И. И. ЕЖОВ, д-р физ.-мат. наук
Киевский университет

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВРЕМЕНИ ПЕРВОГО ПЕРЕСКОКА ЧЕРЕЗ ЗАДАННЫЙ УРОВЕНЬ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ. I

Предлагаемая работа посвящена исследованию распределений некоторых функционалов, заданных на последовательностях сумм случайных величин с геометрической (решетчатый случай) (пп. 1—8) или показательной (нерешетчатый случай) компонентами *) (пп. 9—11). Изучаются также распределения этих же функционалов на последовательностях сумм независимых случайных величин, управляемых цепью Маркова (пп. 12—16).

Некоторые из результатов пп. 3, 6, 8, 14 содержатся в дипломных работах И. И. Кадырова (О распределении первой положительной суммы для одной последовательности сумм независимых случайных величин) и Л. Г. Губенко (О распределении аддитивных функционалов от последовательности сумм случайных величин, управляемых цепью Маркова), выполненных под руководством автора на кафедре теории вероятностей Киевского университета.

1. Пусть

$$\zeta_1, \zeta_1 + \zeta_2, \ldots, \zeta_1 + \ldots + \zeta_n, \ldots$$

последовательность сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, каждая из которых представима в виде разности

$$\zeta_i = \theta_i - \varkappa_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

где θ_i, $\varkappa_i$ независимы и

$$P\{\theta_i = k\} = (1-\theta)\theta^k, \qquad P\{\varkappa_i = k\} = \lambda_k \left(\sum_0^\infty \lambda_k = 1\right). \qquad (1)$$

---

*) Будем говорить, что случайная величина ζ обладает геометрической (показательной) компонентой, если $\zeta = \xi - \eta$, где ξ и η независимы, неотрицательны и

$$P\{\xi = k\} = (1-\theta)\theta^k; \quad k = 0, 1, \ldots \quad (P\{\xi \geqslant x\} = e^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0).$$

Обозначим через τ тот первый индекс, для которого

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_\tau > 0,$$

и положим

$$\gamma = \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_\tau - 1.$$

Непосредственный подсчет показывает

$$\begin{aligned} P\{\tau = r, \gamma = m\} &= P\{\zeta_1 \leqslant 0, \ldots, \zeta_1 + \ldots + \zeta_{r-1} \leqslant 0, \\ \zeta_1 + \ldots + \zeta_r &= m+1\} = P\{\theta_1 + \ldots + \theta_i \leqslant \varkappa_1 \ldots + \varkappa_i, \\ i = \overline{1, r-1};\ \theta_1 + \ldots &+ \theta_r = \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_r + m + 1\} = \\ = M \sum_{(k_1 \ldots, k_{r-1}) \in D(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{r-1})} \prod_{i=1}^{r-1} P\{\theta_i = k_i\} P &\left\{\theta_r + \sum_{i=1}^{r-1} k_i = \right. \\ &\left. = m + 1 + \sum_{i=1}^{r} \varkappa_i \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где M — символ математического ожидания, а вектор $(k_1, \ldots, k_{r-1})$ с неотрицательными целыми координатами входит в $D(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{r-1})$ тогда и только тогда, когда

$$k_1 + \ldots + k_i \leqslant \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_i; \quad i = \overline{1, r-1}$$

(запись $i = \overline{1, n}$ означает $i = 1, 2, \ldots, n$).

Используя (1) и независимость $\theta_1, \varkappa_1, \theta_2, \varkappa_2, \ldots$, (2) можно переписать так:

$$P\{\tau = r, \gamma = m\} = M \sum_{(k_1, \ldots, k_{r-1}) \in D(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{r-1})} (1-\theta)^r \theta^{m+1+\varkappa_1+\ldots+\varkappa_r}. \quad (3)$$

Если $M\theta^{\varkappa_1}$ обозначить через $\varkappa(\theta)$, а число всех векторов $(k_1, \ldots, k_{r-1})$, содержащихся в $D(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{r-1})$, положить равным $I(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{r-1})$, то, согласно (3),

$$\begin{gathered} P\{\tau = r, \gamma = m\} = (1-\theta)\theta^m \times \\ \times \theta (1-\theta)^{r-1} \varkappa(\theta) M I(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{r-1}) \theta^{\varkappa_1 + \ldots + \varkappa_{r-1}} \\ (r = 1, 2, \ldots;\ m = 0, 1, \ldots). \end{gathered} \quad (4)$$

Из (4) следует, что τ, γ независимы и γ имеет то же распределение, что и θ_1 (т. е. геометрическое с параметром θ). Что же касается τ, то: 1) τ, вообще говоря, несобственная случайная величина, т. е. $P\{\tau < \infty\} \leqslant 1$; 2) распределение τ существенно зависит от θ и $\{\lambda_k\}$.

2. Рассмотрим сначала тот случай, когда $\lambda_m = 1$ $(m \geqslant 1)$. Согласно (4),

$$P\{\tau = r+1\} = \theta^{m+1}(1-\theta)^r I_r^{(m)} \theta^{rm} \qquad (r = \overline{0, \infty}), \tag{5}$$

где

$$I_r^{(m)} = I(\underbrace{m, \ldots, m}_{r}).$$

Пусть

$$\frac{m}{1+m} \leqslant \theta < 1. \tag{6}$$

Тогда τ — собственная случайная величина (в этом мы убедимся ниже) и, согласно (5),

$$\sum_{r=1}^{\infty} I_{r-1}^{(m)} [(1-\theta)\,\theta^m]^{r-1} = \frac{1}{\theta^{m+1}}. \tag{7}$$

Если

$$0 < \theta < \frac{m}{1+m}, \tag{8}$$

то

$$p = P\{\tau < \infty\} = \theta^{m+1} \sum_{r=1}^{\infty} I_{r-1}^{(m)} [(1-\theta)\,\theta^m]^{r-1}.$$

Так как каждому θ, удовлетворяющему (8), соответствует одно и только одно θ^*, удовлетворяющее (6) и такое, что

$$(1-\theta)\,\theta^m = (1-\theta^*)(\theta^*)^m,$$

то

$$p = \left(\frac{\theta}{\theta^*}\right)^{m+1}. \tag{9}$$

Итак, распределение τ найдено с точностью до элементов последовательности $\{I_r^{(m)}\}$, определяемой своей производящей функцией

$$\sum_{r=0}^{\infty} I_r^{(m)} z^r = \frac{1}{\theta^{m+1}}, \tag{10}$$

где θ и z связаны соотношениями

$$\left.\begin{gathered} \frac{m}{1+m} \leqslant \theta \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{m+1}\left(\frac{m}{m+1}\right)^m, \\ (1-\theta)\,\theta^m = z \end{gathered}\right\} \tag{11}$$

(θ в этом случае является однозначной функцией z).

Рассмотрим случаи $m=1$ и $m=2$. Если $m=1$, то

$$\sum_{r=0}^{\infty} I_r^{(1)} z^r = \frac{1}{\theta^2},$$

где

$$\theta^2 - \theta + z = 0$$

или

$$\frac{1}{\theta^2} = \frac{1-2z-\sqrt{1-4z}}{2z^2}.$$

Несложные подсчеты показывают, что

$$I_r^{(1)} = \frac{1}{r+1} C_{2r+2}^r \qquad (r \geqslant 0), \tag{12}$$

где $C_n^m = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot m}$.

Если $m=2$, то можно показать, что из условий

$$\theta^2 - \theta^3 = z, \quad 2 \leqslant 3\theta \leqslant 3, \quad 0 \leqslant 27z \leqslant 4$$

следует

$$3\theta = 1 + 2\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(1-\frac{27z}{2}\right)\right],$$

откуда

$$\sum_{r=0}^{\infty} I_r^{(2)} z^r = \left\{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(1-\frac{27z}{2}\right)\right]\right\}^{-3}$$
$$\left(0 \leqslant z \leqslant \frac{4}{27}\right). \tag{13}$$

Отметим также, что для $m=1$

$$p = \min\left\{1, \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^2\right\}.$$

Возвращаясь к случаю произвольного m и используя тот факт, что

$$I_r^{(m)} = I\underbrace{(m, \ldots, m)}_{r},$$

где $I(i_1, \ldots, i_r)$ — число всех векторов $(k_1, \ldots, k_r)$, компоненты которых целочисленны, неотрицательны и удовлетворяют неравенствам

$$k_1 + \ldots + k_j \leqslant i_1 + \ldots + i_j; \quad j = \overline{1, r},$$

видим, что $I_r^{(m)}$ равно числу всех векторов $(k_1, \ldots, k_r)$, компоненты которых удовлетворяют соотношениям

$$k_1 + \ldots + k_j \leqslant jm; \qquad j = \overline{1, r}.$$

Поэтому

$$I_r^{(m)} = \sum_{k_1=0}^{m} \sum_{k_2=0}^{2m-k_1} \cdots \sum_{k_r=0}^{rm-k_1-\ldots-k_{r-1}} 1$$

или

$$I_r^{(m)} = \sum_{k_1=0}^{m} \sum_{k_2=k_1}^{2m} \cdots \sum_{k_r=k_{r-1}}^{rm} 1. \tag{14}$$

Введем обозначения

$$a_m^{(0)} = 1, \qquad a_m^{(k)} = \sum_{i=0}^{m} a_i^{(k-1)} \qquad (m \geqslant 0, k \geqslant 1)$$

(если $m < 0$, то $a_m^{(k)} = 0$ по определению). Тогда, как нетрудно видеть,

$$a_m^{(k)} = C_{m+k}^{k}. \tag{15}$$

Далее, согласно (14),

$$I_r^{(m)} = \sum_{k_1=0}^{m} \sum_{k_2=k_1}^{2m} \cdots \sum_{k_{r-1}=k_{r-2}}^{(r-1)m} [a_{rm}^{(1)} - a_{k_{r-1}-1}^{(1)}] =$$

$$= a_{rm}^{(1)} I_{r-1}^{(m)} - \sum_{k_1=0}^{m} \sum_{k_2=k_1}^{2m} \cdots \sum_{k_{r-2}=k_{r-3}}^{(r-2)m} [a_{(r-1)m-1}^{(2)} - a_{k_{r-2}-2}^{(2)}] = \ldots =$$

$$= a_{rm}^{(1)} I_{r-1}^{(m)} - a_{(r-1)m-1}^{(2)} I_{r-2}^{(m)} + \ldots + (-1)^{r-1} a_{m-(r-1)}^{(r)} I_0^{(m)}, \tag{16}$$

где $I_0^{(m)} = 1$.

Используя (15) и (16), получаем следующие рекуррентные соотношения для определения $I_r^{(m)}$:

$$I_0^{(m)} = 1,$$

$$\sum_{j=0}^{r} (-1)^j C_{1+(i+1)m}^{r-j} I_j^{(m)} = 0 \quad (r = \overline{1, \infty}). \tag{17}$$

3. В общем случае (т. е. в случае произвольного распределения вероятностей $\{\lambda_n\}$)

$$P\{\tau = r + 1\} = \theta\varkappa(\theta)(1-\theta)^r M I(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r)\,\theta^{\varkappa_1+\ldots+\varkappa_r}$$

$$(r = 0, 1, \ldots), \tag{18}$$

где

$$I(i_1, \ldots, i_r)\big|_{r=0} = 1,$$

$$I(i_1, \ldots, i_r) = \sum_{m=0}^{r-1} (-1)^{r-1-m} C^{r-m}_{1+i_1+\ldots+i_{m+1}} I(i_1, \ldots, i_m) \quad (r = \overline{1, \infty}). \tag{19}$$

(Доказательство (19) аналогично доказательству (17) и поэтому опускается).

Из (19) следует, что

$$I(i_1, \ldots, i_r) = 1 + \sum_{k=1}^{r} L_{kr}(i_1, \ldots, i_r),$$

где

$$L_{kr}(i_1, \ldots, i_r) = \sum_{k_1+\ldots+k_r=k} a(k_1, \ldots, k_r)\, i_1^{k_1} \ldots i_r^{k_r}$$

однородный полином k-й степени от $i_1, \ldots, i_r$.

Поэтому

$$MI(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r)\, \theta^{\varkappa_1+\ldots+\varkappa_r} = R[\varkappa(\theta), \theta\varkappa'(\theta), \ldots, \theta^r \varkappa^{(r)}(\theta)], \tag{20}$$

где $R(z_0, z_1, \ldots, z_r)$ — однородный полином r-й степени от $z_0, z_1, \ldots, z_r$. Так, например,

$$R(z_0, z_1) = z_0 + z_1,$$

$$R(z_0, z_1, z_2) = z_0^2 + z_1^2 + 3z_0 z_1 + \frac{1}{2} z_0 z_2$$

(рекуррентные соотношения между этими полиномами будут указаны ниже). Объединяя (18) — (20), получаем

$$P\{\tau = r+1\} = \theta\varkappa(\theta)(1-\theta)^r R[\varkappa(\theta)\, \theta\varkappa'(\theta), \ldots, \theta^r \varkappa^{(r)}(\theta)] \tag{21}$$
$$(r = 0, 1, \ldots).$$

4. Займемся теперь выводом функционального уравнения, которому удовлетворяет

$$Ms^{\tau} = \gamma(s) \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1), \tag{22}$$

а также выяснением условий, при выполнении которых $P\{\tau < \infty\} = 1$ (т. е. τ — собственная случайная величина). Пусть

$$\theta_i^* = \theta_i + 1, \qquad \varkappa_i^* = \varkappa_i + 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Тогда

$$P\{\theta_i^* = k\} = (1-\theta)\,\theta^{k-1}, \qquad P\{\varkappa_i^* = k\} = \lambda_{k-1} \quad (k = \overline{1, \infty})$$

и

$$P\{\tau = n\} = P\{\theta_1^* + \ldots + \theta_i^* \leqslant \varkappa_1^* + \ldots + \varkappa_i^*, \qquad i = \overline{1, n-1};$$
$$\theta_i^* + \ldots + \theta_n^* > \varkappa_1^* + \ldots + \varkappa_n^*\}.$$

Если 10010110 ... — реализация бесконечной последовательности испытаний Бернулли ($P\{1\} = 1 - P\{0\} = 1 - \theta$), то $\theta_1^* + \ldots + \theta_m^*$ можно интерпретировать как номер m-й по счету единицы в этой реализации (так, в данной реализации $\theta_1^* = 1$, $\theta_1^* + \theta_2^* = 4$, $\theta_1^* + \theta_2^* + \theta_3^* = 6$). Число единиц, встреченное за время $\varkappa_1^* + \ldots + \varkappa_n^*$, обозначим через ν_n и положим $\mu_n = \nu_n - n$. Последовательность

$$\mu_0 = 0, \ \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$$

является последовательностью сумм независимых и одинаково распределенных случайных величин (каждое слагаемое имеет то же распределение, что и число единиц, уменьшенное на 1, которое встретится в указанной реализации испытаний Бернулли за время $\varkappa_1^*$). Поэтому

$$P\{\mu_{n+1} = k + r \mid \mu_n = r\} = P\{\mu_1 = k \mid \mu_0 = 0\} = P\{\nu_1 = k + 1\}$$
$$(k = -1, 0, 1, 2, \ldots).$$

Обозначим через τ_k^r ($k \geqslant r$) то время, за которое однородная цепь Маркова $\{\mu_n\}$, выходя из состояния k, впервые попадет в состояние r. Так как все разности

$$\mu_1 - \mu_0, \mu_2 - \mu_1, \ldots, \mu_n - \mu_{n-1}, \ldots$$

независимы, одинаково распределены и не принимают отрицательных значений, меньших -1, то ([1], гл. 4) имеет место представление

$$\tau_k^r = \tau_k^{k-1} + \tau_{k-1}^{k-2} + \ldots + \tau_{r+1}^r, \tag{23}$$

где все слагаемые справа независимы и одинаково распределены.

Поскольку

$$P\{\tau_0^{-1} = n\} = P\{\mu_1 \geqslant 0, \mu_2 \geqslant 0, \ldots, \mu_{n-1} \geqslant 0, \mu_n < 0 \mid \mu_0 = 0\} =$$
$$= P\{\nu_1 \geqslant 1, \nu_2 \geqslant 2, \ldots, \nu_{n-1} \geqslant n-1, \nu_n < n\} =$$
$$= P\{\theta_1^* \leqslant \varkappa_1^*, \ldots, \theta_1^* + \ldots + \theta_{n-1}^* \leqslant \varkappa_1^* + \ldots + \varkappa_{n-1}^*,$$
$$\theta_1^* + \ldots + \theta_n^* > \varkappa_1^* + \ldots + \varkappa_n^*\},$$

то τ имеет то же распределение, что и τ_0^{-1}. Согласно (22), (23),

$$Ms^{\tau_k^r} = \gamma^{k-r}(s) \qquad (k \geqslant r). \tag{24}$$

По формуле полной вероятности

$$Ms^{\tau_1^0} = s\left[P\{\mu_1 = -1\} + \sum_{k=0}^{\infty} P\{\mu_1 = k\}\, Ms^{\tau_{k+1}^0}\right] =$$

$$= s\sum_{k=0}^{\infty} P\{\nu_1 = k\}\, Ms^{\tau_k^0},$$

или, согласно (24),

$$\gamma(s) = s\sum_{k=0}^{\infty} P\{\nu_1 = k\}\,\gamma^k(s). \tag{25}$$

Далее, вспоминая определение ν_1, имеем

$$\nu_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{\varkappa_1^*},$$

где все слагаемые справа не зависят друг от друга и от $\varkappa_1^*$, причем $P\{\sigma_i = 1\} = 1 - P\{\sigma_i = 0\} = 1 - \theta$ (σ_i есть не что иное, как число единиц, стоящих на i-м месте в последовательности указанных выше испытаний Бернулли). Поэтому

$$Ms^{\nu_1} = [\theta + (1-\theta)s]\,\varkappa[\theta + (1-\theta)s]. \tag{26}$$

Сравнивая (25) с (26), получаем искомое уравнение

$$\gamma(s) = s[\theta + (1-\theta)\gamma(s)]\,\varkappa[\theta + (1-\theta)\gamma(s)]. \tag{27}$$

Если $z\varkappa(z)$ обозначить через $\varkappa^*(z)$, то, согласно (27),

$$s = \frac{\gamma}{\varkappa^*[\theta + (1-\theta)\gamma]}. \tag{28}$$

5. Покажем, что (28) определяет $\gamma(s)$ однозначно.

а) Рассмотрим сначала тот случай, когда

$$M\theta_1 \geqslant M\varkappa_1,$$

или

$$(1-\theta)e_1 \leqslant 1, \tag{29}$$

где $e_1 = \varkappa^{*\prime}(1)$.

Согласно (28),

$$\frac{ds}{d\gamma} = \frac{\varkappa^*[\theta + (1-\theta)\gamma] - (1-\theta)\gamma\varkappa^{*\prime}[\theta + (1-\theta)\gamma]}{\varkappa^{*2}[\theta + (1-\theta)\gamma]}. \tag{30}$$

Числитель дроби, стоящей в правой части (30), обозначим через $h(\gamma)$. Тогда $h(1) \geqslant 0$ (это следует из (29)), а при $0 \leqslant \gamma < 1$

$$h'(\gamma) = -(1-\theta)^2\gamma\varkappa^{*\prime\prime}[\theta + (1-\theta)\gamma] < 0,$$

поэтому $h(\gamma)$ на $[0, 1]$ неотрицательна, а s (как функция γ) на этом же интервале монотонно возрастает от 0 до 1. Итак, если (29) имеет место, то $\gamma(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ является функцией, обратной монотонной функции

$$s = \frac{\gamma}{\varkappa^* [\theta + (1 - \theta) \gamma]} \qquad (0 \leqslant \gamma \leqslant 1).$$

Так как $s(1) = 1$, то $\gamma(1) = 1$ и в рассматриваемом случае τ — собственная случайная величина $(p = 1)$.

Пусть в (29) имеет место строгое неравенство *). Покажем, что τ имеет столько же моментов, сколько и $\varkappa_1^*$. Действительно, предположим что $\varkappa^{*(k)}(1) < \infty$, а $\varkappa^{*(k+1)}(1) = \infty$. Пусть $e_k = M\varkappa^{*(k)}$. Тогда

$$\max(e_1, \ldots, e_k) < \infty, \quad e_{k+1} = e_{k+2} = \ldots = \infty.$$

Дифференцируя n раз тождество

$$\frac{\gamma(s)}{s} = \varkappa^* [\theta + (1 - \theta) \gamma(s)],$$

получаем ([2], стр. 48)

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^{n-j} m_j = \sum_{k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n} (1 - \theta)^t e_t \prod_{j=1}^{n} \frac{m_j^{k_j}}{k_j!} \qquad (n = \overline{1, k}), \quad (31)$$

где $j! \, m_j = \gamma^{(j)}(1)$, $t = k_1 + \ldots + k_n$ и сумма справа берется по всем неотрицательным $k_1, \ldots, k_n$, удовлетворяющим соотношению $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$.

Соотношения (31) позволяют последовательно вычислять m_1, $m_2, \ldots, m_k$. Так, при $n = 1$

$$m_1 - 1 = e_1 (1 - \theta) m_1$$

или

$$m_1 = \frac{1}{1 - (1 - \theta) e_1}. \qquad (32)$$

При $n = 2$

$$m_2 - m_1 + 1 = \frac{1}{2!} e_2 (1 - \theta)^2 m_1^2 + e_1 m_2 (1 - \theta),$$

---

*) Если $(1 - \theta) e_1 = 1$, то $M\tau = \infty$. В самом деле, если предположим, что $M\tau < \infty$, то дифференцируя тождество

$$\gamma(s) = s\varkappa^* [\theta + (1 - \theta) \gamma(s)]$$

при $s = 1$, получим $M\tau = 1 + M\tau$, что невозможно.

откуда

$$m_2 = \frac{0{,}5\,(1-\theta)^2 m_1^2 e_2 + m_1 - 1}{1-(1-\theta)\,e_1} \tag{33}$$

и т. д.

Для доказательства того, что $m_{k+1} = \infty$, заметим, что в предположении $m_{k+1} < \infty$

$$\lim_{s\to 1-0}\left[\frac{\gamma(s)}{s}\right]^{(k+1)} = \sum_{j=0}^{k+1}{}' (-1)^{k+1-j} m_j < \infty,$$

в то время как

$$\lim_{s\to 1-0} \varkappa^{*(k+1)}[\theta + (1-\theta)\,\gamma(s)] = \infty$$

(последнее следует из анализа правой части (31)). Полученное противоречие и доказывает, что $m_{k+1} = m_{k+2} = \ldots = \infty$.

б) Пусть теперь $M\theta_1 < M\varkappa_1$, или

$$(1-\theta)\,e_1 > 1. \tag{34}$$

Согласно (30),

$$\frac{ds}{d\gamma} = \frac{h(\gamma)}{\varkappa^{*2}[\theta + (1-\theta)\,\gamma]},$$

где $h(1) < 0$ (это следует из (34)), а $h'(\gamma) < 0$ $(0 < \gamma < 1)$.

Так как $h(0) = \varkappa^*(\theta) > 0$, то существует одно и только одно α такое, что

$$h(\alpha) = 0, \quad h(\gamma) > 0 \quad (0 \leqslant \gamma < \alpha < 1).$$

Этим доказано, что на $(0, \alpha)$ правая часть (28) является монотонно возрастающей по γ. Так как $\varkappa^*(1) = 1$, то $\alpha > \varkappa^*[\theta + (1-\theta)\,\alpha]$. Поэтому существует одно и только одно p $(0 < p < \alpha)$ такое, что

$$\frac{p}{\varkappa^*[\theta + (1-\theta)\,p]} = 1.$$

Итак, на отрезке $[0, p]$ правая часть (28) (как функция γ) монотонно возрастает от 0 до 1. Поэтому (28) определяет $\gamma(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant 1$, $0 \leqslant \gamma \leqslant p)$ однозначно, и τ оказывается обобщенной случайной величиной:

$$P\{\tau < \infty\} = \gamma(1-0) = p < 1.$$

Из сказанного следует, что p — минимальный положительный корень уравнения

$$p = \varkappa^*[\theta + (1-\theta)\,p]. \tag{35}$$

Рассмотрим случай, когда $\varkappa^*(s)=\frac{(1-\lambda)s}{1-\lambda s}$, т. е. $\varkappa_1^*$ имеет геометрическое распределение с параметром λ. Из (28), (35) находим

$$\gamma(s)=\frac{1-\lambda\theta-(1-\lambda)(1-\theta)s-\sqrt{(1-\lambda\theta)^2-2(1-\lambda)(1-\theta)(1+2\theta)s+(1-\lambda)^2(1-\theta)^2s^2}}{2\lambda(1-\theta)};$$

$$p=\begin{cases}\frac{\theta(1-\lambda)}{\lambda(1-\theta)}; & \theta\leqslant\lambda\\ 1 & ,\ \theta>\lambda\end{cases};$$

$$P\{\tau=1\}=\frac{\theta(1-\lambda)}{1-\lambda\theta};$$

$$P\{\tau=m\}=\frac{(-1)^{m+1}}{\lambda}\sum_{k=\left[\frac{m+1}{2}\right]}^{m}\binom{\frac{1}{2}}{k}\binom{k}{m-k}\times$$

$$\times\frac{2^{2k-m-1}(1+\lambda\theta)^{2k-m}(1-\theta)^{m-1}(1-\lambda)^m}{(1-\lambda\theta)^{2k-1}}$$

$$(m=2,3,\ldots),$$

где

$$\binom{x}{k}=\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k(k-1)\ldots1},$$

а $[x]$ — целая часть x.

Выведем рекуррентные соотношения между полиномами $R(z_0, z_1, \ldots, z_n)$, фигурирующими в правой части равенства (20). Введем обозначения

$$\left.\frac{d^n\varkappa^*[\theta+(1-\theta)\gamma(s)]}{ds^n}\right|_{s=0}=A_n,\quad \left.\frac{d^n[\theta+(1-\theta)\gamma(s)]}{ds^n}\right|_{s=0}=(1-\theta)\,n!\,p_n,$$

$$\varrho_n=\frac{1}{n!}\frac{d^n\varkappa^*(\theta)}{d\theta^n}=\theta\frac{\varkappa^{(n)}(\theta)}{n!}+\frac{\varkappa^{(n-1)}(\theta)}{(n-1)!}\qquad(n=0,1,\ldots).$$

Так как $\gamma(s)=s\varkappa^*[\theta+(1-\theta)\gamma(s)]$, то, используя введенные обозначения и формулу Брунса для производной сложной функции ([2], стр. 48), получаем

$$A_n=n!\sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}k!\,(1-\theta)^k\prod_{i=1}^{n}\varrho_k\frac{p_i^{k_i}}{k_i!},$$

откуда

$$p_{n+1} = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} (1-\theta)^k [\theta\varkappa^{(k)}(\theta) + k\varkappa^{(k-1)}(\theta)] \prod_1^n \frac{p_i^{k_i}}{k!}, \quad (36)$$

где $k = k_1 + \ldots + k_n$ и суммирование производится по всем целым неотрицательным наборам $(k_1, \ldots, k_n)$, удовлетворяющим соотношению $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$.

Согласно (21),

$$p_{n+1} = \theta\varkappa(\theta)(1-\theta)^n R[\varkappa(\theta), \theta\varkappa'(\theta), \ldots, \theta^n\varkappa^{(n)}(0)]. \quad (37)$$

Сравнивая (36) с (37), видим, что

$$\theta\varkappa(\theta)(1-\theta)^n R[\varkappa(\theta), \theta\varkappa'(\theta), \ldots, \theta^n\varkappa^{(n)}(\theta)] =$$

$$= \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} (1-\theta)^k [\theta\varkappa^{(k)}(\theta) + k\varkappa^{(k-1)}(\theta)] \times$$

$$\times \prod_{i=1}^n \frac{1}{k_i!} [\theta\varkappa(\theta)(1-\theta)^{i-1} R(\varkappa(\theta), \theta\varkappa'(\theta), \ldots, \theta^{i-1}\varkappa^{(i-1)}(\theta))]^{k_i}$$

или

$$R[\varkappa(\theta), \theta\varkappa'(\theta), \ldots, \theta^n\varkappa^{(n)}(\theta)] = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} [\theta^k\varkappa^{(k)}(\theta) +$$

$$+ k\theta^{k-1}\varkappa^{(k-1)}(\theta)]\varkappa^{k-1}(\theta) \prod_{i=1}^n \frac{1}{k_i!} R^{k_i}[\varkappa(\theta), \theta\varkappa'(\theta), \ldots, \theta^{i-1}\varkappa^{(i-1)}(\theta)],$$

откуда

$$R(z_0) = 1,$$

$$R(z_0, \ldots, z_n) = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} z_0^{k-1}(kz_{k-1} + z_k) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^n \frac{1}{k_i!} R^{k_i}(z_0, \ldots, z_{k-1}) \quad (38)$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Это и есть искомые рекуррентные соотношения, связывающие однородные полиномы $R(z_0, \ldots, z_n)$. Непосредственный подсчет показывает, что

$$R(z_0, z_1) = z_0 + z_1, \quad R(z_0, z_1, z_2) = z_0^2 + z_1^2 + 3z_0z_1 + \frac{1}{2} z_0z_2,$$

$$R(z_0, z_1, z_2, z_3) = z_0^3 + 6z_0^2z_1 + 2z_0^2z_2 + \frac{1}{6} z_0^2z_3 + + 6z_0z_1^2 + \frac{3}{2} z_1z_2z_3 + z_1^3$$

и т. д.

6. Пусть $\zeta_0=0$, ζ_1, ζ_2, ... — последовательность, определенная в п. 1. Ее первый положительный член обозначим через τ_1. Если τ_1, τ_2, ..., τ_{k-1} уже определены, то через τ_k обозначим первый член $\{\zeta_n\}$, больший τ_{k-1}. Нас будет интересовать распределение случайной величины x_n, равной числу членов последовательности $\{\tau_k\}$, не превосходящих n $(n=\overline{1, \infty})$.

Согласно предыдущему, с вероятностью $1-p$ (p — минимальный положительный корень уравнения (35)) $\{\zeta_n\}$ не содержит ни одного положительного члена (будем считать, что в этом случае $\tau_1=\infty$). Если же $\tau_1<\infty$, то распределение τ_1 совпадает с распределением θ_1^* (напомним, что θ_1^*, θ_2^*, ... — последовательность взаимно независимых случайных величин, для каждой из которых $P\{\theta_i^*=k\}=(1-\theta)\theta^{k-1}$).

Пусть Δ и S_n — независимые случайные величины, для которых

$$P\{\Delta = k\} = (1-p)\,p^k \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$P\{S_n = m\} = C_n^m\theta^{n-m}(1-\theta)^m \qquad (m = 0, 1, \ldots, n).$$

Так как $\{\zeta_n;\ n = \overline{0, \infty}\}$ — последовательность сумм взаимно независимых одинаково распределенных случайных величин, то $x_n = k$, если:

а) либо $\Delta \geqslant k$ и число членов последовательности $\{\theta_1^*+\ldots+\theta_m^*;\ m = \overline{1, \infty}\}$ со значениями из $(0, n]$ равно k (т. е. $S_n = k$);

б) либо $\Delta = k$ и $S_n \geqslant k$, откуда

$$x_n = \min(\Delta, S_n). \tag{39}$$

Несложные подсчеты показывают, что

$$P\{x_n = m\} = p^m(1-p) + p^mC_n^m(1-\theta)^m\theta^{n-m} -$$

$$- p^m(1-p)\sum_{k=0}^{m} C_n^{m-k}(1-\theta)^{m-k}\theta^{n+k-m},$$

откуда

$$\varphi_n(t) = Me^{-tx_n} = \frac{1-p}{1-pe^{-t}} + \frac{p(1-e^{-t})}{1-pe^{-t}}[\theta + (1-\theta)pe^{-t}]^n, \tag{40}$$

5*

где

$$p = \varkappa^* [\theta + (1 - \theta) p].$$

Функцию, обратную $\varkappa^*$, обозначим через y; тогда

$$\theta = \frac{y(p) - p}{1 - p} \tag{41}$$

$\left(\text{напомним, что если } \theta_0 = 1 - \frac{1}{e_1}, \text{ то } p = 1; \text{ если же } \theta < \theta_0, \text{ то и } p < 1\right)$. Из (41), в частности, следует

$$\theta\big|_{p=1} = 1 - \frac{1}{e_1} = \theta_0,$$

$$\left.\frac{d\theta}{dp}\right|_{p=1} = -\frac{1}{2} y''(1) = \frac{e_2}{2e_1^3}, \tag{42}$$

$$\left.\frac{d^2\theta}{dp^2}\right|_{p=1} = -\frac{1}{3} y'''(1) = \frac{e_1 e_3 - 3e_2^2}{3e_1^5},$$

где $e_k = \varkappa^{*(k)}(1)$.

Пусть теперь $p = 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon \to 0$), а n изменяется так, что $n\varepsilon \to \alpha$. Согласно (42),

$$\theta_\varepsilon = \theta\big|_{p=1-\varepsilon} = \theta_0 - \frac{e_2}{2e_1^3}\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Поэтому

$$\varphi_n(\varepsilon t) = \frac{\varepsilon}{1 - (1 - \varepsilon) e^{-t\varepsilon}} + \frac{(1 - \varepsilon)(1 - e^{-t\varepsilon})}{1 - (1 - \varepsilon) e^{-t\varepsilon}} [\theta_\varepsilon - (1 - \theta_\varepsilon)(1 - \varepsilon) e^{-t\varepsilon}]^n$$

при $n \to \infty$ сходится к характеристической функции

$$\psi(t) = \frac{1}{1 + t} + \frac{t}{1 + t} e^{-a(1 - \theta_0)(1 + t)}.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Если $p = 1 - \alpha\varepsilon$, $\theta_0 = 1 - \frac{1}{e_1}$, $\varepsilon \to 0$, $n\varepsilon \to a$, то εx_n при $n \to \infty$ ($\varepsilon \to 0$) слабо сходится к $x[\alpha, (1 - \theta_0) a]$, где $x(\alpha, \beta)$ — случайная величина с распределением

$$P\{x(\alpha, \beta) \leqslant t\} = \begin{cases} 0 & , \ t \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\alpha t}, & 0 \leqslant t < \beta \cdot \\ 1 & , \ t \geqslant \beta \end{cases}$$

7. Пусть $r > 0$ — целое. Если через $\tau^{(r)}$ обозначить момент первого перескока последовательности $\{\zeta_n\}$ через уровень r (достижение уровня тоже считается перескоком), а через $\gamma^{(r)}$ величину этого перескока, то $\tau^{(r)}$ и $\gamma^{(r)}$ независимы, причем $P\{\gamma^{(r)} \geqslant k\} = \theta^k$ ($k \geqslant 0$). Доказательство этого утверждения проводится точно так же, как и в п. 1 для $r = 1$. Поскольку

$$P\{\tau^{(r)} = m\} = P\{\zeta_1 \leqslant r-1, \ldots, \zeta_1 + \ldots + \zeta_{m-1} \leqslant$$
$$\leqslant r-1, \zeta_1 + \ldots + \zeta_m \geqslant r\} = P\left\{\sum_{j=1}^{i} \theta_j^* \leqslant r-1+\sum_{j=1}^{i} \varkappa_j^*,\right.$$
$$\left. i = \overline{1, m-1};\ \sum_{j=1}^{m} \theta_j^* \geqslant r + \sum_{j=1}^{m} \varkappa_j^*\right\}, \tag{43}$$

то (см. п. 4) $\tau^{(r)}$ совпадает с тем промежутком времени, за который цепь Маркова $\{\mu_n^*\}$, выходя из 0, впервые попадает в -1 ($\mu_n^* = \nu_n^* - n$, где ν_1^* — число единиц в последовательности 1001110 . . . *) за время $\varkappa_1^* + r - 1$, ν_2^* — число единиц за время $r - 1 + \varkappa_1^* + \varkappa_2^*$, ν_3^* — за время $r - 1 + \varkappa_1^* + \varkappa_2^* + \varkappa_3^*, \ldots$). В самом деле,

$$P\{\tau_0^{-1} = m\}^{**)} = P\{\mu_1^* \geqslant 0, \ldots, \mu_{m-1}^* \geqslant 0,\ \mu_m^* < 0 \mid \mu_0^* = 0\} =$$
$$= P\{\nu_1^* \geqslant 1,\ \nu_2^* \geqslant 2, \ldots, \nu_{m-1}^* \geqslant m-1,\ \nu_m^* < m\} =$$
$$= P\left\{\sum_{j=1}^{i} \theta_j^* \leqslant r-1+\sum_{j=1}^{i} \varkappa_j^*, \quad i = \overline{1, m-1};\quad \sum_{j=1}^{m} \theta_j^* > r-1+\sum_{j=1}^{m} \varkappa_j^*\right\},$$

что совпадает с правой частью (43).

Используя формулу полной вероятности, имеем

$$Ms^{\tau^{(r)}} = \gamma_r(s) = s\left[P\{\mu_1^* = -1\} + \sum_{k=0}^{\infty} P\{\mu_1^* = k\} Ms^{\tau_k^{-1}}\right],$$

откуда

$$\gamma_r(s) = s\sum_{k=0}^{\infty} P\{\nu_1^* = k\} Ms^{\tilde{\tau}_k^0}, \tag{44}$$

---

*) 1001110 . . . — бесконечная последовательность испытаний Бернулли с $P\{1\} = 1 - P\{0\} = 1 - \theta$.

**) Через τ_k^r обозначено время, за которое $\{\mu_n^*\}$, выходя из k, впервые попадает в r.

где $\tilde{\tau}_k^0$ совпадает с тем промежутком времени, за который цепь Маркова

$$\mu_2^* - \mu_1^*, \quad \mu_3^* - \mu_1^*, \ldots, \mu_n^* - \mu_1^*, \ldots$$

выходя из k, впервые попадает в 0.

Так как $\mu_{n+1}^* - \mu_1^*$ представима в виде суммы n независимых одинаково распределенных слагаемых (распределенных так же, как и μ_1 в п. 4), то

$$Ms^{\tilde{\tau}_k^0} = \gamma^k(s) \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Учитывая (44) и

$$Ms^{\nu_1^*} = [\theta + (1-\theta)s]^r \varkappa[\theta + (1-\theta)s],$$

имеем

$$\gamma_r(s) = s[\theta + (1-\theta)\gamma(s)]^r \varkappa[\theta + (1-\theta)\gamma(s)],$$

или

$$\gamma_r(s) = [\theta + (1-\theta)\gamma(s)]^{r-1}\gamma(s), \tag{45}$$

где

$$\gamma(s) = s\varkappa^*[\theta + (1-\theta)\gamma(s)].$$

Рассмотрим несколько примеров.

а) Если $\varkappa^*(z) = z$, то

$$\gamma = s[\theta + (1-\theta)\gamma], \qquad \gamma = \frac{s\theta}{1-(1-\theta)s},$$

$$\gamma_t(s) = s\theta^r[1-(1-\theta)s]^{-r} = s\theta^r \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+r-1}^{r-1}(1-\theta)^n s^n,$$

откуда

$$P\{\theta_1 + \ldots + \theta_i \leqslant r-1, i = \overline{1, n};\ \theta_1 + \ldots + \theta_{n+1} \geqslant r\} =$$
$$= C_{n+r-1}^{r-1}\theta^r(1-\theta)^r. \tag{46}$$

Непосредственный подсчет левой части (46) показывает (см. п. 1), что

$$P\{\theta_1 + \ldots + \theta_i \leqslant r-1,\ i = \overline{1, n};\ \theta_1 + \ldots + \theta_{n+1} \geqslant r\} =$$
$$= T_n^{(r-1)}\theta^r(1-\theta)^n, \tag{47}$$

где $T_n^{(r)}$ — число всех решений (в целых неотрицательных числах) неравенства

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n \leqslant r. \tag{48}$$

Сравнение (46) с (47) приводит, в частности, к следующему результату: число всех векторов $(k_1, \ldots, k_n)$ с целыми неотрицательными компонентами, удовлетворяющими (48), равно C_{n+r}^r.

б) Если $\varkappa^*(z) = z^2$, то

$$\gamma = s[\theta + (1-\theta)\gamma]^2, \quad \gamma = \frac{\delta - \theta}{1-\theta},$$

$$\delta = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\theta(1-\theta)s}}{2s(1-\theta)}, \qquad \gamma_r(s) = \frac{\delta-\theta}{1-\theta}\delta^{r-1}$$

или

$$\gamma_r(s) = \frac{1}{1-\theta}\left[\frac{1-\sqrt{1-4\theta(1-\theta)s}}{2s(1-\theta)}\right]^r -$$

$$-\frac{\theta}{1-\theta}\left[\frac{1-\sqrt{1-4\theta(1-\theta)s}}{2s(1-\theta)}\right]^{r-1}, \tag{49}$$

откуда

$$P\{\tau^{(r)} = n\} = (-1)^{n+r-1}2^{2n+r-1}\theta^{n+r}(1-\theta)^{n-1}\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{\left[\frac{r+1}{2}\right]}\left\{2\binom{m-\frac{1}{2}}{n+r}\binom{r}{2m-1}+\binom{r-1}{2m-1}\binom{m-\frac{1}{2}}{n+r-1}\right\}^{*)}. \tag{50}$$

Так как

$$P\{\tau^{(r)} = n+1\} = P\{\theta_1 + \ldots + \theta_i \leqslant i + r - 1, \ i = \overline{1, n};$$

$$\theta_1 + \ldots + \theta_{n+1} \geqslant n + 1 + r\} = \sum_{k_1+\ldots+k_i \leqslant i+r-1;\, i=\overline{1,n}} (1-\theta)^n\theta^{n+r+1},$$

то из (50) следует, что число всех решений $(k_1, \ldots, k_n)$ системы неравенств

$$k_1 \leqslant 1 + r, \quad k_1 + k_2 \leqslant 2 + r, \ldots, k_1 + \ldots + k_n \leqslant n + r \tag{51}$$

равно

$$(-1)^{n+r+1}2^{2n+2+r}\sum_{m=1}^{\left[\frac{r+2}{2}\right]}\left\{2\binom{m-\frac{1}{2}}{n+r+2}\binom{r+1}{2m-1}+\right.$$

$$\left.+\binom{r}{2m-1}\binom{m-\frac{1}{2}}{n+r+1}\right\}. \tag{52}$$

---

*) Напомним, что $\binom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k(k-1)\ldots1}$.

В частности, несложные вычисления показывают, что системы неравенств

$$k_1 \leqslant 1, \quad k_1 + k_2 \leqslant 2, \ldots, k_1 + \ldots + k_n \leqslant n,$$

$$k_1 \leqslant 2, \quad k_1 + k_2 \leqslant 3, \ldots, k_1 + \ldots + k_n \leqslant n + 1,$$

$$k_1 \leqslant 3, \quad k_1 + k_2 \leqslant 4, \ldots, k_1 + \ldots + k_n \leqslant n + 2$$

имеют соответственно $\frac{1}{n+1} C_{2n+2}^n$, $\frac{3}{n+3} C_{2n+2}^n$, $\frac{4}{n+4} C_{2n+3}^n$ различных решений.

Если число всех решений системы неравенств (51) обозначить через $L_n^{(r)}$, то

$$L_n^{(r)} = K_n^{(r+1)} - K_n^{(r)}, \tag{53}$$

где

$$K_n^{(r)} = (-1)^{n+r} 2^{2n+r+2} \sum_{m=1}^{\left[\frac{r+1}{2}\right]} \binom{r}{2m-1} \binom{m-\frac{1}{2}}{n+r+1} \quad (r = \overline{1, \infty}), \tag{54}$$

$K_n^{(0)} = 0$.

Доказательство следует из (52).

8. Пусть $0 < \theta < 1$, а распределение $\{\lambda_n\}$ (см. п. 1) фиксировано. Обозначая левую часть (45) через $\gamma_r(\theta, s)$, исследуем предельное поведение $(n \to \infty)$

$$\gamma_{a_n}\left(\theta_n, e^{-\frac{t}{c_n}}\right) \qquad (t \geqslant 0, \ c_n \geqslant 0, \ a_n \geqslant 0).$$

Согласно (45),

$$e^{-t} = \frac{\gamma(\theta, e^{-t})}{\varkappa^* [\theta + (1 - \theta) \gamma(\theta, e^{-t})]} = \frac{\alpha(\theta, t)}{\varkappa^* [\theta + (1 - \theta) \alpha(\theta, t)]}, \tag{55}$$

где $\alpha(\theta, t) = \gamma(\theta, e^{-t})$.

Ясно, что $\alpha(\theta, 0) = p \leqslant 1$, причем, как показано выше, $p = 1$ при $(1 - \theta) e_1 \leqslant 1$ и $p < 1$ при $(1 - \theta) e_1 > 1$. В последнем случае p — наименьший положительный корень уравнения $p = \varkappa^* [\theta + (1 - \theta) p]$.

Уравнение (55) определяет функцию $t = t(\theta, \alpha)$, для которой

$$t(\theta, \alpha)\big|_{\alpha = p} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial t(\theta, \alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha = p} = -\frac{1}{p} + \frac{1 - \theta}{p} \varkappa^{*\prime} [\theta + (1 - \theta) p],$$

(56)

$$\left.\frac{\partial^2 t(\theta, \alpha)}{\partial \alpha^2}\right|_{\alpha = p} = \frac{1}{p^2} + \frac{(1 - \theta)^2}{p} \varkappa^{*\prime\prime} [\theta + (1 - \theta) p] - \left\{\frac{1 - \theta}{p} \varkappa^{*\prime} [\theta + (1 - \theta) p]\right\}^2.$$

а) Пусть $(1-\theta)e_1-1 \leqslant 0$, $e_2<\infty$. Полагая $\alpha(\theta, t)=1-\varepsilon$ и используя (56), получаем

$$t(\theta, 1-\varepsilon)=-[(1-\theta)e_1-1]\varepsilon+\frac{1}{2}[1+(1-\theta)^2(e_2-e_1^2)]\varepsilon^2+o(\varepsilon^2),$$

откуда (при $t\to 0$)

$$\varepsilon(t, \theta)=\frac{(1-\theta)e_1-1+\sqrt{[(1-\theta)e_1-1]^2+2t[(1-\theta)^2(e_2-e_1^2)+1+o(1)]}}{(1-\theta)^2(e_2-e_1^2)+1+o(1)},$$

$$\theta+(1-\theta)\alpha(\theta, t)=\theta+(1-\theta)(1-\varepsilon)=1-(1-\theta)\varepsilon=1-(1-\theta)\times$$
$$\times\frac{(1-\theta)e_1-1+\sqrt{[(1-\theta)e_1-1]^2+2t[1+(1-\theta)^2(e_2-e_1^2)]+o(1)}}{1+(1-\theta)^2(e_2-e_1^2)+o(1)} \qquad (57)$$

(перед радикалом стоит «+», ибо $(1-\theta)e_1\leqslant 1$, а $\varepsilon(0,\theta)=0$). Если $\theta=\theta_0$, т. е. $(1-\theta_0)e_1=1$, то (57) перепишется в виде

$$\theta_0+(1-\theta_0)\alpha(\theta_0, t)=1-\sqrt{\frac{2t}{e_2}}+o(1). \qquad (58)$$

Так как $\gamma(t)\to 1$ при $t\to 0$, то из (58) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n[\theta_0, e^{-\frac{t}{n^2}}]=\exp\left\{-\sqrt{\frac{2t}{e_2}}\right\}. \qquad (59)$$

Пусть $\theta=\theta_n$ таково, что $(1-\theta_n)e_1=1-\frac{1}{n}$. Используя (57), имеем

$$\theta_n+(1-\theta_n)\alpha\left(\theta_n, \frac{t}{n^2}\right)=1+\frac{1}{ne_2}(e_1-\sqrt{e_1^2+2te_2})+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n[\theta_n, e^{-\frac{t}{n^2}}]=\exp\left\{\frac{e_1-\sqrt{e_1^2+2te_2}}{e_2}\right\}. \qquad (60)$$

б) Рассмотрим тот случай, когда $e_2<\infty$, а $(1-\theta)e_1-1>0$. Полагая $\varepsilon=p-\alpha$ и используя (56), получаем

$$t(\theta, p-\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{p}-\frac{(1-\theta)\varepsilon}{p}\varkappa^{*\prime}[\theta+(1-\theta)p]+\frac{\varepsilon^2}{2p^2}+$$
$$+\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2p}\varkappa^{*\prime\prime}[\theta+(1-\theta)p]-\frac{1}{2}\left\{\frac{\varepsilon}{p}\varkappa^{*\prime}[\theta+(1-\theta)p]\right\}^2+o(\varepsilon^2)$$

или

$$[k_2+o(1)]\varepsilon^2-2k_1\varepsilon-2t=0, \qquad (61)$$

где

$$p^2k_2 = 1 + p(1-\theta)^2 \varkappa^{*''}[\theta + (1-\theta)p] - \{\varkappa^{*'}[\theta + (1-\theta)p]\}^2,$$

$$pk_1 = (1-\theta)\varkappa^{*'}[\theta + (1-\theta)p] - 1.$$

Из (61) следует, что

$$\varepsilon(t, \theta) = \frac{k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + 2t[k_2 + o(1)]}}{k_2 + o(1)} \quad (t \to 0). \tag{62}$$

Пусть $\theta = \theta_n$, $p = p_n$, $k_i = k_i^{(n)}$ $(i = 1, 2)$, причем $ne_1(\theta_0 - \theta_n) = 1$. Используя равенство $p_n = \varkappa^*[\theta_n + (1-\theta_n)p_n]$, получаем

$$p_n = 1 + \frac{2e_1^3}{e_2}(\theta_n - \theta_0) + o(\theta_n - \theta_0). \tag{63}$$

Полагая $\varepsilon_n = p_n c_n$ и используя (63), находим

$$\theta_n + (1-\theta_n)\alpha_n = 1 - \frac{2e_1}{ne_2} - \frac{c_n}{e_1} + o\left(\frac{1}{n}\right)^{*)}. \tag{64}$$

Далее,

$$\varkappa^{*''}[\theta_n + (1-\theta_n)p_n] = e_2 + o(1),$$

$$k_2^{(n)}p_n^2 = \frac{e_2}{e_1^2} + o(1),$$

$$c_n = \frac{1}{p_n}\varepsilon\left(\frac{t}{n^2}, \theta_n\right) = -\frac{1}{ne_2}\left(e_1^2 - \sqrt{e_1^4 + 2te_2e_1^2}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{65}$$

$$\theta_n + (1-\theta_n)\alpha\left(\theta_n, \frac{t}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{ne_2}\left(e_1 + \sqrt{e_1^2 + 2te_2}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Из (65) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n\left[\theta_0 - \frac{1}{ne_1}, e^{-\frac{t}{n^2}}\right] = \exp\left\{-\frac{e_1 + \sqrt{e_1^2 + 2te_2}}{e_2}\right\}. \tag{66}$$

Соотношения (59), (60), (66) полностью решают вопрос о предельном поведении $\gamma_{a_n}\left(\theta_n, e^{-\frac{t}{c_n}}\right)$ в случае $e_2 < \infty$. Случаю $e_2 = \infty$, а также $e_1 = \infty$ будет посвящена отдельная работа, и здесь мы на этом останавливаться не будем.

---

*) Так как

$$k_1^{(n)}p_n = [2e_1^3(1-\theta_n)^2 - e_1](\theta_n - \theta_0) + o\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

то $k_1^{(n)} < 0$ (по крайней мере для достаточно больших n). Поэтому при вычислении ε_n по формуле (62) перед радикалом надо брать «+» (ибо $\varepsilon_n(0, \theta_n) = 0$). Это используется при обосновании (64).

Если $\xi(t) = \sigma w(t) + at$ ($w(t)$ — стандартный винеровский процесс),

$$\eta_z(a, \sigma) = \inf\{\tau : \xi(\tau) = z\},$$

$$M \exp\{-t\eta_z(a, \sigma)\} = \varphi_z(a, \sigma, t),$$

$$P\{\eta_z(a, \sigma) < x\} = F_z(a, \sigma, x),$$

то ([1], гл. 4)

$$\varphi_z(a, \sigma, t) = \exp\left\{\frac{a - \sqrt{a^2 + 2t\sigma^2}}{\sigma^2}\right\} =$$

$$= e^{\frac{a-|a|}{\sigma^2}} \exp\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty (e^{-sx} - 1)\, x^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{a^2 x}{2\sigma^2}} dx\right\},$$

$$F_z(a, \sigma, x) = \frac{z}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{z}{\sqrt{t}} - a\sqrt{t}\right)^2\right\} t^{-\frac{3}{2}} dt. \tag{67}$$

Сравнивая (67) с (59), (60), (66), видим, что характеристические функции, стоящие в правых частях этих равенств, соответствуют распределениям

$$F_1(0, \sqrt{e_2}, x),\quad F_1(e_1, \sqrt{e_2}, x),\quad F_1(-e_1, \sqrt{e_2}, x), \tag{68}$$

которые безгранично делимы, причем первое из них устойчиво с $\alpha = \frac{1}{2}$