УДК 519.21

А. В. ИВАНОВ, канд. физ.-мат. наук
Институт кибернетики АН УССР

О. М. КОЗЛОВ, канд. физ.-мат. наук
Институт автоматики

О СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ ОЦЕНОК МИНИМАЛЬНОГО КОНТРАСТА В СЛУЧАЕ РАЗНОРАСПРЕДЕЛЕННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Общие условия измеримости и состоятельности оценок минимального контраста (о. м. к.) и, в частности, оценок максимального правдоподобия (о. м. п.) для выборок с одинаково распределенными членами получены в работе [1].

В предлагаемой работе дано определение функций контраста, удобное в статистике независимых выборок с разнораспределенными наблюдениями, и сформулированы теоремы о состоятельности о. м. к. Рассмотрены частные случаи о. м. к.: оценки наименьших квадратов (о. н. к.), оценки наименьших модулей (о. н. м.) и о. м. п.

1. Пусть N — множество натуральных чисел, K — компактное подмножество полного сепарабельного метрического пространства (E, d), $\{P_\theta^{(i)}, \theta \in \Theta\}$ — семейство вероятностных мер, заданных на измеримых пространствах $(X^{(i)}, S^{(i)})$, $i \in N$, $\Theta \subseteq E$ — некоторое открытое множество, содержащее K. Будем считать, что для всех $\theta \in \Theta$ вероятностные пространства $(X^{(i)}, S^{(i)}, P_\theta^{(i)})$ являются полными. Рассмотрим семейство мер $\{P_\theta^N, \theta \in \Theta\}$, заданных на прямом произведении (X^N, S^N) счетного числа компонент $(X^{(i)}, S^{(i)})$ и являющихся при каждом θ произведением мер $P_\theta^{(i)}$, $i \in N$. Введем последовательность семейств $S^{(i)}$-измеримых функций

$$F_i = \{f_\theta^{(i)} : X^{(i)} \to [-\infty, \infty], \ \theta \in \Theta\}, \ i \in N. \tag{1}$$

Символом M_θ $(M_\theta^{(i)})$ будем обозначать интегрирование по мере P_θ^N $(P_\theta^{(i)})$. Если $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots) \in X^N$, то, очевидно, для любых $i \in N$; $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ $M_{\theta_1} f_{\theta_2}^{(i)} = M_{\theta_1}^{(i)} f_{\theta_2}^{(i)}(x_i)$ при условии, что указанные интегралы существуют*). Обозначим $v(\theta_0, r) = \{\theta \in \Theta : d(\theta, \theta_0) < r\}$.

Определение 1. Последовательность (1) является последовательностью семейств функций контраста для $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, если: 1) для любых $i \in N$, $\theta_0, \theta \in \Theta$ существует $M_{\theta_0} f_\theta^{(i)}$ и 2) для любого $\theta_0 \in \Theta$ существует такое $\alpha \geqslant 0$, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{\theta \in K \setminus v(\theta_0, \varepsilon n^{-\alpha})} \left(n^{-1} \sum_{i=1}^{n} M_{\theta_0} f_\theta^{(i)} - n^{-1} \sum_{i=1}^{n} M_{\theta_0} f_{\theta_0}^{(i)} \right) > 0.$$

*) Существование Mf означает, что $-\infty < Mf < +\infty$.

Определение 2. Отображение $\theta_n = \theta_n(x) : X^N \to K$, для которого

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n} f_{\theta_n}^{(i)}(x_i) = \inf_{\theta\in K} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} f_\theta^{(i)}(x_i),$$

называется о. м. к. по выборке $x_1, \ldots, x_n$.

Определение 3. Последовательность оценок θ_n, $n\in N$ называется n^α-состоятельной для $P_{\theta_0}^N$, если

$$n^\alpha d(\theta_n, \theta_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad P_{\theta_0}^N\text{-почти наверное (п. н.).} \tag{2}$$

2. В утверждениях данной статьи содержатся в различных сочетаниях следующие предположения.

A. Для любых $n\in N$ и $(x_1, \ldots, x_n)\in X^n$ $\inf\limits_{\theta\in K} n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} f_\theta^{(i)}(x_i)$ достигается в K.

B. Последовательность (1) является последовательностью семейств функций контраста.

C₁. Последовательность (1) является последовательностью семейств сепарабельных в смысле определения [2] функций.

C_2. Для любых τ_0, $\theta\in\Theta$ и $\rho > 0$

$$\sup_{i\in N} P_\theta^{(i)}\{\sup_{\tau\in v(\tau_0,\varepsilon)} |f_\tau^{(i)} - f_{\tau_0}^{(i)}| > \rho\} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \tag{3}$$

Предположение об ограниченности момента $f_\tau^{(i)}$ будет использоваться в следующих вариантах.

D_k, $k = \overline{1,4}$. Для любых τ_0, $\theta\in\Theta$ и некоторой окрестности v_0 точки τ_0 $\sup\limits_{i\in N} M_{kip} < \infty$ для некоторого $p > 1$, где

$$M_{1ip} = M_\theta^{(i)}|f_{\tau_0}^{(i)}|^p,\quad M_{2ip} = \sup_{\tau_0\in v_0} M_\theta^{(i)}|f_\tau^{(i)}|^p,\quad M_{3ip} = M_\theta^{(i)}\sup_{\tau_0\in v_0}|f_\tau^{(i)}|^p,$$

$$M_{4ip} = M_\theta^{(i)}|\inf f_\tau^{(i)}|^p.$$

Из очевидной монотонности M_{kip} по k при $k\leqslant 3$ вытекают импликации $D_3\Rightarrow D_2\Rightarrow D_1$. Для неотрицательных $f_\tau^{(i)}$ эта цепочка дополняется импликацией $D_1\Rightarrow D_4$.

3. Лемма 1. Предположим, что действительные случайные величины (с. в.) $g_0^{(i)}$, $g_n^{(i)}$, $n\in N$ заданы на вероятностных пространствах $(X^{(i)}, S^{(i)}, P^{(i)})$ и для них выполняются условия:

1) для всех $\rho > 0$ $\sup\limits_{i\in N} P^{(i)}\{|g_n^{(i)} - g_0^{(i)}| > \rho\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

2) для некоторого $p > 1$ $\sup\limits_{i,n\in N} M^{(i)}|g_n^{(i)}|^p \leqslant c < \infty$.

Тогда $\sup\limits_{i\in N}|M^{(i)}g_n^{(i)} - M^{(i)}g_0^{(i)}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Лемма является равномерным вариантом теоремы 6 [3, с. 105] и доказывается аналогично.

Лемма 2. Пусть $v_n = v(\tau_0, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_n \to 0$, выполнены условия C_1, C_2, D_1, D_2. Тогда для любых τ_0, $\theta \in \Theta$

$$\sup_{i \in N} | M_\theta^{(i)} \inf_{\tau \in v_n} f_\tau^{(i)} - M_\theta^{(i)} f_{\tau_0}^{(i)} | \underset{n \to \infty}{\to} 0. \tag{4}$$

Если вместо D_1, D_2 выполнено D_3, то для любых τ_0, $\theta \in \Theta$

$$\sup_{i \in N} | M_\theta^{(i)} \sup_{\tau \in v_n} f_\tau^{(i)} - M_\theta^{(i)} f_{\tau_0}^{(i)} | \underset{n \to \infty}{\to} 0. \tag{5}$$

Докажем (4), соотношение (5) доказывается аналогично. Положим $g_0^{(i)} = f_{\tau_0}^{(i)}$, $g_n^{(i)} = \inf_{\tau \in v_n} f_\tau^{(i)}$. Тогда по (3)

$$\sup_{i \in N} P_\theta^{(i)} \{ | g_n^{(i)} - g_0^{(i)} | > \rho \} \leqslant \sup_{i \in N} P_\theta^{(i)} \{ \sup_{\tau \in v_n} | f_\tau^{(i)} - f_{\tau_0}^{(i)} | > \rho \} \underset{n \to \infty}{\to} 0,$$

т. е. выполняется условие 1) леммы 1. Условия D_1 и D_2 обеспечивают выполнение условия 2) той же леммы.

Лемма 3. Пусть выполнены условия C_1, C_2, D_2. Тогда

$$\sup_{i \in N} | M_\theta^{(i)} f_\tau^{(i)} - M_\theta^{(i)} f_{\tau_0}^{(i)} | \underset{\tau \to \tau_0}{\to} 0.$$

Положим $H_n(\tau) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} f_\tau^{(i)} - n^{-1} \sum_{i=1}^{n} M_{\theta_0} f_\tau^{(i)}$.

Следующее утверждение переносит результат леммы 3 [4, с. 348] на случай разнораспределенных с. в.

Лемма 4. Пусть выполнены условия C_1, C_2 и условия D_4, D_2 (D_3) при некотором $p \geqslant 2$. Тогда для любого $\theta \in \Theta$

$$\varliminf_{n \to \infty} \inf_{\tau \in K} H_n(\tau) \geqslant 0 \quad (\varlimsup_{n \to \infty} \sup_{\tau \in K} H_n(\tau) \leqslant 0) \; P_{\theta_0}^N\text{-п. н.} \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $\theta_0 \in \Theta$ фиксировано. По лемме 2 для любых $\varepsilon > 0$, $\tau_0 \in \Theta$ можно указать такую окрестность v точки τ_0, что одновременно для всех $i \in N$

$$M_{\theta_0}^{(i)} f_{\tau_0}^{(i)} - \varepsilon/2 \leqslant M_{\theta_0}^{(i)} \inf_{\tau \in v} f_\tau^{(i)} \leqslant M_{\theta_0}^{(i)} f_{\tau_0}^{(i)}. \tag{7}$$

Кроме того, согласно лемме 3 можно считать, что одновременно для всех $i \in N$ и $\tau \in v$

$$| M_{\theta_0}^{(i)} f_\tau^{(i)} - M_{\theta_0}^{(i)} f_{\tau_0}^{(i)} | < \varepsilon/2. \tag{8}$$

Можно также полагать, что $v \subseteq v_0$.

Поскольку K — компакт, то существует конечное число точек $\tau_1, \ldots, \tau_m \in K$ и соответствующие им окрестности $v_1, \ldots, v_m$ такие, что $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} v_j$, и для каждой окрестности v_j выполняются неравенства (7) и (8). Из них для $j = 1, \ldots, m$ и $\tau \in v_j$ вытекают неравенства

$$M_{\theta_0}^{(i)} f_\tau^{(i)} - \varepsilon \leqslant M_{\theta_0}^{(i)} \inf_{\tau \in v_j} f_\tau^{(i)} \leqslant M_{\theta_0}^{(i)} f_\tau^{(i)},$$

которые выполняются для всех $i \in N$ одновременно. Поэтому для всех $n \in N$

$$\inf_{\tau \in K} H_n(\tau) \geqslant \min_{1 \leqslant j \leqslant m} \left(n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \inf_{\tau \in v_j} f_\tau^{(i)} - n^{-1} \sum_{i=1}^{n} M_{\theta_0}^{(i)} \inf_{\tau \in v_j} f_\tau^{(i)} \right) - \varepsilon.$$

Но теперь согласно условиям D_2, D_4 и закону больших чисел (з. б. ч.)

$$n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \inf_{\tau \in v_j} f_\tau^{(i)} - n^{-1} \sum_{i=1}^{n} M_{\theta_0} \inf_{\tau \in v_j} f_\tau^{(i)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad P_{\theta_0}^N\text{-п. н.} \tag{9}$$

Из (9) вытекает первое из соотношений (6). Второе устанавливается аналогично.

Замечание 1. Если справедливо (6), то для любой последовательности компактных множеств $K_n \subseteq K$, $n \in N$

$$\varliminf_{n \to \infty} \inf_{\tau \in K_n} H_n(\tau) \geqslant 0 \; (\varlimsup_{n \to \infty} \sup_{\tau \in K_n} H_n(\tau) \leqslant 0) \; P_{\theta_0}^N\text{-п. н.}$$

Следствие 1. Если в условиях леммы 4 D_3 и D_4 выполнены одновременно, то

$$\sup_{\tau \in K} |H_n(\tau)| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad P_{\theta_0}^N\text{-п. н.} \tag{10}$$

Следствие 2. Если $f_\theta^{(i)} \geqslant 0$, то при выполнении условий C_1, C_2 и D_2 для $p \geqslant 2$ справедливо первое из соотношений (6).

Следствие 3. Если $f_\theta^{(i)} \geqslant 0$, то при выполнении условий C_1, C_2 и D_3 для $p \geqslant 2$ справедливо (10).

4. **Теорема 1.** Если выполнены условия A, B, C_1, C_2 и условия D_2, D_4 для некоторого $p \geqslant 2$, то справедливо (2).

Доказательство. Очевидно,

$$n^{-1} \sum_{i=1}^{n} f_{\theta_0}^{(i)} \leqslant H_n(\theta_0) + n^{-1} \sum_{i=1}^{n} M_{\theta_0} f_{\theta_0}^{(i)}; \tag{11}$$

$$H_n(\theta_0) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad P_{\theta_0}^N\text{-п. н.} \tag{12}$$

Пусть $X_1, X_2 \subseteq X^N$ — множества полной $P_{\theta_0}^N$-вероятности, для которых выполняются соотношения (6) и (12) соответственно, и элементарное событие $\underline{x} \in X_1 \cap X_2$. Предположим, что $n^\alpha d(\theta_n(\underline{x}), \theta_0)$ не стремится к 0 при $n \to \infty$. Это означает, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для бесконечной последовательности индексов $n_k \in N$ $n_k^\alpha d(\theta_{n_k}(\underline{x}), \theta_0) > \varepsilon_0$. Обозначим $v_0^{(n)} = v(\theta_0, \varepsilon_0 n^{-\alpha})$. Пусть $\Delta_0 > 0$

такое число, что для $n > n_0$

$$H_n(\theta_0) \leqslant \Delta_0/2 \tag{13}$$

и согласно замечанию 1

$$\inf_{\theta \in K \setminus v_0^{(n)}} H_n(\theta) \geqslant -\Delta_0/2; \tag{14}$$

$$\inf_{\theta \in K \setminus v_0^{(n)}} \left(n^{-1} \sum_{i=1}^{n} M_{\theta_0} f_\theta^{(i)} - n^{-1} \sum_{i=1}^{n} M_{\theta_0} f_{\theta_0}^{(i)} \right) > \Delta_0 \tag{15}$$

по условию B. Поскольку

$$\inf_{\tau \in K \setminus v_0^{(n)}} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} f_\tau^{(i)} \geqslant \inf_{\tau \in K \setminus v_0^{(n)}} H_n(\tau) + \inf_{\tau \in K \setminus v_0^{(n)}} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} M_{\theta_0} f_\tau^{(i)}, \tag{16}$$

то для $n > n_0$ из (14) вытекает

$$\inf_{\tau \in K \setminus v_0^{(n)}} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} M_{\theta_0} f_\tau^{(i)} \leqslant \inf_{\tau \in K \setminus v_0^{(n)}} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} f_\tau^{(i)} + \Delta_0/2.$$

Из (16) для $n_k > n_0$ находим

$$\inf_{\tau \in K \setminus v_0^{(n)}} n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} M_{\theta_0} f_\tau^{(i)} - \Delta_0/2 \leqslant n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} f_{\theta_{n_k}}^{(i)}(\underline{x}). \tag{17}$$

Из (11), (13), (15) для $n_k > n_0$ получаем

$$n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} f_{\theta_{n_k}}^{(i)}(\underline{x}) < \inf_{\theta \in K \setminus v_0^{(n)}} n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} M_{\theta_0} f_\theta^{(i)} - \Delta_0/2. \tag{18}$$

Неравенство (18) противоречит (17). Следовательно,

$$n^\alpha d(\theta_n(\underline{x}), \theta_0) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Замечание 2. Если $f_\theta^{(i)} \geqslant 0$, то утверждение теоремы остается верным без предположения D_4.

Замечание 3. Для конкретных моделей наблюдаемых с. в. и конкретных функций контраста возможны иные условия, отличные от условий, приведенных в следствиях 1 и 3, которые также обеспечивают выполнение з. б. ч. (10). Если (10) имеет место, то состоятельность θ_n можно доказать, основываясь на более простых рассуждениях, чем в теореме 1. Действительно, пусть $\underline{x} \in X_1 \subseteq X^N$, X_1 — множество, для которого выполняется (10), n_k — такая же последовательность индексов, как и выше. Из (11) вытекает, что для

$n_k > n_0$

$$n_k^{-1}\sum_{i=1}^{n_k} f_{\theta_{n_k}}^{(i)}(\underline{x}) \leqslant n_k^{-1}\sum_{i=1}^{n_k} M_{\theta_0} f_{\theta_0}^{(i)} + \Delta_0.$$

Приходим к противоречию, основываясь на формуле (15).

5. Рассмотрим метод наименьших квадратов оценивания параметров. Предположим, что $X^{(i)} = R_m$ $(m \geqslant 1)$, $S^{(i)} = B_m$ — σ-алгебра борелевских множеств в R_m и для любого $\theta \in \Theta$ $M_\theta^{(i)} x_i = \varphi_i(\theta)$, $i \in N$. Пусть для любых $\theta \in \Theta$, $i \in N$ $M_\theta^{(i)} \|x_i\|^2 \leqslant \infty$, $\|\cdot\|$ — норма в R_m. В качестве функций контраста возьмем

$$f_\theta^{(i)}(x_i) = \|x_i - \varphi_i(\theta)\|^2. \tag{19}$$

Тогда $M_{\theta_0}^{(i)} f_\theta^{(i)}(x_i) - M_{\theta_0}^{(i)} f_{\theta_0}^{(i)}(x_i) = \|\varphi_i(\theta) - \varphi_i(\theta_0)\|^2$. Обозначим $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i(\theta_1) - \varphi_i(\theta_2)\|^2 = \varphi_n(\theta_1, \theta_2)$. Условие контраста B превращается в условие

B^1. Для любого $\theta_0 \in \Theta$ существует такое $\alpha > 0$, что для любого $\varepsilon > 0$ $\varliminf_{n\to\infty} \inf_{\theta \in K \setminus v(\theta_0, \varepsilon n^{-\alpha})} \varphi_n(\theta, \theta_0) > 0$.

Достаточными для выполнения D_1 являются условия

$D_1^{(1)}$. Для любого $\theta \in \Theta$ $\sup_{i \in N} M_\theta^{(i)} \|x_i\|^{2p} < \infty$ для некоторого $p > 1$;

$D_1^{(2)}$. Для любого $\tau_0 \in \Theta$ существует окрестность v_0 точки τ_0 такая, что $\sup_{i \in N} \sup_{\tau \in v_0} \|\varphi_i(\tau)\| < \infty$.

Заметим, что $|f_\tau^{(i)} - f_{\tau_0}^{(i)}| \leqslant \|\varphi_i(\tau) - \varphi_i(\tau_0)\| (2\|x_i\| + \|\varphi_i(\tau_0)\| + \|\varphi_i(\tau_0)\|)$. Следовательно, выполнение C_2 обеспечивается условиями $D_1^{(1)}$, $D_1^{(2)}$ и условием

$C_2^{(1)}$. Функции $\varphi_i(\tau)$ равностепенно по $i \in N$ непрерывны в Θ.

Если выполнено $C_2^{(1)}$, то A и C_1, очевидно, выполняются.

Теорема 2. Предположим, что удовлетворяются условия $B^{(1)}$, $C_2^{(1)}$, $D_1^{(1)}$, $D_1^{(2)}$. Тогда для о. н. к. θ_n, $n \in N$ справедливо (2).

Пусть

$$x_i = \varphi_i(\theta) + \xi_i, \quad i \in N, \tag{20}$$

где ξ_i — независимые одинаково распределенные (н. о. р.) векторы, для любого $\theta \in \Theta$ $M_\theta^{(i)} \xi_1 = 0$, $M_\theta^{(i)} \|\xi_1\|^2 < \infty$.

Для модели регрессии (20) можно привести менее жесткие условия состоятельности о. н. к., чем в теореме 2. Для (20) и функций контраста (19) при фиксированном $\theta_0 \in K$

$$H_n(\theta) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|^2 - M_{\theta_0}\|\xi_1\|^2 + 2n^{-1}\sum_{i=1}^{n} (\xi_i, \varphi_i(\theta_0) - \varphi_i(\theta)).$$

Следовательно, $\sup_{\theta \in K} |H_n(\theta)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $P^N_{\theta_0}$-п. н., если

$$\sup_{\theta\in K} n^{-1} \left| \sum_{i=1}^{n} (\xi_i, \varphi_i(\theta_0) - \varphi_i(\theta)) \right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad P^N_{\theta_0}\text{-п. н.} \tag{21}$$

Достаточным для выполнения (21) является условие

$$E_1.\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{\theta_1, \theta_2 \in K} (\varphi_n(\theta_1, \theta_2) - \varphi(\theta_1, \theta_2)) \leqslant 0,$$

где функция $\varphi(\theta_1, \theta_2)$ равномерно непрерывна на диагонали $\theta_1 = \theta_2$ в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что коль скоро $d(\theta_1, \theta_2) < \delta$, то $\varphi(\theta_1, \theta_2) < \varepsilon$.

Теорема 3. Пусть для модели (20) выполнены условия A, $B^{(1)}$, E_1. Тогда справедливо утверждение предыдущей теоремы.

Пример 1. Для функции $\varphi_i(\theta) = \cos i\theta$, $\theta \in \Theta = (0, \pi)$ условие E_1 не выполняется. Тем не менее о. н. к. θ_n параметра $\theta_0 \in K = [\beta, \gamma]$, $0 < \beta < \gamma < \pi$ n-состоятельна. Действительно, как показано в работе [5],

$$\sup_{\theta\in K} \left| n^{-1} \sum_{l=1}^{n} e^{il\theta} \xi_l \right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad P^N_{\theta_0}\text{-п. н.}$$

и, следовательно, выполняется (21). С другой стороны,

$$\varphi_n(\theta, \theta_0) = 1 - \sin(n + 1/2)(\theta - \theta_0)/2n \sin(\theta - \theta_0)/2 + o(1),$$

где $o(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ равномерно по $\theta \in K$. n-Состоятельность θ_n можно легко получить, воспользовавшись замечанием 3.

Замечание 4. Очевидно, теоремы 2 и 3 имеют место и в случае, когда $X^{(i)} = H$, H — полное сепарабельное гильбертово пространство, $S^{(i)}$ — σ-алгебра борелевских множеств в H.

6. Рассмотрим метод наименьших модулей оценивания параметров. Пусть измеримые пространства $(X^{(i)}, S^{(i)})$ суть (R_1, B_1). Предположим, что для любых $\theta \in \Theta$, $i \in N$ $M^{(i)}_\theta |x_i| < \infty$ и функции $\varphi_i(\theta)$ являются однозначно определенными медианами мер $P^{(i)}_\theta$. В качестве функций контраста возьмем функции

$$f^{(i)}_\theta = |x_i - \varphi_i(\theta)|. \tag{22}$$

Разумеется, здесь можно сформулировать теорему, аналогичную теореме 2. Приведем одно утверждение, которое существенно использует вид функций (22).

Теорема 4. Предположим, что выполнены условия A, B и условия:

$$E_2.\ \overline{\lim_{n\to\infty}} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} M_\theta x_i^2 < \infty, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2(\theta) < \infty, \quad \theta \in K;$$

$$E_3.\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{\theta_1, \theta_2 \in K} \left(n^{-1} \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(\theta_1) - \varphi_i(\theta_2)| - \varphi(\theta_1, \theta_2) \right) \leqslant 0,$$

где функция $\varphi(\theta_1, \theta_2)$ такая же, как в условии E_1. Тогда о. н. м. θ_n удовлетворяет (2).

Доказательство. Для любого $\theta \in K$

$$H_n(\theta) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \varphi_i(\theta)| - n^{-1}\sum_{i=1}^{n} M_{\theta_0}|x_i - \varphi_i(\theta)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad P_{\theta_0}^N\text{- п. н.}, \tag{23}$$

поскольку $\sum_{i=1}^{\infty} i^{-2} M_{\theta_0}|x_i - \varphi_i(\theta)|^2 < \infty$, по условию E_2'. Пусть $K' \subseteq K$ — счетное плотное в K множество и $X_1 \subseteq R_1^N$ — множество полной $P_{\theta_0}^N$-вероятности, для которого (23) выполняется при всех $\theta \in K'$.

По условию E_3 для любого $\varepsilon > 0$ и $n > n_0$

$$\sup_{\theta_1,\theta_2\in\Theta}\left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i(\theta_1) - \varphi_i(\theta_2)| - \varphi(\theta_1, \theta_2)\right) \leqslant \varepsilon.$$

Поэтому для любых $\theta_1, \theta_2 \in K$, $n > n_0$

$$|H_n(\theta_1) - H_n(\theta_2)| \leqslant 2n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i(\theta_1) - \varphi_i(\theta_2)| \leqslant 2\varphi(\theta_1, \theta_2) + 2\varepsilon.$$

Очевидно,

$$\sup_{\theta\in K}|H_n(\theta)| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n_\delta}\ \sup_{\theta\in K\cap v(\theta_i',\delta)}|H_n(\theta) - H_n(\theta_i')| + \max_{1\leqslant i\leqslant n_\delta}|H_n(\theta_i')|,$$

где n_δ — конечное число множеств для всех $v(\theta_i', \delta)$, покрывающих K, $\theta_i' \in K'$.

Пусть для фиксированного $x \in X_1$ и $n > n_0$ $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n_\delta}|H_n(\theta_i')| < \varepsilon$. Тогда для $n > n_0$

$$\sup_{\theta\in K}|H_n(\theta)| \leqslant 2\max_{1\leqslant i\leqslant n_\delta}\ \sup_{\theta\in\Theta\cap v(\theta_i',\delta)}\varphi(\theta, \theta_i') + 3\varepsilon \leqslant 5\varepsilon.$$

Следовательно, $\sup\limits_{\theta\in K}|H_n(\theta)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $P_{\theta_0}^N$- п. н. Дальнейшие рассуждения такие же, как в замечании 3.

Следствие 4. Предположим, что наблюдения x_i имеют вид (20), где ξ_i — н. о. р. симметричные с. в. Теорема 4 остается справедливой, если вместо E_2 выполняется условие

E_4. Для любого $\theta \in K$ $M_\theta\xi_1^2 < \infty$; для любых $\theta, \theta_0 \in K$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\varphi_n(\theta, \theta_0) < \infty$.

Пример 2. Пусть в (20) ξ_i распределены равномерно на $[-b, b]$ и

$$\sup_{i\in N}\ \sup_{\theta_1,\theta_2\in K}|\varphi_i(\theta_1) - \varphi_i(\theta_2)| \leqslant b. \tag{24}$$

Неравенство (24) обеспечивает выполнение условия E_4 и соотношения

$$M_{\theta_0}^{(i)}|x_i-\varphi_i(\theta)|=M_{\theta_0}^{(i)}|\xi_i|+(2b)^{-1}|\varphi_i(\theta)-\varphi_i(\theta_0)|^2.$$

Следовательно, B здесь совпадает с $B^{(1)}$. Условия (24) и E_3 выполняются, если

$$\sup_{i\in N}\sup_{\theta_1,\theta_2\in K}(|\varphi_i(\theta_1)-\varphi_i(\theta_2)|-\varphi(\theta_1,\theta_2))\leqslant 0,$$

$$\sup_{\theta_1,\theta_2\in K}\varphi(\theta_1,\theta_2)\leqslant b.$$

Пример 3. Пусть в (20) ξ_i — с. в. с плотностью $g(x)=(2\beta)^{-1}e^{-|x|/\beta}$. Нетрудно подсчитать, что

$$M_{\theta_0}^{(i)}|x_i-\varphi_i(\theta)|=\beta e^{-\beta^{-1}|\varphi_i(\theta_0)-\varphi_i(\theta)|}+|\varphi_i(\theta_0)-\varphi_i(\theta)|,$$

$$M_{\theta_0}^{(i)}|\xi_i|=\beta.$$

Поскольку для $x\geqslant 0$ $e^{-x}+x-1\geqslant(x^2/2)e^{-x}$, то

$$M_{\theta_0}^{(i)}f_\theta^{(i)}-M_{\theta_0}^{(i)}f_{\theta_0}^{(i)}\geqslant(2\beta)^{-1}e^{-\beta^{-1}|\varphi_i(\theta_0)-\varphi_i(\theta)|}(\varphi_i(\theta_0)-\varphi_i(\theta))^2.$$

Если

$$\sup_{i\in N}\sup_{\theta_1,\theta_2\in K}|\varphi_i(\theta_1)-\varphi_i(\theta_2)|<\infty, \tag{25}$$

то B сводится к $B^{(1)}$.

Пример 4. Пусть в предыдущем примере $\varphi_i(\theta)=(c_i,\theta)$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в R_r, $r\geqslant 2$. Очевидно, (25) выполняется, если

$$\varkappa_1=\sup_{i\in N}\|c_i\|<\infty. \tag{26}$$

Из (26) следуют неравенства $\varkappa_2=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\|c_i\|^2<\infty$, $\varkappa_3=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\|c_i\|<\infty$. Если $\varkappa_2<\infty$, то справедливо E_4. Если $\varkappa_3<\infty$, то справедливо E_3 с функцией $\varphi(\theta_1,\theta_2)=\varkappa_3\|\theta_1-\theta_2\|$. Заметим, что $\varphi_n(\theta,\theta_0)=n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(c_i,\theta-\theta_0)^2=(C_n(\theta-\theta_0),\theta-\theta_0)$, C_n — неотрицательно-определенная матрица. Пусть $\lambda_{\min}^{(n)}$ — минимальное собственное число C_n. Тогда $d(\theta_n,\theta_0)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ $P_{\theta_0}^N$ - п. н., если, помимо (26), $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\lambda_{\min}^{(n)}>0$.

7. Рассмотрим, наконец, метод максимального правдоподобия оценивания параметров. Предположим, что $(X^{(i)}, S^{(i)})$, $i \in N$ — измеримое пространство с σ-конечной мерой $\mu^{(i)}$, мера $P_\theta^{(i)}$ имеет плотность $g_\theta^{(i)}(x_i)$, $x_i \in X^{(i)}$, $\theta \in \Theta$ относительно $\mu^{(i)}$, $i \in N$. В качестве функций контраста рассмотрим $f_\theta^{(i)} = -\ln g_\theta^{(i)}(x_i)$. Условие C_2 превращается в следующие условия:

$C_2^{(2)}$. Для любых τ_0, $\theta \in \Theta$ и $\delta > 0$

$$\sup_{i \in N} P_\theta^{(i)}\{\sup_{\tau \in v(\tau_0, \varepsilon)} g_\tau^{(i)}/g_{\tau_0}^{(i)} > 1 + \delta\} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0;$$

$$C_2^{(3)}. \sup_{i \in N} P_\theta^{(i)}\{\inf_{\tau \in v(\tau_0, \varepsilon)} g_\tau^{(i)}/g_{\tau_0}^{(i)} < 1 - \delta\} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

Пример 5. Пусть $X^{(i)} = R_1$, $S^{(i)}$ — σ-алгебра борелевских множеств в R_1, $g_\theta^{(i)}(x_i) = (2\varphi_i(\theta))^{-1} e^{-|x_i|/\varphi_i(\theta)}$, $\mu^{(i)}$ — мера Лебега на R_1, $\Theta = (\alpha; \beta)$ — интервал R_1, $\alpha > 0$, $K \subset \Theta$ — замкнутый интервал. Предположим, что $\varphi_i(\theta) = \varphi_i\theta$, а последовательность φ_i удовлетворяет условию:

$$\inf_{i \in N} \varphi_i > 0, \quad \sup_{i \in N} \varphi_i < \infty. \tag{27}$$

Очевидно, (27) влечет выполнение условий $C_2^{(2)}, C_2^{(3)}, D_2, D_3$ и D_4. Условие B превращается в условие

$$\lim_{\overline{n \to \infty}} \inf_{|\theta - \theta_0|} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i(\theta_0)/\varphi_i(\theta) - \ln(\varphi_i(\theta_0)/\varphi_i(\theta)) - 1) > 0. \tag{28}$$

Для линейной функции $\varphi_i(\theta)$ (28) эквивалентно неравенству $\inf_{|\theta - \theta_0| > \varepsilon} (\theta_0/\theta - \ln(\theta_0/\theta) - 1) > 0$, которое, очевидно, всегда выполняется. Таким образом, о. м. п. параметра θ_0 является состоятельной.

1. *Pfanzagl J.* On the measurability and consistency of minimum contrast estimates.— Metrika, 1969, 14, 2. 2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. М., 1971. 3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М., 1965. 4. *Шметтерер Я.* Введение в математическую статистику. М., 1976. 5. *Hannan E. J.* Non-linear time series regression.— J. Appl. Probab., 1971, 8, 4.

Поступила в редколлегию 02.02.79

A. V. Ivanov, O. M. Kozlov

ON CONSISTENCY OF MINIMUM CONTRAST ESTIMATES IN THE CASE OF NONEQUALY DISTRIBUTED OBSERVATIONS

Some conditions of consistency of minimum contrast estimates in the case of nonequally distributed sample elements are considered.