УДК 519.21

Я. И. ЕЛЕЙКО, асп.
Институт математики АН УССР

ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ПОЛУМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

В настоящей работе изучается предельное поведение временных средних вида $(1/t)\int\limits_0^t f(\xi(u))\,du$, где $\xi(u)$ — полумарковский процесс с произвольной фазой, без условия конечности средних времен пребывания. Отметим, что предельные распределения для аддитивных функционалов несколько иного вида — сумм случайных величин — на полумарковском процессе с произвольной фазой изучались в работе [1].

Пусть $\xi(t)$ — полумарковский процесс с непрерывным временем и произвольным фазовым пространством (X, B). Обозначим $\tau = \inf\limits_t \{t : \xi(t) = \xi(0)\}$; $\tau_s = \inf\limits_t \{t > \tau_{s-1} : \xi(t) \neq \xi(\tau_{s-1})\}$; $F_x(t) \doteq P_x\{\tau \leqslant t\}$; $\varphi_x(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} dF_x(t)$, где P_x — условная вероятность при условии $\xi(0) = x$.

Вложенная цепь Маркова с переходной вероятностью за s шагов ($s = 1, 2, \ldots$) $P^s(x, A) = P\{\xi(\tau_s) \in A/\xi(0) = x\}$ показательно эргодична. Это значит, что существуют мера $\pi(dx)$ на X с полной массой, равной единице, и константы $0 < c < \infty$ и $0 < \rho < 1$ такие, что для всякого целого положительного числа n имеет место $|P^n(x, A) = \pi(A)| < c\rho^{-n}$ равномерно по всем x из X и $A \subset B$.

Тогда $\pi(dx)$ является единственной стационарной мерой вложенной цепи, т. е. такой мерой, что для каждого $E \subset B$ выполняется соотношение $\pi(E) = \int\limits_X \pi(dx) P(x, E)$.

Теорема. Предположим, что регулярный полумарковский процесс удовлетворяет указанным выше условиям и существуют $\alpha \in [0, 1]$ и медленно меняющаяся функция $L(s)$ в нуле, такие, что

$$\frac{1-\varphi_x(s)}{s^\alpha L(s)} \to a(x) \text{ при } s \to 0; \tag{1}$$

$$\sup_{x\in X} a(x) < \infty \text{ и } \int_X \pi(dx)\, a(x) > 0; \tag{2}$$

$$\sup_{x\in X} M_x(e^{-\lambda\tau}) < 1 \text{ при всех } \lambda \neq 0. \tag{3}$$

Тогда для положительной ограниченной измеримой функции $f(x)$ на $[0, \infty)$

$$\lim_{t\to\infty} P_x\left\{(1/t)\int_0^t f(\xi(u))\,du < y\right\} = G(y),$$

где $G(y)$ определяется преобразованием Лапласа — Стилтьеса

$$\int \frac{1}{\lambda + x}\, dG(x) = \frac{\int_X (\lambda + f(x))^{\alpha-1} a(x)\,\pi(dx)}{\int_X (\lambda + f(x))^{\alpha-1} a(x)\,\pi(dx)}.$$

Доказательство. Положим $\zeta(t) = \int_0^t f(\xi(u))\,du$; $\varphi_x^s(t) = M_x e^{-s\zeta(t)}$. Для $\varphi_x^s(t)$ запишем формулу полной вероятности по моменту выхода из начального состояния:

$$\varphi_x^s(t) = M_x[e^{-s\zeta(u)}, \tau > t] + \int_X \int_0^t M_x[e^{-s\zeta(u)}, \tau\in du, \xi(\tau)\in dy]\,\varphi_y^s(t-u) =$$

$$= [1 - F_x(t)]\,e^{-sf(x)t} + \int_X \int_0^t e^{-sf(x)u} P_x\{\tau\in du, \xi(\tau)\in dy\}\,\varphi_y^s(t-u). \tag{4}$$

В силу наших предположений решение уравнения восстановления (4) имеет вид (см., например, [2, с. 40])

$$\varphi_x^s(t) = \int_0^t \int_X R_{x,dy}^s(du)\, g^s(y, t-u) = \int_X \int_0^1 R_{x,dy}^s(t\,du)\, g^s(y, t(1-u)), \tag{5}$$

где $R_{x,dy}^s(t) = \sum_k Q_x^{s,k*}(t, dy)$, $k*$ обозначает k-кратную свертку ядра

$$Q_x^s(t, dy) = e^{-sf(x)t} P_x\{\tau < t, \xi(\tau)\in dy\};$$

$$g^s(y, u) = [1 - F_y(u)]\,e^{-sf(y)u}. \tag{6}$$

Как видно из (5), асимптотическое поведение решения уравнения восстановления $\varphi_x^{s/t}(t)$ определяется свойствами $R_{x,dy}^{s/t}(tu)$ и $g^{s/t}(y, tu)$ при $t \to \infty$.

Сначала рассмотрим случай $\alpha < 1$. Из (1) и (6) следует (см. [3, с. 513]), что при $x > 0$ $g^{s/t}(y, tx) \sim (1/\Gamma(1-\alpha))\, t^{-\alpha} L(1/t) \times \times e^{-sf(y)x} x^{-\alpha}$, $t \to \infty$. Найдем асимптотику $R_{x,dy}^{s/t}(tu)$ при $t \to \infty$. Для этого в пространстве **B** ограниченных измеримых на X функций с sup-нормой рассмотрим семейство операторов

$$R^s(t) f_1(x) = \sum_k \int_X f_1(y)\, Q_x^{s,k^*}(t, dy).$$

Преобразование Лапласа по t вследствие условия (3) теоремы запишется так:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} R^s(dt) f_1(x) = \sum_n (\Phi^s(\lambda))^n f_1(x) = (E - \Phi^s(\lambda))^{-1} f_1(x),$$

где E — единичный оператор, $\Phi^s(\lambda) f_1(x) = M_x\left(e^{-(\lambda + sf(x))\tau} f_1(\xi(\tau))\right)$.

Обозначим $Ph(x) = \int_X h(y) P_x\{\xi(\tau) \in dy\}$. Из условия показательной эргодичности цепи следует, что число 1 является изолированной точкой спектра оператора P в том смысле, что существует спрямляемая простая замкнутая кривая Γ, которая принадлежит резольвентному множеству оператора, и во внутренней части которой содержится только единственное собственное число 1, а во внешней — весь остальной спектр оператора. Кроме того, собственное число 1 имеет собственную функцию, тождественно равную единице.

Так как при фиксированных s и λ и $t \to \infty$ $\Phi^{s/t}(\lambda/t) \to P$ по норме операторов, то по теореме о полунепрерывности изолированных частей спектра (см. [4, с. 262—271]) при достаточно больших t в операторе $\Phi^{s/t}(\lambda/t)$ собственное число ρ_t является изолированной точкой спектра, причем $\rho_t \to 1$ при $t \to \infty$, а собственные функции $u_t(x)$, отвечающие собственному числу ρ_t, можно выбрать таким образом, чтобы $u_t(x) \to 1$ равномерно по $x \in X$ при $t \to \infty$.

Через Π_t обозначим оператор проектирования на собственную функцию $u_t(x)$, а через Π — оператор, действующий по закону $\Pi f(x) = \int_X f(x)\, \pi(dx)$.

Лемма. Пусть $\Phi^{s/t}(\lambda/t) \to P$ по норме операторов при $t \to \infty$, кроме того, у оператора P 1 является изолированной точкой спектра. Тогда для всякой последовательности $t_n \to \infty$ при фиксированных s и λ имеет место $(1 - \rho_{t_n})(E - \Phi^{s/t_n}(\lambda/t_n))^{-1} \to \Pi$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Положим $(1-z)^{-1}(zE - \Phi^{s/t_n}(\lambda/t_n))^{-1} = \varphi(n, z)$. Функция $\varphi(n, z)$ имеет особенности в точке $z = 1$ и в точках спектра оператора $\Phi^{s/t_n}(\lambda/t_n)$, во всех остальных точках z она является операторнозначной аналитической функцией. По основной теореме Коши для операторнозначных функций

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0}\varphi(n, z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'_0}\varphi(n, z)\,dz, \qquad (7)$$

где C_0 — простой гладкий замкнутый контур, охватывающий 1 и весь спектр оператора $\Phi^{s/t_n}(\lambda/t_n)$, C'_0 — замкнутый контур радиуса R, содержащий внутри контур C_0. Отметим, что (7) не зависит от выбора контура C'_0. При достаточно больших R справедлива оценка $\left\|\oint_{C'_0}\varphi(n, z)\,dz\right\| \leqslant \frac{2\pi R}{R}\sup_{z\in C'_0}\|(zE-\Phi^{s/t_n}(\lambda/t_n))^{-1}\|$. Устремляя в этом неравенстве R к ∞ и учитывая свойства резольвенты $(zE - \Phi^{s/t_n}(\lambda/t_n))^{-1}$ на бесконечности, получаем из (7) $\frac{1}{2\pi i}\times\oint_{C_0}\varphi(n, z)\,dz = 0$. Здесь под 0 понимаем нулевой оператор.

Снова воспользовавшись теоремой Коши для операторнозначных функций, напишем равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0}\varphi(n, z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\varphi(n, z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\varphi(n, z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_3}\varphi(n, z)\,dz, \qquad (8)$$

где C_1 — простой гладкий замкнутый контур, который охватывает единицу и внутри которого отсутствуют точки спектра оператора $\Phi^{s/t_n}(\lambda/t_n)$; C_2 — простой замкнутый контур, содержащий внутри лишь изолированное собственное число ρ_{t_n}; C_3 — простой замкнутый контур, охватывающий остальной спектр оператора; C_1, C_2, C_3 лежат внутри контура C_0 и вне друг друга.

Вычислим каждый из интегралов правой части равенства (8). В силу наших предположений $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{1}{1-z}(zE-\Phi^{s/t_n}(\lambda/t_n))^{-1}dz = -(E-\Phi^{s/t_n}(\lambda/t_n))^{-1}$. Так как $-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}(zE-\Phi^{s/t_n}(\lambda/t_n))^{-1}\times dz = \Pi_{t_n}$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{1}{1-z}(zE-\Phi^{s/t_n}(\lambda/t_n))^{-1}dz = \frac{1}{1-\rho_{t_n}}\Pi_{t_n}.$$

Контур C_2 мы вправе выбирать сколь угодно малого радиуса, и следовательно, $(1-\rho_{t_n})^{-1}$ сколько угодно мало отличается от $(1-z)^{-r}$, где $z \in C_2$.

Операторнозначная функция $\varphi(n, z)$ непрерывна по z на замкнутом контуре C_3, поэтому $\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_3} \varphi(n, z)\, dz = A_n$, где A_n — линейный ограниченный оператор. В последнем интеграле можно перейти к пределу под знаком интеграла, так как $(zE - \Phi^{s/t_n}(\lambda/t_n))^{-1} \to (zE - P)^{-1}$ равномерно по $z \in C_3$ при $n \to \infty$.

Подставив в формулу (8) значения вычисленных нами интегралов и перейдя к пределу при $n \to \infty$, получим $(1-\rho_{t_n})(E - \Phi^{s/t_n}(\lambda/t_n))^{-1} \to \Pi$. Лемма доказана.

Найдем выражение, эквивалентное $1-\rho_t$:

$$(1-\rho_t) \int\limits_X u_t(x)\, \pi(dx) = \int\limits_X (P - \Phi^{s/t}(\lambda/t))\, u_t(x)\, \pi(dx) =$$

$$= \int\limits_X (P - \Phi^{s/t}(\lambda/t))\, 1\pi(dx) + \int\limits_X (P - \Phi^{s/t}(\lambda/t))(1 - u_t(x))\, \pi(dx).$$

Покажем, что

$$\int\limits_X (P - \Phi^{s/t}(\lambda/t))(1 - u_t(x))\, \pi(dx) = o\left(\int\limits_X (P - \Phi^{s/t}(\lambda/t))\, 1\pi(dx)\right).$$

Для этого достаточно убедиться, что

$$\int\limits_X (1 - u_t(x))\, \mu_{\lambda/t, s/t}(dx) \to 0 \text{ при } t \to \infty, \tag{9}$$

где

$$\mu_{s/t,\lambda/t}(A) = \frac{M_\pi(1 - e^{-(\lambda/t + s/t f(x))\tau},\ \xi(\tau) \in A)}{M_\pi(1 - e^{-(\lambda/t + s/t f(x))\tau})}.$$

По правилу Лопиталя для всякого $A \subset B$

$$\mu_{s/t,\lambda/t}(A) \xrightarrow[t\to\infty]{} \mu(A) = \frac{M_\pi((\lambda + sf(x))^2 \tau^2,\ \xi(\tau) \in A)}{M_\pi((\lambda + sf(x))^2 \tau^2)}. \tag{10}$$

Из (10) и равномерной сходимости $u_t(x)$ к 1 при $t \to \infty$ легко получить (9). Следовательно, $1 - \rho_t \sim t^{-\alpha} L\left(\frac{1}{t}\right) \int\limits_X (\lambda + sf(x))^\alpha \times$ $\times\, a(x)\, \pi(dx)$. Из того, что

$$t^{-\alpha} L\left(\frac{1}{t}\right) \int\limits_X \int\limits_0^\infty e^{-\lambda u} g(y)\, R^{s/t}_{x,dy}(tdu) \to \left[\int\limits_X (\lambda + sf(x))^\alpha a(x)\, \pi(dx)\right]^{-1} \Pi g(x)$$

при $t \to \infty$;

следует

$$t^{-\alpha} L\left(\frac{1}{t}\right) R^{s/t}_{x,dy}(t\,du) \to \mu_s(du)\,\pi(dy) \tag{11}$$

в смысле слабой сходимости мер; мера $\mu_s(du)$ определяется преобразованием Лапласа

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\mu_s(dx) = \left[\int_X (\lambda + sf(x))^\alpha a(x)\,\pi(dx)\right]^{-1}.$$

Используя асимптотику $R^{s/t}_{x,dy}(t\,du)$ и $g^{s/t}(y, tu)$, находим

$$\lim_{t\to\infty} \varphi^{s/t}_x(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^1 \int_X g^{s/t}(y, t(1-u))\, R^{s/t}_{x,dy}(t\,du) =$$

$$= (1/\Gamma(1-\alpha)) \int_0^1 \int_X e^{-sf(y)(1-u)} a(y)\,(1-u)^\alpha\,\pi(dy)\,\mu_s(du) =$$

$$= \int e^{-su}\,dG(u).$$

Так как $\int_0^\infty e^{-\lambda y} s^\alpha \mu_s(s^{-1}dy) = \left[\int_X (\lambda + f(x))^\alpha a(x)\,\pi(dx)\right]^{-1}$, то $s^\alpha \times \mu_s(s^{-1}dy) = \mu_1(dy)$. Следовательно,

$$\int_X (\lambda + x)^{-1}\,dG(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \int e^{-sx}\,dG(x)\,ds = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\,(1/\Gamma(1-\alpha)) \times$$

$$\times \int_0^1 \int_X e^{-\lambda f(y)(1-x)} a(y)\,(1-x)^\alpha\,\pi(dy)\,\mu_s(dx)\,ds = (1/\Gamma(1-\alpha)) \int_0^\infty e^{-\lambda s} \times$$

$$\times \int_0^s \int_X e^{-sf(y)(s-x)} a(y)\,(s-x)^{-\alpha} s^\alpha \pi(dy)\,\mu_s(s^{-1}dx)\,ds = (1/\Gamma(1-\alpha)) \times$$

$$\times \int_X \left(a(y) \int_0^\infty s^{-\alpha} e^{-sf(y)} e^{-\lambda s}\,ds\right) \pi(dy) \int_0^\infty e^{-\lambda u}\mu_1(du) =$$

$$= \frac{\int_X a(y)\,(\lambda + f(y))^{\alpha-1}\,\pi(dy)}{\int_X a(y)\,(\lambda + f(y))^\alpha\,\pi(dy)}.$$

Теорема доказана в случае $\alpha \leqslant 1$.

Для доказательства теоремы в случае $\alpha = 1$ достаточно показать, что

$$\frac{1}{t} M_x \zeta(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{\int\limits_X a(x) f(x) \pi(dx)}{\int\limits_X a(x) \pi(dx)};$$

$$\frac{1}{t^2} M_x \zeta^2(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \left(\frac{\int\limits_X a(x) f(x) \pi(dx)}{\int\limits_X a(x) \pi(dx)} \right)^2.$$

Асимптотическое поведение моментов $M_x\zeta(t)$ и $M_x\zeta^2(t)$ при $t \to \infty$ будем также исследовать с помощью уравнений восстановления. Дифференцируя (4) по s в точке $s = 0$ и обозначая $A_x(t) = \left. \frac{\partial \varphi_x^s(t)}{\partial s} \right|_{s=0} = M_x\zeta(t)$, получаем

$$A_x(t) = f(x) \int\limits_0^t [1 - F_x(u)]\, du + \int\limits_0^t \int\limits_X A_x(t-u) P_x\{\xi(\tau) \in dy,\ \tau \in du\}. \tag{12}$$

Решение уравнения (12) запишем следующим образом:

$$A_x(t) = \int\limits_X \int\limits_0^1 h(y, t(1-u))\, R^0_{x,dy}\ (tdu),$$

где $h(y, t) = f(y) \int\limits_0^t [1 - F_x(u)]\, du$. По тауберовой теореме (см. [3, с. 511]) $h(y, t) \xrightarrow[t\to\infty]{} f(y) a(y) L(t^{-1})$. Из (11) при $s = 0$ имеем

$$\frac{1}{t} L\left(\frac{1}{t}\right) R^0_{x,dy}\ (tu) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{u\pi(dy)}{\int\limits_X a(x) \pi(dx)}.$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A_x(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \int\limits_X \int\limits_0^1 \frac{1}{t} R^0_{x,dy}\ (tdy)\, h(y, t(1-u)) = \frac{\int\limits_X a(x) f(x) \pi(dx)}{\int\limits_X a(x) \pi(dx)}.$$

Дважды дифференцируя (4) по s в точке $s = 0$ и обозначая

$$B_x(t) = \left. \frac{\partial^2 \varphi_x^s(t)}{\partial s^2} \right|_{s=0} = M_x\zeta^2(t),$$

получаем

$$B_x(t) = f^2(x)\,t^2[1 - F_x(t)] + \int\limits_0^t f^2(x)\,u^2 F_x(du) + 2\int\limits_X\int\limits_0^t A_y(t-u) \times$$

$$\times P_x\{\xi(\tau) \in dy, \tau \in du\} + \int\limits_X\int\limits_0^t B_y(t-u)\,P_x\{\xi(\tau) \in dy, \tau \in du\}. \quad (13)$$

Уравнение (13) является уравнением восстановления. Решается оно аналогично уравнению (12), а асимптотика отношения $\frac{B_x(t)}{t^2}$ при $t \to \infty$ определяется теми же методами, что и предел выражения $\frac{A_x(t)}{t}$ при $t \to \infty$. В результате получаем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B_x(t)}{t^2} = \left(\frac{\int\limits_X a(x)\,f(x)\,\pi(dx)}{\int\limits_X a(x)\,\pi(dx)} \right)^2.$$

Теорема доказана.

В заключение хочу выразить глубокую благодарность В. М. Шуренкову за постановку задачи и помощь при ее решении.

1. *Анисимов В. В., Война А. А.* Предельные теоремы для схем суммирования на случайных процессах с произвольным пространством состояний.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1978, вып. 19. 2. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. Киев, 1976. 3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложение, т. 2. М., 1967. 4. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.

Поступила в редколлегию 12.04.79

Ya. I. Eleyko

LIMIT DISTRIBUTIONS FOR SEMI-MARKOV PROCESS WITH ARBITRARY PHASE SPACE

The limit behaviour of distributions of time means without the condition of finite mean occupation times of semi-Markov process with arbitrary phase space is studied.