В. Л. ГИРКО, студ.
Киевский университет

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть дана система линейных неоднородных уравнений

$$A_{mn}\vec{x}_n = \vec{b}_m,$$

где

$A_{mn} = (\xi_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $m \leqslant n$ — прямоугольная матрица,

$$\vec{x}_n = (x_1, \ldots, x_n), \quad \vec{b}_m = (\eta_1, \ldots, \eta_m).$$

Пусть первые компоненты x_k, $k = \overline{1, m}$ вектора $\vec{x}_n$ неизвестны, остальные перенесем в правую часть, считая их произвольными постоянными. Получим систему уравнений

$$A_{mm}\vec{x}_m = \vec{\gamma}_m,$$

где

$$\vec{\gamma}_m = \vec{b}_m - x_{m+1}\vec{\xi}_{m+1} - \ldots - x_n\vec{\xi}_n,$$

$$\vec{\xi}_k = (\xi_{1k}, \ldots, \xi_{mk}), \quad k = \overline{m+1, n}.$$

Теорема. Если случайные величины ξ_{ij}, η_k, $i, k = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ независимы, одинаково распределены по устойчивому закону с характеристической функцией

$$f(t;\ \alpha, c) = e^{-c|t|^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leqslant 2, \quad c > 0,$$

то случайные величины x_k, $k = \overline{1, m}$ одинаково распределены с плотностями

$$p(u;\ \alpha,\ \beta) = \frac{2}{\beta}\int_0^{\infty} z\varrho\left(\frac{zu}{\beta};\ \alpha\right)\varrho(z;\ \alpha)\,dz,$$

где $\varrho(z;\ \alpha)$— плотность указанного выше устойчивого распределения,

$$\beta=(1+|x_{m+1}|^{\alpha}+\ldots+|x_n|^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}},$$

а отношения $\frac{x_k}{x_l}$, $k\neq l$, $k, l=\overline{1, m}$ имеют плотности $p(u;\ \alpha,\ 1)$.

Доказательство. Очевидно, что

$$p\{\det \mathrm{A}_{mm}=0\}=0.$$

По формуле Крамера с вероятностью 1 имеем

$$x_k=\frac{\sum\limits_{p=1}^{m}\eta_p \mathrm{A}_{mm}^{pk}-\sum\limits_{l=m+1}^{n}x_l\left(\sum\limits_{p=1}^{m}\xi_{pl}\mathrm{A}_{mm}^{pk}\right)}{\sum\limits_{p=1}^{m}\xi_{pk}\mathrm{A}_{mm}^{pk}}=$$

$$=\frac{\left(\sum\limits_{p=1}^{m}\eta_p \mathrm{A}_{mm}^{pk}\right)R^{-1}-\sum\limits_{l=m+1}^{n}x_l\left(\sum\limits_{p=1}^{m}\xi_{pl}\mathrm{A}_{mm}^{pk}\right)R^{-1}}{\left(\sum\limits_{p=1}^{m}\xi_{pk}\mathrm{A}_{mm}^{pk}\right)R^{-1}},$$

где A_{mm}^{pk}, $p=\overline{1, m}$ — алгебраические дополнения коэффициентов ξ_{pk} матрицы A_{mm},

$$R=\left(\sum_{p=1}^{m}|\mathrm{A}_{mm}^{pk}|^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Используя условные математические ожидания, найдем совместную характеристическую функцию числителя и знаменателя полученной дроби:

$$\mathrm{M}\exp\left\{it\left[\sum_{p=1}^{m}\eta_p\mathrm{A}_{mm}^{pk}R^{-1}-\sum_{l=m+1}^{n}x\left(\sum_{p=1}^{m}\xi_{pl}\mathrm{A}_{mm}^{pk}R^{-1}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+i\tau\sum_{p=1}^{m}\xi_{pk}\mathrm{A}_{mm}^{pk}R^{-1}\right\}=\mathrm{MM}\left[\exp\left\{it\sum_{p=1}^{m}\eta_p\mathrm{A}_{mm}^{pk}R^{-1}-\right.\right.$$

$$-it\sum_{l=m+1}^{n}x_l\left(\sum_{p=1}^{m}\xi_{pl}\mathrm{A}_{mm}^{pk}R^{-1}\right)+$$

$$\left.\left.+i\tau\sum_{p=1}^{m}\xi_{pk}\mathrm{A}_{mm}^{pk}R^{-1}\right\}/\xi_{\nu\mu},\ \nu=\overline{1, m},\ \mu=\overline{1, k-1},\ \overline{k+1, m}\right]=$$

$$= \mathrm{M}\left[\prod_{p=1}^{m} \exp\{-c\,|t\,\mathrm{A}_{mm}^{pk}|^{\alpha}R^{-\alpha}\} \prod_{l=m+1}^{n}\prod_{p=1}^{m} \exp\{-c\,|tx_l\mathrm{A}_{mm}^{pk}|^{\alpha}R^{-\alpha}\} \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{p=1}^{m} \exp\{-c\,|\tau\,\mathrm{A}_{mm}^{pk}|^{\alpha}R^{-\alpha}\}\right] = \exp\{-c\,|t\beta|^{\alpha}\}\exp\{-c\,|\tau|^{\alpha}\}.$$

Отсюда следует, что числитель и знаменатель полученной дроби независимы и имеют соответственно плотности $\frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}\beta}\varrho\left(\frac{z}{\beta c^{\frac{1}{\alpha}}};\ \alpha\right)$, $\frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}}\varrho\left(\frac{z}{c^{\frac{1}{\alpha}}};\ \alpha\right)$. Легко видеть, что $\varrho(-z;\ \alpha) = \varrho(z;\ \alpha)$.

Тогда плотность распределения частного двух независимых случайных величин, числителя и знаменателя, равна (см. [1], стр. 154)

$$p(u;\ \alpha, \beta) = \frac{2}{\beta}\int_0^{\infty} z\varrho\left(\frac{zu}{\beta};\ \alpha\right)\varrho(z;\ \alpha)\,dz.$$

Рассмотрим теперь отношения $\frac{x_k}{x_l}$; $k \neq l$; $k,\ l = \overline{1, m}$. Используя формулу Крамера, получим

$$\frac{x_k}{x_l} = -\frac{\sum\limits_{p=1}^{m}\xi_{pl}\mathrm{T}^{pl}}{\sum\limits_{p=1}^{m}\xi_{pk}\mathrm{T}^{pl}} = -\frac{\left(\sum\limits_{p=1}^{m}\xi_{pl}\mathrm{T}^{pl}\right)\left(\sum\limits_{p=1}^{m}|\mathrm{T}^{pl}|^{\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}}{\left(\sum\limits_{p=1}^{m}\xi_{pk}\mathrm{T}^{pl}\right)\left(\sum\limits_{p=1}^{m}|\mathrm{T}^{pl}|^{\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}},$$

где T^{pl}, $p = \overline{1, m}$ — алгебраические дополнения коэффициентов ξ_{pl} матрицы A_{mm}, у которой k-й вектор-столбик заменен вектором $\vec{\gamma}_m$.

На основании предыдущего доказательства заключаем, что плотность распределения $\frac{x_k}{x_l}$, $k \neq l$ равна $p(u;\ \alpha, 1)$. Теорема доказана.

Следствие 1. Если в условии теоремы $\alpha = 2$, т. е. случайные величины ξ_{ij}, η_k, $i,\ k = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ распределены нормально, то

$$p(u;\ 2, \beta) = \frac{\beta}{\pi(u^2 + \beta^2)}.$$

Следствие 2. Если в условии теоремы $\alpha = 1$, т. е. случайные величины ξ_{ij}, η_k, $i, k = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ распределены по закону Коши, то

$$p(u;\ 1, \beta) = \frac{2\beta}{\pi^2} \cdot \frac{\ln \left| \frac{u}{\beta} \right|}{u^2 - \beta^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. «Наука», М., 1965.

V. L. Girko

ON DISTRIBUTION OF SOLUTIONS OF THE SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS WITH RANDOM COEFFICIENTS

Summary

This article deals with the distribution of solutions of the systems of linear equations with random independent and identically distributed coefficients, having stable and simmetrical distribution. Formulae for the distribution of the component of the vector of solutions are obtained.

Поступила в редакцию 16.IV 1969.