В. В. АНИСИМОВ, студ.
Киевский университет

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ. II

Во второй части работы изучаются совместные предельные распределения случайных векторов $\overline{\{\nu(t)\}} = \{\nu_1(t), \nu_2(t), \ldots, \nu_r(t)\}$ и $\{\overline{\Omega(t)}\} = \{\Omega_1(t), \ldots, \Omega_r(t)\}$ при соответствующей нормировке компонент, когда $t \to \infty$.

Рассмотрим случай, когда матрице $P = \lim\limits_{t\to\infty} P(t)$ соответствует вложенная цепь Маркова с одним классом существенных состояний. Тогда независимо от начального состояния процесса имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть для любого i, $i = \overline{1, r}$ существуют

$$M\tau_t(i) = m_i(t), \quad D\tau_t(i) = D_i(t), \quad 0 < D_i(t) < \infty$$

и

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \frac{D(t)}{tA(t)} \to 0; \qquad 2)\ \frac{A^3(t)}{tD(t)} \to 0; \\ &3)\ \frac{1}{D_i(t)} \int\limits_{|z-m_i(t)|>\varepsilon\sqrt{\frac{tD_i(t)}{A(t)}}} (z - m_i(t))^2 dF_t(i, z) \to 0 \end{aligned}\right. \tag{1}$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Тогда совместное распределение случайного вектора

$$\{\overline{\nu(t), \Omega(t)}\} = \left\{\frac{\mu(t)}{b(t)}(\nu_i(t) - \lambda_i t),\ \frac{g_i(t)}{b(t)}(\Omega_i(t) - m_i(t)\lambda_i t),\ i = \overline{1, r}\right\}$$

слабо сходится к многомерному нормальному распределению. Причем, если матрица P — циклическая порядка h, то распределение не более чем $2r - h$-мерное. Здесь приняты обозначения

$$A(t) = \sum_{k=1}^{r} q_k(t)\, m_k(t), \qquad \lambda_i = \frac{q_i(t)}{A(t)},$$

$$D(t)=\max\{A(t)^2, D_i(t), i=\overline{1,r}\},\ b(t)=\sqrt{\frac{tD(t)}{A(t)}},$$

$$\mu(t)=\min(A(t), \sqrt{D(t)}),$$

$$g_i(t)=\min\left(\frac{A(t)}{m_i(t)}, \sqrt{\frac{D(t)}{D_i(t)}}\right),$$

$$F_t(i, z)=\sum_{j=1}^{r} F_t(i, j, z).$$

Доказательство. Ясно, что функция распределения $\tau_t(i)$

$$F_t(i, z)=P\{\tau_t(i)<z\}=\sum_{j=1}^{r} F_t(i, j, z)$$

(по определению $F_t(i, j, z)$. Легко проверить, что для величин $X_t(k)$, $k=1, 2, \ldots$, введенных в [1], удовлетворяются условия леммы 1 [1], причем $F(z)$ соответствует нормальному закону $N(0, \sigma)$. Введем функционал f следующим образом:

$$f_t^{(k)}(i, x)=\mu(t)\varphi_i+g_i(t)f_i x, \quad i=\overline{1,r}, \quad k=1, 2, \ldots,$$

где φ_i и f_i — произвольные действительные числа.

Тогда дисперсия величины

$$Y_t(1)=\varphi_t(1)-a(t)X_t(1),$$

где $a(t)=\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{r}(\mu(t)\varphi_j+g_j(t)m_j(t)f_j)q_j(t)}{\sum\limits_{i=1}^{r} q_i(t)m_i(t)}$ будет некоторой квадратичной формой переменных f_i и φ_i. Легко показать, что при таком выборе величин $\mu(t)$ и $g_i(t)$ ее можно записать в виде

$$DY_t(1)=D(t)\sigma_t^2(f, \varphi),$$

причем

$$\lim_{t\to\infty}\sigma_t^2(f, \varphi)=\sigma^2(f, \varphi),$$

где $\sigma^2(f, \varphi)$—невырожденная квадратичная форма переменных $\{f_i, \varphi_i\}$, $i=\overline{1,r}$. Условия (1) обеспечивают условия (5) и (6) ([1], теорема 1), если

$$b(t)=\sqrt{\frac{tD(t)}{A(t)}},$$

причем закон $\Phi(z)$ соответствует нормальному закону с параметрами $(0, \sigma(f, \varphi))$. Оттуда же следует, что $\sigma^2(f, \varphi)$ — дисперсия предельного распределения

$$\zeta(t) = \frac{S(t) - ta(t)}{b(t)},$$

которое нормально. Но характеристическая функция $\psi(\lambda)/_{\lambda=1}$ предельного распределения $\zeta(t)$ как функция параметров $\{f_i, \varphi_i\}_{i=\overline{1,r}}$ дает характеристическую функцию совместного распределения случайного вектора $\{\overline{\nu, \Omega}\}$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Теорема 2. Если для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant r$, $D\tau_t(j) = \infty$ и для любого k, $k = \overline{1, r}$ существует $b_k(t)$ такое, что

$$\left(\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\, b_k(t)\right)^{-1} \sum_{i=1}^{\left[\frac{t}{A(t)} q_k(t)\right]} (\tau_k(k, i) - m_k(t)) \overset{\text{сл}\ *)}{=\!\!>} \eta_k \qquad (2)$$

и

$$1)\ \frac{b^2(t)}{tA(t)} \to 0, \quad 2)\ \frac{A^3(t)}{tb^2(t)} \to 0, \quad 3)\ \frac{A(t)}{b(t)} \to 0, \qquad (3)$$

то

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\Omega_k(t) - m_k(t)\lambda_k t}{\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\, b(t)} g_k(t) < x_k,\ k = \overline{1, r}\right\} =$$

$$= P\left\{c_k\eta_k - \sum_{i=1}^{r} a_{ki}\eta_i < x_k,\ k = \overline{1, r}\right\}. \qquad (4)$$

Здесь $b(t) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant r} b_i(t)$,

$$g_k(t) = \min\left(\frac{A(t)}{m_k(t)}, \frac{b(t)}{b_k(t)}\right),$$

$$c_k = \lim_{t\to\infty} g_k(t)\frac{b_k(t)}{b(t)}, \quad k = \overline{1, r};$$

$$a_{ik} = \lim_{t\to\infty} q_i(t)\frac{m_i(t)\, b_k(t)}{A(t)\, b(t)} g_i(t),$$

а величины η_k, $k = \overline{1, r}$ — независимы.

Доказательство. Введем функционал f следующим образом:

$$f_t^{(k)}(i, x) = f_i g_i(t)\, x, \quad k = 1, 2, \ldots, i = \overline{1, r}.$$

*) В смысле слабой сходимости функций распределения. Здесь $\tau_t(k, i)$, $i = 1, 2 \ldots$ — н. о. р. с $\tau_t(k)$ случайные величины ($k = \overline{1, r}$).

Рассмотрим разность

$$\eta(t) = \left| \zeta(t) - \sum_{k=1}^{r} \xi_k(t) \right|,$$

где

$$\xi_k(t) = \left(\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\, b(t) \right)^{-1} \sum_{i=1}^{\left[\frac{tq_k(t)}{A(t)}\right]} (\tau_t(k, i) - m_k(t)) \times$$

$$\times (g_k(t) f_k - a(t)), \quad k = \overline{1, r},$$

и покажем, что $p \lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) = 0$. Поскольку величины $\tau_t(k, i)$ — независимы, то и $\xi_k(t)$ — независимы, причем на основании (2) легко доказать, что

$$\xi_k(t) \overset{\text{сл}}{=\!>} \left(f_k c_k - \sum_{i=1}^{r} f_i a_{ik} \right) \eta_k.$$

Отсюда следует

$$\zeta(t) \overset{\text{сл}}{=\!>} \sum_{k=1}^{r} \left(f_k c_k - \sum_{i=1}^{r} f_i a_{ik} \right) \eta_k = \sum_{k=1}^{r} \left(c_k \eta_k - \sum_{i=1}^{r} a_{ki} \eta_i \right) f_k,$$

а это равносильно (4). Оценим величину $\eta(t)$ следующим образом:

$$\eta(t) \leqslant \sum_{k=1}^{r} |\delta_k(t)| + |\gamma(t)| + |\varrho(t)| + |\beta(t)|,$$

где

$$\delta_k(t) = \left(\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\, b(t) \right)^{-1} \sum_{i=1}^{\left|\left[\nu_k(t) - \frac{tq_k(t)}{A(t)}\right]\right|} (\tau_t(k, i) - m_k(t)), \quad k = \overline{1, r},$$

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\, b(t) \right)^{-1} \sum_{i=1}^{\left[\frac{t}{A(t)}\right]} (g_{\varepsilon_i}(t) f_{\varepsilon_i} - a(t))\, m_{\varepsilon_i}(t),$$

$$\varrho(t) = \left(\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\, b(t) \right)^{-1} \sum_{i=1}^{\left|\left[\nu(t) - \frac{t}{A(t)}\right]\right|} (g_{\varepsilon_i}(t) f_{\varepsilon_i} - a(t))\, m_{\varepsilon_i}(t),$$

$$\beta(t) = \left(\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\, b(t) \right)^{-1} (Y_t'(0) + Y_t''(\nu_1(t))).$$

Заметим, что случайная величина $\gamma(t)$ получается так, как если бы мы положили значение функционала

$$f_t^{(k)}(i, x) = (g_i(t) f_i - a(t))\, m_i(t), \quad k = 1, 2, \ldots, i = \overline{1, r}$$

и рассмотрели сумму

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\, b(t)\right)^{-1} \sum_{k=1}^{\left[\frac{t}{A(t)}\right]} f_t(\varepsilon_k).$$

Однако, используя теорему 1, можно показать, что

$$\left(\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\, A(t)\right)^{-1} \sum_{k=1}^{\left[\frac{t}{A(t)}\right]} f_t(\varepsilon_k) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} \xi,$$

где ξ — собственная, нормально распределенная величина.

Поскольку $\frac{A(t)}{b(t)} \to 0$, то $p \lim\limits_{t\to\infty} \gamma(t) = 0$. Кроме того, совершенно аналогично ([1], теорема 1) показывается, что

$$p \lim_{t\to\infty} \varrho(t) = p \lim_{t\to\infty} \beta(t) = p \lim_{t\to\infty} \delta_k(t) = 0, \quad k = \overline{1, r}.$$

Отсюда следует

$$p \lim_{t\to\infty} \eta(t) = 0.$$

Замечание. Если условие 3) из (3) не выполняется, то совместное распределение вектора $\{\overline{\Omega}\}$ будет композицией распределения типа (4) и нормального.

Теорема 3. Пусть $V(z) = P\{\widetilde{\eta} < z\}$, где

$$\widetilde{\eta} = \sum_{k=1}^{r} \eta_k l_k, \quad \text{а } l_k = \lim_{t\to\infty} \frac{b_k(t)}{b(t)},$$

причем величины η_k, $k = \overline{1, r}$ — независимы.

Тогда в условиях теоремы 2

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\left(\sqrt{\frac{t}{A^3(t)}}\, b(t)\right)^{-1} \left(\nu_k(t) - \frac{g_k(t)\, t}{A(t)}\right) < x_k, k = \overline{1, r}\right\} =$$

$$= 1 - V\left(-\min_{1\leqslant j\leqslant r} \frac{x_j}{\overline{q}_j}\right). \tag{5}$$

Доказательство. Введем функционал f следующим образом:

$$f_t^{(k)}(i, x) = f_i A(t), \quad k = 1, 2, \ldots, i = \overline{1, r}.$$

Аналогично доказательству теоремы 2 можно показать, что

$$\zeta(t) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} (-\bar{a})\tilde{\eta}, \text{ где } \bar{a} = \sum_{i=1}^{r} \bar{q}_i f_i.$$

Отсюда следует (5).

Теорема 4. В условиях теоремы 2

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\left(\sqrt{\frac{t}{A^3(t)}}\, b(t)\right)^{-1}\left(\nu_1(t) - q_1(t)\frac{t}{A(t)}\right) < x_1,\right.$$

$$\left.\left(\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\right)^{-1}\left(\nu_1(t) - \frac{q_1(t)}{q_k(t)}\nu_k(t)\right) < x_k, k = \overline{2, r}\right\} =$$

$$= \left(1 - V\left(-\frac{x_1}{\bar{q}_1}\right)\right) G(x_2, x_3, \ldots, x_r), \tag{6}$$

и если матрица P — циклическая порядка h, то $G(x_2, \ldots x_r)$ соответствует не более чем $r—h—1$-мерному нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей B. Обозначим через ϖ_k случайные величины, равные числу попаданий в состояние $\{k\}$ между выходом и возвращением в $\{1\}$ для цепи с матрицей P; ясно, что величины ω_k имеют все моменты. Тогда $B = \|b_{ij}\|$, $i, j = \overline{2, r}$, где

$$b_{ij} = \frac{\bar{q}_1^2}{\bar{q}_i \bar{q}_j} M\left(\varpi_i - \frac{\bar{q}_i}{\bar{q}_1}\right)\left(\varpi_j - \frac{\bar{q}_j}{\bar{q}_1}\right).$$

Доказательство. Положим значение функционала

$$f_t^{(k)}(1, x) = \left(\sqrt{\frac{t}{A^3(t)}} b(t)\right)^{-1} f_1 + \left(\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\right)^{-1}(f_2 + f_3 + \ldots + f_r),$$

$$f_t^{(k)}(i, x) = -\left(\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\right)^{-1} \frac{q_1(t)}{q_i(t)} f_i, \quad i = \overline{2, r}, k = 1, 2, \ldots$$

и рассмотрим случайную величину

$$\zeta(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t)} f_t(\varepsilon_k) - \frac{\sqrt{tA(t)}}{b(t)} q_1(t) f_1.$$

Покажем, что

$$\zeta(t) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} -\overline{q}_1 f_1 \tilde{\eta} + \xi(f_2, f_3, \ldots f_r), \tag{7}$$

где $\tilde{\eta}$ и $\xi(f_2, \ldots, f_r)$ независимы и $\xi(f_2, f_3, \ldots, f_r)$ — нормально распределенная величина с параметрами $(0, \sigma^2(f_2, f_3, \ldots, f_r))$.

Отсюда будет следовать (6).

Положим $f_1 = 0$. Тогда на основании теоремы 1

$$\zeta(t) /_{f_1=0} \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} \xi(f_2, f_3, \ldots, f_r),$$

причем можно показать, что величине $\xi(f_2, f_3, \ldots, f_r)$ действительно соответствует закон $G(x_2, x_3, \ldots, x_r)$. Теперь положим $f_2 = f_3 = \ldots \ldots = f_r = 0$. Тогда на основании теоремы 3

$$\zeta(t) / _{f_k=0} \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} -\overline{q}_1 f_1 \tilde{\eta}, \quad k = \overline{2, r}.$$

Обозначим $M \exp\{i\lambda\zeta(t)\} = \varphi_t(\lambda, f_1, f_2, \ldots, f_r)$. Достаточно показать, что

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_t(\lambda, f_1, f_2, \ldots, f_r) = \overline{\varphi}_1(\lambda, f_1)\overline{\varphi}_2(\lambda, f_2, f_3, \ldots, f_r). \tag{8}$$

Отсюда следует независимость $\tilde{\eta}$ и $\xi(f_2, f_3, \ldots, f_r)$.

В работе [1] было доказано, что

$$\psi_t(1, \lambda) = (r_{12}, r_{13}, \ldots, r_{1r})(\mathrm{E} - \mathrm{R})^{-1}\overline{(p)}, \tag{9}$$

где $\psi_t(1, \lambda) = M \exp\{i\lambda Y_t(1)\}$, $r_{ij} = p_t(i, j)\varrho_t(\lambda, i, j)$.

При нашем введении функционала и в условиях теоремы 3 можно показать, что для величин $\varrho_t(\lambda, i, j)$ имеет место разложение:

$$\varrho_t(\lambda, i, j) = 1 + \lambda \frac{a_{ij}(f_2, \ldots, f_r)}{\sqrt{\frac{t}{A(t)}}} + \lambda \frac{c_{ij} f_1}{\sqrt{\frac{t}{A^3(t)}}\, b(t)} - $$

$$- \lambda^2 \frac{b_{ij}(f_2, \ldots, f_r)}{\frac{t}{A(t)}} - \lambda^\alpha \frac{d_{ij} f_1^\alpha}{\frac{t}{A(t)}} + o\left(\frac{A(t)}{t}\right),$$

где $a_{ij}(f_2, f_3, \ldots, f_r)$ — некоторые линейные формы, $b_{ij}(f_2, f_3, \ldots, f_r)$ — квадратичные формы, c_{ij}, d_{ij} — коэффициенты, $1 < \alpha < 2$.

Так как $\frac{A(t)}{b(t)} \to 0$, то при перемножении величин $\varrho_t(\lambda, i, j)$ получаются величины такого же вида, и можно легко убедиться в том, что

$$\psi_t(1,\lambda)=1-\lambda^2\sigma^2(f_2,\ldots,f_r)\frac{A(t)}{t}-d\lambda^\alpha f_1^\alpha\frac{A(t)}{t}-o\left(\frac{A(t)}{t}\right).$$

Отсюда следует справедливость (8), поскольку

$$\varphi_t(\lambda,f_1,f_2,\ldots f_r)=(\psi_t(1,\lambda))^{\frac{t}{A(t)}}.$$

Замечание. Теорема 4 будет справедлива и в том случае, если рассматривать случайный вектор вида

$$\left\{\left(\sqrt{\frac{t}{A^3(t)}}\,b(t)\right)^{-1}\left(\nu_1(t)-\frac{q_1(t)\,t}{A(t)}\right),\left(\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\right)^{-1}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=1}^{r}c_k^{(i)}(t)\,\nu_k(t),\quad i=\overline{2,r}\right\},$$

где $c_k^{(i)}(t)$, $k=\overline{1,r}$, $i=\overline{2,r}$ — некоторые, зависящие от t константы,

$$\left|\sum_{k=1}^{r}c_k^{(i)}(t)\right|\leqslant c<\infty,\qquad \sum_{k=1}^{r}c_k^{(i)}(t)\,q_k(t)=0,\ i=\overline{2,r}$$

и ранг матрицы $Q=\|c_k^{(i)}(\infty)\|$, $k=\overline{1,r}$, $i=\overline{2,r}$ равен $r-1$.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Пусть при каждом $t\in(0,\infty)$ I_t — цепь Маркова с непрерывным временем и конечным числом r состояний, которая задается матрицей плотностей переходов $\Lambda(t)=\|\lambda_{ij}(t)\|$, $ij=\overline{1,r}$, причем $\lambda_{ii}(t)=0$, $i=\overline{1,r}$. Введем вложенную цепь Маркова с матрицей $P(t)=\|p_{ij}(t)\|$, где

$$p_{ij}(t)=\lambda_{ij}(t)\left(\sum_{k=1}^{r}\lambda_{ik}(t)\right)^{-1}.$$

Обозначим

$$\alpha_i(t)=\sum_{k=1}^{r}\lambda_{ik}(t).$$

Если матрице $P=\lim\limits_{t\to\infty}P(t)$ соответствует один класс существенных состояний и $t\alpha_i(t)\to\infty$, $i=\overline{1,r}$, то совместное распределение вектора

$$\left\{\sqrt{\frac{A(t)}{t}}\left(\nu_i(t)-\frac{q_i(t)\,t}{A(t)}\right),\ \sqrt{\frac{A(t)}{t}}\,\alpha_i(t)\left(\Omega_i(t)-\frac{q_i(t)\,t}{\alpha_i(t)\,A(t)}\right),\ i=\overline{1,r}\right\}$$

слабо сходится к многомерному нормальному распределению. Здесь $A(t) = \sum_{k=1}^{r} \frac{q_k(t)}{\alpha_k(t)}$, а $q_k(t)$ — эргодическое распределение для матрицы $\mathrm{P}(t)$.

Действительно, в этом случае все времена сидения — показательно распределенные величины и все условия теоремы 1 выполняются.

Аналогичный результат имеет место для цепей Маркова с дискретным временем, которые задаются матрицей переходных вероятностей $\mathrm{A}(n) = \| a_{ij}(n) \|, i, j = \overline{1, r}$. Для них $\alpha_i(n) = 1 - a_{ii}(n)$, а элементы вложенной цепи $p_{ij}(n) = \frac{a_{ij}(n)}{\alpha_i(n)}$, и сходимость к нормальному закону имеет место при тех же условиях, только t заменяется на n.

2. Рассмотрим полумарковский процесс $\varkappa(s) \in \{1,2, \ldots, r\}$, параметры которого не зависят от t, а вложенной цепи соответствует один существенный класс состояний. Если $M\tau(i) = m_i < \infty$ для всех $i = \overline{1, r}$ и существует такое j, что $D\tau(j) = \infty$, то выполняются условия теоремы 2 и, следовательно, к данному процессу приложимы теоремы 2, 3 и 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анисимов В. В. Предельные теоремы для полумарковских процессов. I (См. настоящий сборник).

V. V. Anisimov

LIMIT THEOREMS FOR SEMI-MARKOV PROCESSES. II.

Summary

This article deals with the investigation of limit multidimensional distributions for number of hitting times and occupation times in the scheme of series for semi-Markov process with finite number of states.

Поступила в редакцию 16.IV 1969.