Г. П. БУЦАН, асп.
Институт математики АН УССР

ОПЕРАТОРНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Хорошо известна конструкция стохастического интеграла от случайной числовой функции $Z(t, \omega)$ по мартингалу $Y(t, \omega)$, принимающему числовые значения [1]. В работе проводится построение стохастического интеграла для случайных функций $Z(t, \omega)$ со значениями в некотором сепарабельном гильбертовом (банаховом) пространстве H или пространстве G_H, всех линейных ограниченных операторов над H, по мультипликативному семейству $X_s^t(\omega)$ со значениями в G_H. Семейство X_s^t называется мультипликативным [7], если выполняются равенства

$$X_p^t = X_s^t X_p^s, \qquad X_s^s = \mathrm{E} \quad \text{при} \quad p \leqslant s \leqslant t.$$

В дальнейшем рассматриваются только такие мультипликативные семейства, значения которых на непересекающихся интервалах суть независимые случайные величины. (Вероятностная мера $P(\cdot)$ индуцируется на σ-алгебре всех борелевских множеств слабой топологии в G_H некоторым измеримым отображением $\gamma : \Omega \to G_H$ и на σ-алгебре всех борелевских множеств слабой топологии в H — измеримым отображением $\overline{\gamma} : \Omega \to H$, $\{\Omega, \gamma, P\}$ — фиксированы).

Итак, пусть даны указанные пространства H и G_H и мультипликативное семейство X_s^t, непрерывное справа по вероятности в сильной топологии и удовлетворяющее условию: $MX_s^t = E$. (Как будет видно из дальнейшего, эти добавочные предположения существенно не влияют на рассматриваемые построения и приняты в основном для упрощения записи).

Определим

$$F_p^{(y)}(t) = M \| (X_p^t - E) y \|^2,$$

$$\sigma_s^t = \sigma \{X_\theta^\tau,\ s \leqslant \theta \leqslant \tau \leqslant t\},$$

а операторы C_s^t и $B_p^s(y)$ из соотношений

$$\langle C_s^t z, z\rangle = M\,\|(X_s^t - \mathrm{E})\,z\|^2,$$

$$\langle B_p^s(y)\,z, z\rangle = M\,\langle X_p^s y, z\rangle^2.$$

Предположим, что C_s^t — ядерный оператор (в дальнейшем ядерность C_s^t достаточно предполагать при малых $t-s$) и $\exists y \in H$, что $B_p^s(y)$ удовлетворяет условию $\exists b_p^s(y) > 0$, s-измеримая по Лебегу и такая, что

$$\forall z \in H,\ \langle (B_p^s(y) - b_p^s(y)\,\mathrm{E})\,z, z\rangle \geqslant 0.$$

Имеем:

$$F_p^{(y)}(t) = M\,\langle (X_p^t - \mathrm{E})^* (X_p^t - \mathrm{E})\,y, y\rangle =$$

$$= M\,\langle (X_p^t \mp X_p^s - \mathrm{E})^* (X_p^t \mp X_p^s - \mathrm{E})\,y, y\rangle =$$

$$= M\,\langle [(X_s^t - \mathrm{E})\,X_p^s + X_p^s - \mathrm{E}]^* [\ \ ]\,y, y\rangle =$$

$$= M\,\langle (X_p^t - X_p^s)^* (\ \ )\,y, y\rangle + M\,\langle (X_p^s - \mathrm{E})^* (\ \ )\,y, y\rangle +$$

$$+ M\,\langle (X_p^s)^* (X_s^t - \mathrm{E})^* (X_p^s - \mathrm{E})\,y, y\rangle +$$

$$+ M\,\langle (X_p^s - \mathrm{E})^* (X_s^t - \mathrm{E})\,X_p^s y, y\rangle =$$

$$= M\,\langle (X_p^t - X_p^s)^* (\ \ )\,y, y\rangle + F_p^{(y)}(s).$$

Откуда

$$F_p^{(y)}(t) - F_p^{(y)}(s) = M\,\langle (X_p^t - X_p^s)^* (\ \ )\,y, y\rangle =$$

$$= M\,\langle C_s^t X_p^s y, X_p^s y\rangle = \mathrm{Sp}\, C_s^t B_p^s(y).$$

Далее,

$$\mathrm{Sp}\, C_s^t \leqslant \frac{F_p^{(y)}(t) - F_p^{(y)}(s)}{b_p^s(y)} = a_p^s(y)\,\Delta F_p^{(y)}(s),$$

где

$$a_p^s(y) = [b_p^s(y)]^{-1}, \qquad \Delta F_p^{(y)}(s) = F_p^{(y)}(t) - F_p^{(y)}(s),$$

так как

$$\mathrm{Sp}\, C_s^t B_p^s(y) \geqslant b_p^s(y)\,\mathrm{Sp}\, C_s^t;$$

и

$$M\,\|(X_s^t - \mathrm{E})\,X_p^s Z(s)\|^2 =$$

$$= M\,\langle (X_s^t - \mathrm{E})^* (\ \ )\,X_p^s Z(s),\ X_p^s Z(s)\rangle =$$

$$= M\,\langle C_s^t X_p^s Z(s),\ X_p^s Z(s)\rangle = \mathrm{Sp}\, C_s^t A_p^s,$$

где $Z(t)$ — измерима σ_p^t при каждом t и принимает значения из H,

$$\langle A_p^s x, x\rangle = M\,\langle X_p^s Z(s), x\rangle^2, \qquad x \in H.$$

Поэтому

$$M\left\| \sum_{k=1}^{n} (X_p^{t_{k+1}} - X_p^{t_k}) Z(t_k) \right\|^2 =$$

$$= M \left\langle \sum_{k=1}^{n} (X_p^{t_{k+1}} - X_p^{t_k})^* (\ ) Z(t_k), Z(t_k) \right\rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M \langle (X_{t_k}^{t_{k+1}} - \mathrm{E})^* (\ ) X_p^{t_k} Z(t_k),\ X_p^{t_k} Z(t_k) \rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Sp} C_{t_k}^{t_{k+1}} A_p^{t_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \| A_p^{t_k} \| \operatorname{Sp} C_{t_k}^{t_{k+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_p^{t_k}(y) \| A_p^{t_k} \| \Delta F_p^{(y)}(t_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_p^{t_k}(y) M \| X_p^{t_k} Z(t_k) \|^2 \Delta F_p^{(y)}(t_k),$$

где третье от конца неравенство легко обосновывается с помощью соотношения II) на стр. 47, леммы 3.3 и теоремы 8.4 в [4], а $p = t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1} = q$ (q может равняться ∞).

Замыкаем теперь все ступенчатые функции $Z(t)$ указанного вида, для которых $M \| X_p^t Z(t) \|^2 < \infty$ в норме

$$\| Z(\cdot) \|_1^2 = \int_p^q a_p^t(y) M \| X_p^t Z(t) \|^2 dF_p^{(y)}(t),$$

и получаем некоторое банахово пространство $\mathfrak{M}_y$. Как обычно (см. например [1], стр. 394 — 396), доказывается, что всякая функция $Z(t)$ со значениями в H, измеримая относительно σ_p^t при каждом t и такая, что $\| Z(\cdot) \|_1 < \infty$, входит в $\mathfrak{M}_y$, если под интегралом от $Z(t)$ со значениями в H понимать интеграл Бохнера (см. [2], стр. 92 и далее). Поэтому $\int_p^q d_1 X_p^t Z(t)$ можно определить как среднеквадратичный предел соответствующих интегральных сумм $\forall Z(t) \in \in \mathfrak{M}_y$ и

$$M \left\| \int_p^q d_1 X_p^t Z(t) \right\|^2 \leqslant \| Z(\cdot) \|_1^2.$$

Выше предполагалось, что приращение

$$\Delta_1 X_p^{t_k} = X_p^{t_{k+1}} - X_p^{t_k}.$$

Аналогично можно построить иной интеграл, если взять приращением

$$\Delta_2 X_p^{t_k} = X_{t_k}^{t_{k+1}} - \mathrm{E}.$$

В тех же предположениях относительно C_s^t и $B_p^s(y)$ можно показать, что $\int\limits_p^q d_2 X_p^t Z(t)$ определен для $Z(t)$ со значениями в H, измеримой σ_p^t при каждом $t \geqslant p$ и такой, что

$$\int\limits_p^q a_p^t(y) M \| Z(t) \|^2 dF_p^{(y)}(t) = \| Z(t) \|_2^2 < \infty,$$

причем

$$M \left\| \int\limits_p^q d_2 X_p^t Z(t) \right\|^2 \leqslant \| Z(\cdot) \|_2^2.$$

Заметим, что предположение $MX_s^t = \mathrm{E}$, $t \geqslant s \geqslant p$ в данном случае существенно не влияет на общность утверждений, так как если оно не выполняется и MX_s^t имеет обратный оператор, то вместо X_s^t можно рассматривать $(MX_s^t)^{-1} X_s^t = \overline{X}_s^t$ и для него с небольшими изменениями построить указанный интеграл.

Аналогично тому, как это проделано в [1], можно показать, что $Y_p(t) = \int\limits_p^t dX_p^u Z(u)$ является мартингалом по t. Кроме того, $Y_p(t)$ будет непрерывным справа по t в каждой точке в среднеквадратичном, что легко следует из определения.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании $\int\limits_p^q Z(t)\, dX_p^t x$, где $Z(t)$ — измеримая σ_p^t-функция при каждом t, принимающая значения в G_H и $M \| Z(t) \|^2 \| X_p^t x \|^2 < \infty$ при $\Delta_1 X_p^{t_k}$ или $M \| Z(t) \|^2 < \infty$ при $\Delta_2 X_p^{t_k}$, $x \in H$. Аналогично тому, как это было проделано выше, $\int\limits_p^q Z(t)\, dX_p^t x$ можно определить как среднеквадратичный предел соответствующих интегральных сумм для таких $Z(t)$, что:

1) $\int\limits_p^q a_p^t(y) M \| X_p^t \| Z(t) \| x \|^2 dF_p^{(y)}(t) < \infty$ при $\Delta_1 X_p^{t_k}$,

2) $\int\limits_p^q a_p^t(y) M \| Z(t) \|^2 dF_p^{(y)}(t) < \infty$ при $\Delta_2 X_p^{t_k}$.

Причем

$$M \left\| \int\limits_p^q Z(t)\, d_1 X_p^t x \right\|^2 \leqslant \int\limits_p^q a_p^t(y) M \| X_p^t \| Z(t) \| x \|^2 dF_p^{(y)}(t),$$

$$M\left\|\int_p^q Z(t)\,d_2X_p^t x\right\|^2 \leqslant \|x\|^2 \int_p^q a_p^t(y)\,M\,\|Z(t)\|^2\,dF_p^{(y)}(t)$$

соответственно. Кроме того,

$$Y_1(t)(x) = \int_p^t Z(t)\,d_1X_p^t x,$$

$$Y_2(t)(x) = \int_p^t Z(t)\,d_2X_p^t x$$

будут мартингалами, t-непрерывными справа в среднеквадратичном
Далее, $\forall \Lambda \in \sigma_p^s$ имеем

$$\int_\Lambda M\left\{\left\|\int_s^t Z(u)\,d_1X_p^u x\right\|^2 \mid \sigma_p^s\right\} dP = \int_\Lambda \left\|\int_s^t Z(u)\,d_1X_p^u x\right\|^2 dP =$$

$$= \int_H \left\|\int_s^t Z(u)\,\chi(\Lambda)\,d_1X_p^u x\right\|^2 dP \leqslant$$

$$\leqslant \int_s^t M a_p^u(y)\,\|X_p^u\|\,Z(u)\,\|\chi(\Lambda)\,x\|^2\,dF_p^{(y)}(u) =$$

$$= \int_s^t \int_\Lambda \{a_p^u(y)\,\|X_p^u\|\,Z(u)\,\|x\|^2\}\,dP\,dF_p^{(y)}(u) = \int_\Lambda \int_s^t \{\ \}\,dF_p^{(y)}(u)\,dP =$$

$$= \int_\Lambda M\left\{\int_s^t a_p^u(y)\,\|X_p^u\|\,Z(u)\,\|x\|^2\,dF_p^{(y)}(u) \mid \sigma_p^s\right\} dP.$$

Откуда

$$M\left\{\left\|\int_s^t Z(u)\,d_1X_p^u x\right\|^2 \mid \sigma_p^s\right\} \leqslant M\left\{\int_s^t a_p^u(y)\,\|X_p^u\|\,Z(u)\,\|x\|^2\,dF_p^{(y)}(u) \mid \sigma_p^s\right\},$$

где все сравнения между случайными величинами понимаются $\operatorname{mod} P$, что принимается и в дальнейшем.

Аналогичное неравенство верно и для $d_2X_p^u x$. Используя эти неравенства, можно определить интеграл $\int_p^q Z_1(t)\,dY_1(t)\,x$ для ступенчатых функций $Z_1(t)$ со значениями в G_H, измеримых σ_p^t при каждом t и таких, что

$$\int_p^q a_p^t(y)\,M\,\|X_p^t\|\,Z_1(t)\,Z(t)\,\|x\|^2 dF_p^{(y)}(t) < \infty$$

как:

$$\sum_{k=1}^{n} Z_1(t_k)(Y_1(t_{k+1})(x) - Y_1(t_k)(x)),$$

причем

$$M\left\| \sum_{k=1}^{n} Z_1(t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} Z(t)\, d_1 X_p^t x \right\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M\left\{M\left\{\left\langle Z_1(t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} Z(t)\, d_1 X_p^t x,\ Z_1(t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} Z(t)\, d_1 X_p^t x\right\rangle \mid \sigma_p^{t_k}\right\}\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M\left\{M\left\{\left\langle \int_{t_k}^{t_{k+1}} Z_1(t_k) Z(t)\, d_1 X_p^t x,\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} Z_1(t_k) Z(t)\, d_1 X_p^t x\right\rangle \mid \sigma_p^{t_k}\right\}\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M\left\{M\left\{\left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} Z_1(t_k) Z(t)\, d_1 X_p^t x \right\|^2 \mid \sigma_p^{t_k}\right\}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} M\left\{M\left\{\int_{t_k}^{t_{k+1}} a_p^t(y) \| X_p^t \| Z_1(t_k) Z(t) \| x \|^2 \, dF_p^{(y)}(t) \mid \sigma_p^{t_k}\right\}\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} a_p^t(y)\, M \| X_p^t \| Z_1(t_k) Z(t) \| x \|^2 \, dF_p^{(y)}(t) =$$

$$= \int_{p}^{q} a_p^t(y)\, M \| X_p^t \| Z_1(t) Z(t) \| x \|^2 \, dF_p^{(y)}(t),$$

т. е.

$$M\left\| \int_{p}^{q} Z_1(t)\, dY_1(t)(x) \right\|^2 \leqslant \int_{p}^{q} a_p^t(y)\, M \| X_p^t \| Z_1(t) Z(t) \| x \|^2 \, dF_p^{(y)}(t).$$

Теперь $\int_{p}^{q} Z_1(t)\, dY_1(t)(x)$ определяется обычным способом, как среднеквадратичный предел соответствующих интегральных сумм, для $Z_1(t)$ со значениями в G_H, измеримых σ_p^t при каждом t и удовлетворяющих условию

3) $\int_{p}^{q} a_p^t(y)\, M \| X_p^t \| Z_1(t) Z(t) \| x \|^2 \, dF_p^{(y)}(t) < \infty.$

Легко видеть, что для ступенчатых функций $Z_1(t)$ выполняется равенство

$$\int_a^b Z_1(t)\, dY_1(t)(x) = \int_a^b Z_1(t)\, Z(t)\, d_1 X_p^t x,$$

которое в общем случае получается предельным переходом.

Все сказанное выше справедливо и для приращений $d_2 X_p^t x$, если условие 3) заменить условием

$$4)\ \int_p^q a_p^t(y)\, M \| Z_1(t)\, Z(t) \|^2\, dF_p^{(y)}(t) < \infty.$$

Теорема. Пусть X_s^t — мультипликативное семейство невырожденных операторов, удовлетворяющих условиям

$$1)\ \int_p^q a_p^t(y)\, M \| (X_s^t)^{-1} \|^2 \cdot \| X_p^t x \|^2\, dF_p^{(y)}(t) < \infty,$$

$$3)\ \int_p^q a_p^t(y)\, M \| X_p^t x \|^2\, dF_p^{(y)}(t) < \infty$$

или условиям

$$2)\ \int_p^q a_p^t(y)\, M \| (X_p^t)^{-1} \|^2\, dF_p^{(y)}(t) < \infty,$$

$$4)\ \int_p^q a_p^t(y)\, dF_p^{(y)}(t) < \infty,$$

тогда

$$X_p^t x = x + \int_p^t X_p^u\, dY_1(u)(x),$$

где

$$Y_1(u)(x) = \int_p^u (X_p^v)^{-1}\, d_1 X_p^v x,$$

или

$$\int_p^t d_2 X_p^u x = \int_p^t X_p^u\, dY_2(u)(x),$$

где

$$Y_2(u)(x) = \int_p^u (X_p^v)^{-1}\, d_2 X_p^v x.$$

Легко видеть, что указанная теорема верна (но при иных $Y_1(u)(x)$, $Y_2(u)x)$, если условие 1) заменить условием

$$1') \int_p^q a_p^t(y) M \| X_p^t \|^2 \| X_p^t x \|^2 dF_p^{(y)}(t) < \infty,$$

а условие 2) — условием

$$2') \int_p^q a_p^t(y) M \| X_p^t \|^2 dF_p^{(y)}(t) < \infty.$$

$\int_p^t d_2 X_p^u x$ удобно назвать «мультипликативной вариацией» $X_s^u x$ при $p \leqslant s \leqslant u \leqslant t$, так как это выражение равно сумме скачков $X_s^u x$ на $[p, t]$ типа $(X_{\tau-0}^{\tau+0} - \mathrm{E})x$ для ступенчатых семейств (см. [3], стр. 136).

Заметим, что условия на X_s^t, рассмотренные выше для построения интеграла, имеют более простой вид, если X_s^t *apriori* принимает значения, из некоторых «хороших» подмножеств G_H. например из группы всех унитарных операторов.

Рассмотрим теперь другие функции $F_p(t)$ и построим соответствующие интегралы. Пусть

$$F_p(t) = \mathrm{Sp}\, M (X_p^t - \mathrm{E})(X_p^t - \mathrm{E})^* < \infty.$$

Как и выше, имеем равенство

$$F_p(t) - F_p(s) = \mathrm{Sp}\, M (X_p^t - X_p^s)(X_p^t - X_p^s)^*.$$

Если $\exists b_p^s > 0$, измеримая по Лебегу по s и такая, что $MX_p^s (X_p^s)^* - b_p^s \cdot \mathrm{E} \geqslant 0$, то, как и выше, имеем неравенство

$$\mathrm{Sp}\, M (X_s^t - \mathrm{E})(X_s^t - \mathrm{E})^* \leqslant a_p^s \Delta F_p(s),$$

где $a_p^s = [b_p^s]^{-1}$.

Далее для ступенчатых функций $Z(t)$ со значениями в G_H, измеримых σ_p^t при каждом t и таких, что $M \| X_p^t Z(t) \|^2 < \infty$, определим

$$\int_p^q d_1 X_p^t Z(t) = \sum_{k=1}^n \Delta_1 X_p^{t_k} Z(t_k).$$

Имеем

$$\mathrm{Sp}\, M \int_p^q d_1 X_p^t Z(t) \left[\int_p^q d_1 X_p^t Z(t) \right]^* =$$

$$= \mathrm{Sp}\, M \left[\sum_{k=1}^n \Delta_1 X_p^{t_k} Z(t_k) \right] \left[\sum_{k=1}^n \Delta_1 X_p^{t_k} Z(t_k) \right]^* =$$

$$= \operatorname{Sp} M \left\{ \sum_{k=1}^{n} \Delta_1 X_p^{t_k} Z(t_k) Z^*(t_k) (\Delta_1 X_p^{t_k})^* \right\} = M \operatorname{Sp} \{ \ \} =$$

$$= M \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Sp} (X_{t_k}^{t_{k+1}} - \mathrm{E}) X_p^{t_k} Z(t_k) Z^*(t_k) (X_p^{t_k})^* (X_{t_k}^{t_{k+1}} - \mathrm{E})^* \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{k=1}^{n} \| X_p^{t_k} Z(t_k) \|^2 \operatorname{Sp} (X_{t_k}^{t_{k+1}} - \mathrm{E}) (X_{t_k}^{t_{k+1}} - \mathrm{E})^* =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_p^{t_k} M \| X_p^{t_k} Z(t_k) \|^2 \Delta F_p(t_k).$$

Теперь, как и выше, интеграл $\int_p^q d_1 X_p^t Z(t)$ определяется по крайней мере для таких $Z(t)$, принимающих значения в G_H и σ_p^t-измеримых при каждом t, что

$$\int_p^q a_p^t M \| X_p^t Z(t) \|^2 dF_p^2(t) < \infty,$$

$$\operatorname{Sp} M \left[\int_p^q d_1 X_p^t Z(t) \right] \left| \int_p^q d_1 X_p^t Z(t) \right|^* \leqslant$$

$$\leqslant \int_p^q a_p^t M \| X_p^t Z(t) \|^2 dF_p(t).$$

Как и выше, $Y_1(t) = \int_p^t d_1 X_p^t Z(t)$ будет мартингалом, непрерывным справа по t в рассматриваемой норме, и для $Z_1(t)$ со значениями в G_H, измеримых σ_p^t при каждом t и таких, что

$$\int_p^q a_p^t M \| X_p^t Z(t) Z_1(t) \|^2 dF_p(t) < \infty,$$

можно определить интеграл $\int_p^q dY_1(t) Z_1(t)$, удовлетворяющий равенству

$$\int_a^b dY_1(t) Z_1(t) = \int_a^b d_1 X_p^t Z(t) Z_1(t).$$

Все сказанное, конечно, справедливо в случае $d_2X_p^t$. В частности, справедлива теорема, аналогичная вышеприведенной теореме. Заметим, однако, что в этом случае

$$Y_1(t) = \int_p^t d_1X_p^u (X_p^u)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n (X_p^{t_{k+1}} - X_p^{t_k})(X_p^{t_k})^{-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n (X_{t_k}^{t_{k+1}} - \mathrm{E}) = \int_p^t d_2X_p^u.$$

Поэтому

$$\int_p^q dY_1(t)\, Z_1(t) = \int_p^q d_2X_p^t Z_1(t)$$

в условиях существования указанных интегралов. В частности,

$$X_p^t - \mathrm{E} = \int_p^t dY_1(u)\, X_p^u = \int_p^t d_2X_p^u X_p^u = \overline{Y}_2(t),$$

$$\int_p^t dY_1(u)\,(X_p^u)^{-1} = \int_p^t d_2X_p^u (X_p^u)^{-1} = Y_2(t);$$

поэтому

$$\int_p^q d_1X_p^t Z(t) = \int_p^q d\overline{Y}_2(t)\, Z(t)$$

в условиях существования указанных интегралов.

Более того, учитывая, что $Y_1(t)$ имеет независимые приращения, можно условие 3 (см. теорему) применительно к нашему случаю сформулировать в терминах функции $F(t) = M\|Y_1(t)\|^2$. Из равенства

$$X_p^t - \mathrm{E} = \int_p^t dY_1^{(p)}(u)\, X_p^u,$$

где

$$Y_1^{(p)}(u) = \int_p^u d_1X_p^v (X_p^v)^{-1},$$

вытекает

$$(X_s^t - \mathrm{E})\, X_p^s = \int_p^t dY_1^{(p)}(u)\, X_p^u - \int_p^s dY_1^{(p)}(u)\, X_p^u =$$

$$= \int_s^t dY_1^{(p)}(u)\, X_p^u = \int_s^t dY_1^{(p)}(u)\, X_s^u X_p^s = \left| \int_s^t dY_1^{(p)}(u)\, X_s^u \right] X_p^s$$

при $t \geqslant s \geqslant p \geqslant 0$. Поэтому

$$X_s^t - \mathrm{E} = \int_s^t dY_1^{(p)}(u)\, X_s^u, \quad p \leqslant s,$$

т. е. этот интеграл не зависит от p при $p \leqslant s$. В частности, можно положить

$$X_s^t = \mathrm{E} + \int_s^t dY_1^{(0)}(u)\, X_s^u, \qquad Y_1^{(0)}(u) = Y_1(u) = \int_0^u d_1 (X_0^v (X_0^v)^{-1}.$$

Последнее замечание оправдывает отсутствие индекса p при $Y_1(u)$ в приведенных выкладках.

Укажем далее, что, рассматривая

$$F_p^{(x,y)}(t) = M \langle (x_p^t - \mathrm{E})\, x,\ y \rangle^2,$$

можно также построить стохастический интеграл с такими свойствами. Первый интеграл представляется удобным назвать «сильным», второй — «равномерным» и третий — «слабым». (Для «слабого» интеграла вместо C_s^t, используемого в определении «сильного» интеграла, нужно взять оператор $C_s^t(y)$, который находится из соотношения

$$\langle C_s^t(y)\, z,\ z \rangle = M \langle z,\ (X_s^t - \mathrm{E})^* y \rangle^2, \qquad x, y, z \in H).$$

Исследуя связи между указанными интегралами, заметим, что

$$\operatorname{Sp} C_s^t = \sum_k \langle C_s^t e_k,\ e_k \rangle = \sum_k M \langle (X_s^t - \mathrm{E})^* (\ )\, e_k,\ e_k \rangle =$$

$$= \operatorname{Sp} M (X_s^t - \mathrm{E})^* (X_s^t - \mathrm{E}) = \operatorname{Sp} M (X_s^t - \mathrm{E})(\ )^* = \Delta F_p(s).$$

Таким образом, «сильный» интеграл можно определить для таких $Z(t)$ со значениями в H и измеримых σ_p^t при каждом t, что

$$\int_p^q M \| X_p^t Z(t) \|^2 dF_p(t) < \infty.$$

Тем самым в случае ядерности C_s^t при любых $t \geqslant s \geqslant p$ расширяется класс функций, для которых определен «сильный» интеграл, причем никаких предположений на $B_p^s(y)$ налагать не надо; однако функция интегрирования в этом случае является более «жесткой».

Отметим теперь, что так как $C_s^t(y)$ для «слабого» интеграла удовлетворяет равенству

$$\operatorname{Sp} C_s^t(y) = \sum_k \langle C_s^t(y)\, e_k, e_k \rangle = \sum_k M \langle (X_s^t - \mathrm{E})\, e_k,\ y \rangle^2 =$$

$$= M \sum_k \langle e_k, (X_s^t - \mathrm{E})^* y \rangle^2 = M \| (X_s^t - \mathrm{E})^* y \| =$$

$$= F_p^{*(y)}(t) - F_p^{*(y)}(s),$$

где

$$F_p^{*(y)}(t) = M \| (X_p^t - \mathrm{E})^* y \|^2,$$

то «слабый» интеграл можно определить на классе функций со значениями в G_H, измеримых σ_p^t при каждом t и удовлетворяющих условию

$$\int_p^q M \| X_p^t Z(t) x \|^2 dF_p^{*(y)}(t) < \infty, \qquad x \in H,$$

так же, как это было проделано выше для «сильного» интеграла. Таким образом, и в этом случае класс функций, на которых определен «слабый» интеграл, расширяется, и условия его существования упрощаются, но все это происходит за счет функции интегрирования.

Существование «сильного» интеграла для функции $Z(t)x$ (значения $Z(t)$ из G_H, $x \in H$) влечет существование «слабого», а из изложенной выше связи между «равномерным» и «сильным» интегралами можно найти условия, когда существование первого влечет существование второго (таковым, например, будет условие $a_s^t \geqslant c > 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. М., ИЛ, 1956.
2. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., ИЛ, 1962.
3. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М., Физматгиз, 1963.
4. Гохберг И. П. и Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., «Наука», 1965.
5. Гихман И. И. и Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.
6. Скороход А. В. Тезисы докладов на VII Всесоюзном совещании по теории вероятностей и математической статистике. Тбилиси, 1963.
7. Буцан Г. П. Некоторые свойства мультипликативных семейств.— Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 1, 1969.

G. P. Butsan

THE STOCHASTIC OPERATOR INTEGRALS

Summary

This article deals with the construction of stochastic integral for random function $Z(t, \omega)$ with values in some Banach space H or G_H — the space of all bounded linear operator on H by the random multiplicative family $X_s^t(\omega)$ with significances from G_H. We call X_s^t, $0 \leqslant s \leqslant t$ the multiplicative family if

$$X_s^t = X_\tau^t X_s^\tau, \quad X_s^s = E, \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t.$$

Поступила в редакцию 4.IV 1969.