho) p_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r) d\Phi(\lambda) \int_0^{2\pi} \xi(r, \varphi) d\varphi}{\int_0^\infty [p_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)]^2 d\Phi(\lambda)}, \tag{27}$$

$$\sigma^2(0, r) = \Phi(+\infty) - \frac{\left|\int_0^\infty p_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r) d\Phi(\lambda)\right|^2}{\int_0^\infty [p_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)]^2 d\Phi(\lambda)}. \tag{28}$$

Формула (27) в другом виде указывалась в [6].

Случайное поле $\xi(x)$ безошибочно экстраполируется в центре O окружности по результатам наблюдений на окружности S_r в том и только в том случае, если

$$\Phi(+\infty) \int_0^\infty [p_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r)]^2 d\Phi(\lambda) = \left[\int_0^\infty p_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r) d\Phi(\lambda)\right]^2. \tag{29}$$

Принимая во внимание условие равенства в неравенстве Коши — Буняковского, из (29) получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Случайное поле $\xi(x)$ безошибочно восстанавливается в центре окружности S_r по наблюдениям на этой окружности тогда и только тогда, когда $\Phi(\lambda)$ — ступенчатая функция с точками скачков λ_i, являющимися корнями уравнения

$$p_{\nu(\lambda)}(\operatorname{ch} r) = c, \tag{30}$$

где c — некоторая константа, отличная от нуля.

П р и м е р. Пусть $\Phi(\lambda)$ — ступенчатая функция с одной точкой скачка c и $\Phi(+\infty) = 1$. В этом случае $B(\operatorname{ch} r) = p_{\nu(c)}(\operatorname{ch} r)$. Экстраполяционные формулы и среднеквадратические погрешности имеют вид

$$\eta(y) = \int_0^{2\pi} c(y, x)\, \xi(x)\, d\varphi, \tag{31}$$

где

$$c(y, x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\psi)} \frac{p^m_{\nu(c)}(\operatorname{ch} \varrho)}{p^m_{\nu(c)}(\operatorname{ch} r)}, \tag{32}$$

$$\eta(0) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{p_{\nu(c)}(\operatorname{ch} r)} \int_0^{2\pi} \xi(r, \varphi)\, d\varphi, \tag{33}$$

$$\sigma^2(y, r) = 0, \quad \sigma^2(0, r) = 0$$

для всех r, кроме тех, которые удовлетворяют уравнению $p_{\nu(c)}(\operatorname{ch} r) = 0$. Если $P_{\nu(c)}(\operatorname{ch} r) = 0$, то $\eta(O) = 0$ и $\sigma^2(0, r) = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р о з е н ф е л ь д Б. А. Неэвклидовые геометрии. Гостехиздат, М., 1955.
2. К р е й н М. Г. Эрмитово-положительные ядра на однородных пространствах.— УМЖ, № 4, 1949.
3. Г р а д ш т е й н И. С., Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.
4. Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В. Введение в теорию случайных процессов. «Наука», М., 1965.
5. Я г л о м А. М. Спектральные представления для различных классов случайных функций.— Труды IV Всесоюзн. матем. съезда, I. Л., 1963.
6. Я д р е н к о М. Й. Про один клас ізотропних випадкових полів в просторі Лобачевського.— ДАН УРСР, № 2, 1962.
7. Я д р е н к о М. Й. Про один клас випадкових полів в нескінченновимірному просторі Лобачевського.— ДАН УРСР, № 3, 1962.
8. П о п о в Ю. Д. Об одной задаче линейной экстраполяции для однородных и изотропных полей по наблюдениям на окружности.— Математические заметки, 4, № 5, 1968.
9. П о п о в Ю. Д., Я д р е н к о М. И. Некоторые вопросы спектральной теории однородных и изотропных случайных полей.— Теор. вероятностей и ее примен., **14**, 3, 1969.
10. Я д р е н к о М. И. Об одной экстраполяционной формуле для изотропного случайного поля.— Теория вероятн. и мат. стат., в. 1, 1970.

M. I. Yadrenko

ON SOME PROBLEMS OF THE LINEAR EXTRAPOLATION FOR HOMOGENEOUS AND ISOTROPIC RANDOM FIELD ON THE PLANE OF LOBACHEVSKY

S u m m a r y

The problem of the linear extrapolation for homogeneous and isotropic random field which is observed on the circle in the Lobachevsky plane is considered.

Поступила в редакцию 10.V 1969.