В. Н. БАНДУРА, мл. научн. сотр.
Донецкий вычислительный центр АН УССР

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ СО СБРОСАМИ В НОЛЬ

В работе [1] рассматривалась следующая схема суммирования независимых случайных величин $\xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)}, \ldots$: если накопленная к k-му шагу сумма равна $\eta_k^{(n)}$ и $\xi_k^{(n)} = y$, то

$$\eta_{k+1}^{(n)} = \begin{cases} 0 \text{ с вероятностью } p_k^{(n)}(y) \\ \eta_k^{(n)} + y \text{ с вероятностью } 1 - p_k^{(n)}(y) \end{cases}.$$

Для последовательности серий $\eta_0^{(n)}, \eta_1^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)}$ была доказана предельная теорема о сходимости распределения $\eta_n^{(n)}$ к переходной вероятности некоторого марковского процесса.

В настоящей заметке рассматривается аналогичная задача в несколько более общих условиях и доказывается слабая сходимость процессов, построенных по сериям, к марковскому процессу, который естественно назвать диффузионным процессом со сбросами в ноль.

I. Рассмотрим следующее уравнение в частных производных:

$$Lv \equiv -\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + b(x)\frac{\partial v}{\partial x}(t, x) + \frac{a(x)}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) -$$

$$- c(x)[v(t, x) - v(t, 0)] = 0, \tag{1}$$

где 1) $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ — непрерывные ограниченные функции, 2) $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ удовлетворяют условию Липшица

$$|a(x) - a(y)| + |b(x) - b(y)| + |c(x) - c(y)| < K|x - y|,$$

3) $a(x) \geqslant \mu > 0$; и задачу Коши для этого уравнения

$$Lv = 0, \lim_{t \to +0} v(t, x) = f(x), \tag{2}$$

где 4) $f(x)$ — непрерывная и ограниченная на всей прямой функция.

Лемма. Пусть функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $f(x)$ удовлетворяют условиям 1) — 4). Тогда решение задачи (2) можно записать в виде

$$v(t, x) = \int_0^t v(\tau, 0)\, d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} Z(x, t; \xi, \tau)\, c(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} Z(x, t; \xi, 0)\, f(\xi)\, d\xi = v_1(t, x) + v_2(t, x), \qquad (3)$$

где $Z(x, t; \xi, \tau)$ — фундаментальное решение уравнения

$$L_1 u = -\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + b(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{a(x)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) -$$

$$- c(x)\, u(t, x) = 0,$$

а $v(t, 0)$ является решением такого интегрального уравнения:

$$v(t, 0) = \int_0^t v(\tau, 0)\, d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} Z(0, t; \xi, \tau)\, c(\xi)\, d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} Z(0, t; \xi, 0)\, f(\xi)\, d\xi.$$

При этом $v(t, x)$ имеет ограниченные производные $\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

Доказательство. Известно [2], что $v_2(t, x)$ есть решение задачи

$$L_1 u = 0, \lim_{t \to +0} u(t, x) = f(x).$$

Далее, $v(t, 0)$ есть решение уравнения Вольтера первого рода с ядром, имеющим ограниченную особенность (это следует из оценок, приведенных в [2]), так что оно является ограниченной и непрерывной функцией. Аналогично тому, как это сделано в [2], убеждаемся, что $v_1(t, x)$ удовлетворяет уравнению $Lu=0$ с нулевыми начальными условиями. Окончательно видим, что $v(t, x)$ действительно есть решение задачи (2). Методы работы [2] позволяют установить, что это решение имеет ограниченные частные производные $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

II. Рассмотрим последовательность серий случайных величин $\zeta_{n0}, \zeta_{n1}, \ldots, \zeta_{nn}$, $n = 1, 2, \ldots$ таких, что в каждой серии ζ_{nk} образуются по следующему закону:

$$\zeta_{n0} = 0, \zeta_{nk+1} = (\zeta_{nk} + \xi_{nk+1})\, \eta_{nk+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Здесь ξ_{nk} и η_{nk} — случайные величины такие, что

$$P\{\xi_{nk+1} < y \mid \zeta_{nk} = x\} = F_n(y/x),$$

$$P\{\eta_{nk+1}=0\mid\zeta_{nk}=x\}=1-P\{\eta_{nk+1}=1\mid\zeta_{nk}=$$
$$=x\}=q_n(x)=1-p_n(x).$$

Очевидно, каждая серия есть цепь Маркова с переходной функцией

$$P\{\zeta_{nk+1}<y\mid\zeta_{nk}=x\}=P_n(x)F_n(y-x/x)+q_n(x)\chi(y),$$

где

$$\chi(y)=\begin{matrix}1 \text{ при } y>0,\\ 0 \text{ при } y\leqslant 0.\end{matrix}$$

Обозначим

$$a_n(x)=M\{\xi_{nk}^2\mid\zeta_{nk-1}=x\}=\frac{a(x)}{n}+\frac{a_1(x,n)}{n^{3/2}},$$

$$b_n(x)=M\{\xi_{nk}\mid\zeta_{nk-1}=x\}=\frac{b(x)}{n}+\frac{b_1(x,n)}{n^{3/2}},$$

$$q_n(x)=\frac{c(x)}{n}+\frac{c_1(x,n)}{n^{3/2}}.$$

Здесь функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ считаем удовлетворяющими условиям 1) — 3) и $|a_1(x,n)|+|b_1(x,n)|+|c_1(x,n)|<K$.

Пусть $f(x)$ — функция, удовлетворяющая условию 4), и

$$u_n(k,x)=M\{f(\zeta_{nk})\mid\zeta_{n0}=x\}.$$

Тогда $u_n(0,x)=f(x)$, а для $u_n(k,x)$ получаем рекуррентное соотношение

$$u_n(k,x)=p_n(x)\sum_{-\infty}^{+\infty}u_n(k-1,x+y)F_n(dy/x)+q_n(x)u_n(k-1,0).$$

Функция $z(t,x)$ называется верхней для рассматриваемой задачи [3], если она удовлетворяет условиям:

а) $z(0,x)\geqslant f(x)$,

$$\text{б) }\Delta(x)=z\left(\frac{k}{n},x\right)-p_n(x)\int_{-\infty}^{+\infty}z\left(\frac{k-1}{n},x+y\right)\times$$
$$\times F_n(dy/x)-q_n(x)z\left(\frac{k-1}{n},0\right)\geqslant 0.$$

Возьмем $z(t,x)$ в виде $v(t,x)+A_n(t)$, где $v(0,x)=f(x)$, $A_n(0)\geqslant 0$, и выберем v и A_n так, чтобы обеспечить выполнение условия б).

Имеем

$$\Delta(x) = v\left(\frac{k}{n}, x\right) + A_n\left(\frac{k}{n}\right) - p_n(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\left[v\left(\frac{k-1}{n}, x+y\right) +\right.$$

$$\left. + A_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]F_n(dy/x) - q_n(x)\left[v\left(\frac{k-1}{n}, 0\right) + A_n\left(\frac{k-1}{n}\right)\right] =$$

$$= A_n\left(\frac{k}{n}\right) - A_n\left(\frac{k-1}{n}\right) + v\left(\frac{k}{n}, x\right) - p_n(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{v\left(\frac{k-1}{n}, x\right) +\right.$$

$$+ \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{k-1}{n}, x\right)y +$$

$$\left. + \frac{y^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{k-1}{n}, x\right)\right\}F_n(dy/x) - q_n(x)\,v\left(\frac{k-1}{n}, 0\right) +$$

$$+ R_1(k, n, x) = A_n\left(\frac{k}{n}\right) - A_n\left(\frac{k-1}{n}\right) + v\left(\frac{k}{n}, x\right) -$$

$$- p_n(x)\,v\left(\frac{k-1}{n}, x\right) - p_n(x)\,b_n(x)\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{k-1}{n}, x\right) -$$

$$- p_n(x)\frac{a_n(x)}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{k-1}{n}, x\right) - q_n(x)\,v\left(\frac{k-1}{n}, 0\right) +$$

$$+ R_1(k, n, x) = A_n\left(\frac{k}{n}\right) - A_n\left(\frac{k-1}{n}\right) + v\left(\frac{k}{n}, x\right) -$$

$$- v\left(\frac{k-1}{n}, x\right) - p_n(x)\,b_n(x)\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{k-1}{n}, x\right) -$$

$$- p_n(x)\frac{a_n(x)}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{k-1}{n}, x\right) - q_n(x)\left[v\left(\frac{k-1}{n}, x\right) -\right.$$

$$\left. - v\left(\frac{k-1}{n}, 0\right)\right] + R_1(k, n, x) =$$

$$= A_n\left(\frac{k}{n}\right) - A_n\left(\frac{k-1}{n}\right) - \frac{1}{n}\left\{-\frac{\partial v}{\partial t}\left(\frac{k-1}{n}, x\right) +\right.$$

$$+ b(x)\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{k-1}{n}, x\right) + \frac{a(x)}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{k-1}{n}, x\right) -$$

$$-c(x)\left[v\left(\frac{k-1}{n},x\right)-v\left(\frac{k-1}{n},0\right)\right]\Bigg\}+$$
$$+R_1(k,n,x)+R_2(k,n,x)+R_3(k,n,x).$$

Здесь

$$R_1(k,n,x)=\frac{p_n(x)}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{k-1}{n},\ x\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{k-1}{n},\ x+\theta_1 y\right)\right]y^2F_n(dy/x),$$

$$R_2(k,n,x)=\frac{1}{n}\left[\frac{\partial v}{\partial t}\left(\frac{k-\theta_2}{n},\ x\right)-\frac{\partial v}{\partial t}\left(\frac{k-1}{n},\ x\right)\right],$$

$$R_3(k,n,x)=\frac{1}{n^2}\left[\left(c(x)+\frac{c_1(x,n)}{\sqrt{n}}\right)\left(b(x)+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{b_1(x,n)}{\sqrt{n}}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{k-1}{n},\ x\right)+\frac{1}{2}\left(c(x)+\frac{c_1(x,n)}{\sqrt{n}}\right)\left(a(x)+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{a_1(x,n)}{\sqrt{n}}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{k-1}{n},\ x\right)\right],\qquad 0<\theta_i<1,\qquad i=1,2.$$

Если теперь выберем в качестве функции $v(t,x)$ решение задачи (2), а $A_n(t)$ положим равной $tn^{-1/2}$, то условие б) будет выполнено. В силу леммы и определения верхней функции видим, что $u_n(k,x)-v\left(\frac{k}{n},x\right)\leqslant\frac{c}{\sqrt{n}}$ при достаточно больших n.

Аналогично, беря нижнюю функцию $z^{(1)}(t,x)$ в виде $v(t,x)-A_n(t)$ и повторяя предыдущие рассуждения, имеем вообще $\left|u_n(k,x)-v\left(\frac{k}{n},\ x\right)\right|<\frac{c}{\sqrt{n}}$.

Пусть $\frac{k}{n}$, $k=0,1,\ldots,n$ — разбиение отрезка $[0,1]$. Определим случайные процессы $\zeta_n(t)$ как ломаные с вершинами в точках $\left(\frac{k}{n},\zeta_{nk}\right)$, $k=0,1,\ldots,n$. Если $k=[nt]$, $0\leqslant t\leqslant 1$, то из вышеприведенного неравенства имеем

$$\left|u_n([nt],x)-v\left(\frac{[nt]}{n},\ x\right)\right|\leqslant\frac{c}{\sqrt{n}}.$$

Все сказанное убеждает нас в том, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\zeta_{n0}, \zeta_{n1}, \ldots, \zeta_{nn}$ — последовательность серий случайных величин; члены каждой серии образуются по закону $\zeta_{n0} = 0$, $\zeta_{nk+1} = (\zeta_{nk} + \xi_{nk+1})\,\eta_{nk+1}$, где ξ_{nk} и η_{nk} — случайные величины такие, что

$$P\{\xi_{nk} < x/\zeta_{nk-1} = y\} = F_n(x/y),$$

$$P\{\eta_{nk} = 0/\zeta_{nk-1} = y\} = 1 - P\{\eta_{nk} = 1/\zeta_{nk-1} = y\} = q_n(y),$$

$$a_n(y) = M\{\xi_{nk}^2/\zeta_{nk-1} = y\} = \frac{a(y)}{n} + \frac{a_1(y, n)}{n^{3/2}},$$

$$b_n(y) = M\{\xi_{nk}/\zeta_{nk-1} = y\} = \frac{b(y)}{n} + \frac{b_1(y, n)}{n^{3/2}},$$

$$q_n(y) = \frac{c(y)}{n} + \frac{c_1(y, n)}{n^{3/2}}.$$

Здесь функции $a(y)$, $b(y)$, $c(y)$ удовлетворяют условиям 1) — 3) и $|a_1(y, n)| + |b_1(y, n)| + |c_1(y, n)| < K$.

Пусть, наконец, $\zeta_n(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ — случайные ломаные с вершинами в точках $\left(\frac{k}{n}, \zeta_{nk}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Тогда конечномерные распределения процессов $\zeta_n(t)$ при $n \to \infty$ слабо сходятся к конечномерным распределениям марковского процесса $\zeta(t)$, инфинитезимальный оператор которого имеет вид

$$Au(x) = b(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a(x)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c(x)[u(x) - u(0)].$$

Теорема 2. В условиях теоремы 1 для всякого функционала $l(\cdot)$ на пространстве $D_{[0,1]}$ функций без разрывов второго рода, непрерывного в топологии Скорохода, распределение $l(\zeta_n(\cdot))$ слабо сходится к распределению $l(\zeta(\cdot))$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность серий случайных величин $\zeta_{n0}^{(1)}, \zeta_{n1}^{(1)}, \ldots, \zeta_{nn}^{(1)}$; в каждой серии $\zeta_{n0}^{(1)} = 0$, $\zeta_{nk+1}^{(1)} = \zeta_{nk}^{(1)} + \xi_{nk+1}$, где ξ_{nk} — такие же, как и ранее. Построим случайные ломаные $\zeta_n^{(1)}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ с вершинами в точках $\left(\frac{k}{n}, \zeta_{nk}^{(1)}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Нетрудно проверить, что условия теоремы 1 § 4 гл. 9 из [4] в нашем случае выполнены для последовательности серий $\zeta_{nk}^{(1)}$, $k = 0, 1, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$, так что конечномерные распределения процессов $\zeta_n^{(1)}(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса, являющегося решением стохастического дифференциального уравнения

$$\zeta^{(1)}(t) = \int_0^t b(\zeta^{(1)}(s))\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t a(\zeta^{(1)}(s))\,dw(s).$$

Для доказательства теоремы достаточно [4] показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{c\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}} P\{\Delta_c(\zeta_n(t)) > \varepsilon\} = 0$$

определение $\Delta_c(x)$ приводится там же). Но, очевидно,

$$\lim_{c\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}} P\{\Delta_c(\zeta_n(t)) > \varepsilon\} \leqslant \lim_{c\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}} P\{\sup_{|t_1-t_2|<c} |\zeta_n^{(1)}(t_1) - \zeta_n^{(1)}(t_2)| > \varepsilon\}.$$

Правая часть этого неравенства равна нулю в силу теоремы 2 § 4 гл. 9 из [4], а вместе с ней и левая. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван-Ань, Єжов І. І. Граничні теореми для одного класу випадкових величин, зв'язаних в ланцюги Маркова.— ДАН УРСР, сер. А., 7, 1967.
2. Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа.—УМН, XVII, 3 (105), 1962.
3. Гихман И. И. Об одной асимптотической теореме для сумм малых случайных слагаемых.— Труды ин-та математики и механики АН УзбССР, 10, 1, 1952.
4. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.

V. N. Bandura

LIMIT THEOREM FOR A DIFFUSION PROCESS WITH DRIFTS IN ZERO

Summary

Let $\zeta_{n0} = 0, \zeta_{n1}, \ldots, \zeta_{nn}$ be a sequence of series of random variables, where $\zeta_{nk+1} = (\zeta_{nk} + \xi_{nk+1})\,\eta_{nk+1}$ and $P\{\xi_{nk} < x \mid \zeta_{nk-1} = y\} = F_n(x \mid y)$, $P\{\eta_{nk} = 0 \mid \zeta_{nk-1} = y\} = 1 - P\{\eta_{nk} = 1 \mid \zeta_{nk-1} = y\} = q_n(y)$. Let $\zeta_n(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ be random broken lines with apexes in points $\left(\frac{k}{n}, \zeta_{nk}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Limit theorem on a convergence $\zeta_n(t)$ to Markov random process is proved.

Поступила в редакцию 8.IV 1969.