А. Н. ДЕМЕНИН, канд. физ.-мат. наук
Институт математики АН УССР

АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

Многие задачи случайных процессов связаны с исследованием вероятностных мер, которые не являются гауссовскими. Это, в первую очередь, задачи, возникающие в таких областях исследований, как обнаружение сигналов, автоматическое управление и т. д. Изучение негауссовских мер может оказаться эффективным, если известен способ задания таких мер. Удобным средством задания вероятностных мер на функциональных пространствах являются абсолютно непрерывные преобразования некоторых исходных мер [1].

В настоящей работе рассматриваются свойства вероятностных мер, полученных с помощью абсолютно непрерывных преобразований гауссовской меры.

Обозначим через $\bar{L}_2[0, T]$ пространство комплексных непрерывных функций, заданных на $[0, T]$, со скалярным произведением

$$(x^*, y^*) = \int_0^T x^*(t)\overline{y^*(t)}\,dt, \quad x^*, y^* \in \bar{L}_2[0, T],$$

где $\overline{y^*(t)}$—комплексно сопряженная функция по отношению к $y^*(t)$.

Норма в $\bar{L}_2[0, T]$ определяется равенством

$$\|x^*\| = \left[\int_0^T |x^*(t)|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $L_2[0, T]$ подпространство действительных функций на $\bar{L}_2[0, T]$. Пусть μ — вероятностная мера, заданная на σ-алгебре Φ всех борелевских множеств пространства $L_2[0, T]$. Предположим, что $g(x)$, $x \in L_2[0, T]$ — измеримый неотрицательный функционал такой, что

$$\int g(x)\,\mu(dx) = 1. \tag{1}$$

Будем называть меру μ^*

$$\mu^*(E) = \int_E g(x)\,\mu(dx), \quad E \in \Phi \tag{2}$$

вероятностной мерой, полученной с помощью абсолютно непрерывного преобразования исходной меры μ. В дальнейшем через μ_0 будем обозначать гауссовскую меру с нулевым математическим ожиданием и корреляционным оператором K.

Обозначим через W класс непрерывных аналитических функционалов $g(x^*)$, $x^* \in \overline{L}_2[0, T]$, обладающих следующими свойствами:

а) $g(x)$, $x \in L_2[0, T]$ является измеримым неотрицательным функционалом, удовлетворяющим условию (1);

б) $g(Ax + ib)$ — интегрируем по $x \in L_2[0, T]$ по мере μ_0 при каждом фиксированном $b \in L_2[0, T]$.

Здесь A линейный оператор, действующий из $L_2[0, T]$ в $L_2[0, T]$. В дальнейшем будем пользоваться обозначением

$$G_0(A;\, b) = \int g(Ax + ib)\,\mu_0(dx), \quad x, b \in L_2[0, T]. \tag{3}$$

Введем характеристический функционал меры μ

$$\varphi(z) = \int e^{i(z,x)}\mu(dx), \quad z \in L_2[0, T].$$

Теорема 1. Пусть μ_0 — гауссовская мера на Φ с нулевым математическим ожиданием и корреляционным оператором K, ядро которого $K(t, s) \in L_2[0, T]$. Пусть $g(x)$, $x \in L_2[0, T]$—некоторый функционал, принадлежащий классу W.

Тогда мера μ_0^* может быть задана с помощью характеристического функционала

$$\varphi_0^*(z) = e^{-\frac{1}{2}(Kz,z)}\,G_0(I;\, Kz), \tag{4}$$

где $G_0(\ldots,\ldots)$ определяется из выражения (3), I — единичный оператор.

Доказательство. В соответствии с результатами работ [1 — 2] и тем фактом, что $g(x)$, $x \in L_2[0, T]$ является измеримым неотрицательным функционалом, удовлетворяющим условию (1), имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int \left| g(x) - \sum_{kj}^{n} C_k^{(n)} \overline{C}_j^{(n)} e^{i(\alpha_k^{(n)}, x) - i(\alpha_j^{(n)}, x)} \right| \mu_0(dx) = 0, \tag{5}$$

где $C_k^{(n)}$ — некоторые постоянные, причем $\overline{C}_k^{(n)}$ — комплексно сопряженные к $C_k^{(n)}$, $\alpha_k^{(n)} \in L_2[0, T]$, $k = 1, \ldots, n$.

Тогда характеристический функционал меры μ_0^* имеет вид

$$\varphi_0^*(z) = L\varphi_0(z),$$

где L — оператор S-типа, определенный на некотором множестве пространства U (U — пространство непрерывных ограниченных числовых функций, определенных на $L_2[0, T]$; $\varphi_0(z)$ — характеристический функционал меры μ_0.

Иными словами,

$$L\varphi_0(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{kj}^{n} C_k^{(n)} \overline{C}_j^{(n)} \varphi_0 (z + \alpha_k^{(n)} - \alpha_j^{(n)}).$$

Учитывая, что μ_0 — гауссовская мера с нулевым математическим ожиданием и корреляционным оператором K, имеем

$$\varphi_0^*(z) = e^{-\frac{1}{2}(Kz,z)} \lim_{n\to\infty} \sum_{kj}^{n} C_k^{(n)} \overline{C}_j^{(n)} e^{-(Kz,\alpha_k^{(n)})} \times$$

$$\times e^{(Kz,\alpha_j^{(n)})} \int e^{i(x,\alpha_k^{(n)})-i(x,\alpha_j^{(n)})} \mu_0(dx).$$

Из равенства (5) и того факта, что функционал $g(x) \in W$, следует утверждение теоремы.

Пусть $\Delta(s)$ — некоторая окрестность точки $s \in [0, T]$. Определим вариационную производную первого порядка от функционала $\varrho(x)$, $x \in L_2[0, T]$ в точке s с помощью соотношения

$$\frac{\delta^{(1)}\varrho(x)}{\delta x(s)\, ds} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\delta^{(1)}[\varrho(x); \delta x]}{\int\limits_{\Delta(s)} \delta x(t)\, dt}, \tag{6}$$

если предел в правой части (6) существует.

Здесь $\delta^{(1)}[\varrho(x); \delta x]$ — первая вариация функционала $\varrho(x)$,

$$\delta^{(1)}[\varrho(x); \delta x] = \frac{d}{d\lambda} \varrho(x + \lambda\delta x)|_{\lambda=0}.$$

Под n-й вариационной производной функционала $\varrho(x)$ в точках $t_1, \ldots, t_n$ будем понимать первую вариационную производную в точке t_n от $(n-1)$-й вариационной производной функционала $\varrho(x)$ в точках $t_1, \ldots, t_{n-1}$.

Теорема 2. Пусть μ_0 — гауссовская мера на Φ с нулевым математическим ожиданием и корреляционным оператором K. Пусть $g(x)$ и $f(x)$, $x \in L_2[0, T]$ — два функционала, удовлетворяющие следующим условиям:

а) $g(x) \in W$, $f(x) \in W$;

б) существуют вариационные производные j-го ($j=1, \ldots, N$) порядка от функционалов $g(x)$ и $f(x)$, измеримые относительно σ-алгебры Φ и интегрируемые по мере μ_0.

Тогда

$$\int g(x) f(x) \mu_0(dx) = \int g(x) \mu_0(dx) \int f(x) \mu_0(dx) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m!} \int_0^T \ldots \int_0^T K(t_1, s_1) \ldots K(t_m, s_m) \times$$

$$\times \int \frac{\delta^{(m)} g(x)}{\delta x(t_1)\, dt_1 \ldots \delta x(t_m) dt_m} \mu_0(dx) \int \frac{\delta^{(m)} f(x)}{\delta x(s_1)\, ds_1 \ldots \delta x(s_m) ds_m} \times$$

$$\times \mu_0(dx)\, dt_1 \ldots dt_m ds_1 \ldots ds_m + Q_{N+1}, \tag{7}$$

где

$$Q_{N+1} = \frac{1}{(N+1)!\,(2\theta)^{N+1}} \frac{d^{N+1}}{d\theta^{N+1}} \int G_0(\sqrt{1-\theta^2} I;\ -ix\theta) \times$$

$$\times F_0(\sqrt{1-\theta^2}\, I;\ -ix\theta)\, \mu_0(dx),\ 0 < |\theta| < 1, \tag{8}$$

если производная $(N+1)$-го порядка в (8) существует. Функционал $G_0(\ldots, \ldots)$ может быть найден из соотношения (3), а

$$F_0(\sqrt{1-\theta^2} I;\ -ix\theta) = \int f(\sqrt{1-\theta^2} y + x\theta)\, \mu_0(dy). \tag{9}$$

Доказательство. В соответствии с (5) функционалы $g(x)$ и $f(x)$, $x \in L_2[0, T]$ представимы в виде

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{kj}^{n} C_k^{(n)} \overline{C}_j^{(n)} e^{i(\alpha_{kj}^{(n)}, x)}, \\ f(x) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{pq}^{m} B_p^{(m)} \overline{B}_q^{(m)} e^{i(\beta_{pq}^{(m)}) x)}, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\alpha_{kj}^{(n)} = \alpha_k^{(n)} - \alpha_j^{(n)},$$

$$\beta_{pq}^{(m)} = \beta_p^{(m)} - \beta_q^{(m)}.$$

Введем следующее обозначение:

$$H_s(\theta) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{kj}^{n} \sum_{pq}^{m} C_k^{(n)} \overline{C}_j^{(n)} B_p^{(m)} \overline{B}_q^{(m)} (K\alpha_{kj}^{(n)}, \beta_{pq}^{(m)})^s \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2} (K\alpha_{kj}^{(n)}, \alpha_{kj}^{(n)}) - \frac{1}{2} (K\beta_{pq}^{(m)}, \beta_{pq}^{(m)}) - \right.$$

$$\left. - \theta^2 (K\alpha_{kj}^{(n)}, \beta_{pq}^{(m)}) \right\}, \qquad 0 < |\theta| < 1, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$\int g(x) f(x) \mu_0(dx) = H_0(0) + \sum_{m=1}^{N} \frac{(-1)^m}{m!} H_m(0) + Q_{N+1}.$$

Здесь

$$Q_{N+1} = \frac{(-1)^{N+1}}{(N+1)!} H_{N+1}(\theta).$$

Используя (10), легко показать, что

$$H_m(0) = (-1)^m \int_0^T \ldots \int_0^T K(t_1, s_1) \ldots K(t_m, s_m) \times$$

$$\times \int \frac{\delta^{(m)} g(x)}{\delta x(t_1)\, dt_1 \ldots \delta x(t_m)\, dt_m} \mu_0(dx) \int \frac{\delta^{(m)} f(x)}{\delta x(s_1)\, ds_1 \ldots \delta x(s_m)\, ds_m} \times$$

$$\times \mu_0(dx)\, dt_1 \ldots dt_m ds_1 \ldots ds_m.$$

Выражение (8) для остаточного члена Q_{N+1} может быть получено из следующего соотношения:

$$Q_{N+1} = \frac{1}{(N+1)!\,(2\theta)^{N+1}} \frac{d^{N+1}}{d\theta^{N+1}} H_0(\theta),$$

где $H_0(\theta)$ в соответствии с (10) представимо в виде

$$H_0(\theta) = \int\int\int g(\theta x + \sqrt{1-\theta^2} y) f(\theta x + \sqrt{1-\theta^2} u)\, \mu_0(dx) \times$$

$$\times \mu_0(dy)\, \mu_0(du).$$

Используя обозначения (3) и (9), получаем утверждение теоремы.

Теорема 3. Пусть μ_0 — гауссовская мера на Φ с нулевым математическим ожиданием и корреляционным оператором K. Пусть A — линейный симметричный интегральный оператор, действующий из $L_2[0, T]$ в $L_2[0, T]$, такой, что:

а) оператор $I - B$, где $B = K^{\frac{1}{2}} A K^{\frac{1}{2}}$, является положительным;
б) существует оператор

$$\Lambda = K^{-\frac{1}{2}} (I - B)^{-\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

такой, что $\Lambda^* x \in L_2[0, T]$, $x \in L_2[0, T]$, где Λ^* — оператор. сопряженный по отношению к Λ;

в) существует и отлично от нуля бесконечное произведение

$$\mathfrak{P} = \prod_k \frac{1}{\sqrt{1-d_k}}, \tag{12}$$

где d_k — собственные значения оператора B.

Пусть $g(x)$, $x \in L_2[0, T]$ — некоторый функционал, принадлежащий классу W.

Тогда

$$\int e^{\frac{1}{2}(Ax,x)} g(x)\,\mu_0(dx) = |\mathfrak{P}|\, G_0(\Lambda^*; 0). \tag{13}$$

Доказательство. Воспользуемся представлением функционала $g(x)$, $x \in L_2[0, T]$ в виде (10). Пусть λ_k и $f_k(t)$ — соответственно собственные значения и собственные функции оператора K. Введем следующие обозначения:

$$\bar{a}_{pq} = \sqrt{\lambda_p \lambda_q}\,(Af_p, f_q),$$

$$b_p^{(kj)} = \sqrt{\lambda_p}\,(\alpha_{kj}^{(n)}, f_p).$$

Тогда интеграл по мере μ_0 в левой части выражения (13) представим в виде

$$J_A = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{kj}^{n} C_k^{(n)} \bar{C}_j^{(n)} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{pq}^{m} \bar{a}_{pq} x_p x_q + \right.$$
$$\left. + i \sum_{p}^{m} b_p^{(kj)} x_p - \frac{1}{2} \sum_{p}^{m} x_p^2 \right\} dx_1 \ldots dx_m. \tag{14}$$

Вычисляя кратный интеграл в (14) и переходя к пределу при $m \to \infty$, имеем

$$J_A = |\mathfrak{P}| \lim_{n\to\infty} \sum_{kj}^{n} C_k^{(n)} \bar{C}_j^{(n)} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\Lambda^* K \Lambda \alpha_{kj}^{(n)}, a_{kj}^{(n)}) \right\}.$$

Учитывая, что

$$\exp\left\{ -\frac{1}{2} (\Lambda^* K \Lambda \alpha_{kj}^{(n)}, \alpha_{kj}^{(n)}) \right\} = \int e^{i(x, \Lambda \alpha_{kj}^{(n)})} \mu_0(dx),$$

получаем соотношение (13). Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть μ_0^* — вероятностная мера, соответствующая процессу $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, получена с помощью абсолютно непрерывного преобразования (2) гауссовской меры μ_0. Введем обозначение

$$\zeta = \int_0^T \xi^2(t)\,dt. \tag{15}$$

Тогда характеристическая функция случайной величины ζ имеет вид

$$f(z) = \prod_k \frac{1}{\sqrt{1-2iz\lambda_k}} G_0\left([I - 2zK]^{-\frac{1}{2}}; 0\right), \tag{16}$$

где λ_k — собственные значения корреляционного оператора K.

Доказательство следствия вытекает непосредственно из теоремы 3.

Теорема 4. Пусть μ_0 — гауссовская мера на Φ с нулевым математическим ожиданием и корреляционным оператором K. Обозначим через μ_2 вероятностную меру с характеристическим функционалом

$$\varphi_2(z) = \varphi_1(z)\,\varphi_0^*(z), \tag{17}$$

где $\varphi_1(z)$ — характеристический функционал гауссовской меры μ_1 с нулевым математическим ожиданием и корреляционным оператором R, а $\varphi_0^*(z)$ — характеристический функционал меры μ_0^* полученной с помощью абсолютно непрерывного преобразования (2) меры μ_0.

Предположим, что выполняются следующие условия:

а) оператор $B = K^{\frac{1}{2}} R^{-1} K^{\frac{1}{2}}$ обладает конечным следом;

б) оператор $I + B$ является положительным;

в) существует оператор

$$\Lambda = K^{-\frac{1}{2}} (I+B)^{-\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} \tag{18}$$

такой, что $\Lambda^* x \in L_2[0, T]$, $K^{\frac{1}{2}} \Lambda R^{-1} x \in L_2[0, T]$ и $EK^{-1} x \in L_2[0, T]$, $x \in L_2[0, T]$, где

$$E = K^{\frac{1}{2}} (I+B)^{-1} K^{\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

Тогда меры μ_2 и μ_1 абсолютно непрерывны и плотность меры μ_2 относительно μ_1 имеет вид

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x) = |\mathfrak{P}| \exp\left\{\frac{1}{2}(R^{-1}ER^{-1}x, x)\right\} G_0(\Lambda^*; -iER^{-1}x). \tag{20}$$

Здесь

$$\mathfrak{P} = \prod_k \frac{1}{\sqrt{1+d_k}}, \tag{21}$$

где d_k — собственные значения оператора B.

Доказательство. Предположим, что меры μ_2 и μ_1 абсолютно непрерывны. Тогда

$$\varphi_2(z) = L\varphi_1(z),$$

где L — оператор S-типа.

Известно, что плотность меры μ_2 относительно μ_1 в случае их абсолютной непрерывности определяется спектральной функцией оператора L, т. е. таким функционалом $l(x)$ [2], что

$$Le^{i(z,x)} = l(x)\, e^{i(z,x)}, \quad x, z \in L_2[0, T].$$

Используя явное выражение для характеристического функционала $\varphi_2(z)$, имеем

$$l(x) = \int \exp\left\{ (R^{-1}x, y) - \frac{1}{2}(R^{-1}y, y) \right\} g(y)\, \mu_0(dy). \tag{22}$$

Соотношение (20) легко может быть получено из (22) с помощью теорем 1 и 3. Условия теоремы 4 обеспечивают существование и измеримость функционала $l(x)$, а следовательно, абсолютную непрерывность меры μ_2 относительно μ_1. Теорема доказана.

Замечание 1. Положим в (17)

$$\varphi_0^*(z) = e^{-\frac{1}{2}(Kz,z)}. \tag{23}$$

Тогда в условиях теоремы 4 мера μ_2 абсолютно непрерывна относительно μ_1 и

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x) = |\mathfrak{P}| \exp\left\{ \frac{1}{2}(R^{-1}ER^{-1}x, x) \right\}. \tag{24}$$

Приведенный частный случай теоремы 4 касается абсолютной непрерывности гауссовских мер с различными корреляционными операторами и нулевыми математическими ожиданиями. Необходимые и достаточные условия абсолютной непрерывности таких мер рассматривались в [3].

Рассмотрим теперь преобразования вероятностных мер μ^*, связанных с μ соотношением (2).

Теорема 5. Пусть μ — гауссовская мера на Φ с математическим ожиданием $a(t) \in L_2[0, \tau]$ и корреляционным оператором K. Пусть мера μ абсолютно непрерывна относительно μ_0, где μ_0 — гауссовская мера с нулевым математическим ожиданием и корреляционным оператором K.

Тогда мера μ^*, определяемая соотношением (2), может быть задана с помощью своего характеристического функционала

$$\varphi^*(z) = \exp\left\{i(a, z) - \frac{1}{2}(Kz, z)\right\} G_0(I; Kz - ia), \tag{25}$$

Доказательство. В соответствии с (2) характеристический функционал меры μ^* имеет вид

$$\varphi^*(z) = \int e^{i(z,x)} g(x)\, \mu(dx).$$

Обозначим через $\varrho(x)$ плотность меры μ относительно μ_0. Тогда

$$\varphi^*(z) = \int e^{i(z,x)} g(x)\, \varrho(x)\, \mu_0(dx). \tag{26}$$

Известно [2], что

$$\varrho(x) = \exp\left\{(x, b) - \frac{1}{2}(Kb, b)\right\}, \tag{27}$$

где функция $b(t) \in L_2[0, T]$ и является решением интегрального уравнения $a = Kb$.

Подставляя (27) в (26) и используя теорему 1, получаем соотношение (25), что и доказывает теорему.

Теорема 6. Пусть μ — гауссовская мера на Φ с нулевым математическим ожиданием и корреляционным оператором Q. Пусть мера μ абсолютно непрерывна относительно μ_0, где μ_0 гауссовская мера с нулевым математическим ожиданием и корреляционным оператором K.

Тогда мера μ^*, определяемая соотношением (2), может быть задана с помощью своего характеристического функционала

$$\varphi^*(z) = e^{-\frac{1}{2}(Qz,z)} G_0(\Lambda^*; Qz), \tag{28}$$

где

$$\Lambda = K^{-\frac{1}{2}}\left(K^{-\frac{1}{2}} Q K^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}. \tag{29}$$

Доказательство теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы 5 и основано на использовании выражения для плотности меры μ относительно μ_0, которое легко может быть получено из (24). Теорема 6 также позволяет сформулировать ряд предложений, касающихся абсолютно непрерывных преобразований меры μ_0^*. Такие преобразования вероятностных мер, соответствующих гауссовским процессам при сдвигах и линейных преобразованиях, рассматривались, например, в работах [4, 5].