УДК 519.21

И. Ю. КАНИОВСКАЯ, асп.
Киевский университет

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОЦЕДУРЫ РОББИНСА—МОНРО С НЕГЛАДКОЙ ФУНКЦИЕЙ РЕГРЕССИИ

Для нахождения нуля N-мерной вектор-функции регрессии $R(t, x)$, наблюдаемой с аддитивным шумом $D(t, x)\, dw(t)$, рассмотрим уравнение

$$dx^{\zeta}(t) = [a + o(1)]\, t^{-1} [R(t, x^{\zeta}(t))\, dt + D(t, x^{\zeta}(t))\, dw(t)], \quad t \geqslant t_0 > 0; \tag{1}$$

$$x^{\zeta}(t_0) = \zeta, \tag{2}$$

где $D(t, x)$ — $N \times N$ матрица, $R(t, x)$ и $D(t, x)$ — борелевские функции по $x \in R^N$, $t \geqslant t_0$, $w(t)$ — стандартный N-мерный винеровский процесс, ζ — случайный вектор, не зависящий от $w(t)$, $t \geqslant t_0$. Будем предполагать, что $x = 0$ является единственным решением уравнения $R(t, x) = 0$ $\forall t \geqslant t_0$. Асимптотическая нормальность и слабая сходимость случайных процессов $\tilde{x}_L(t) = L^{1/2} \exp(t/2) \times x^{\zeta}(L \exp(t))$ доказаны в книге [1] для случая, когда $R(t, x) = R(x)$ — гладкая функция. Здесь будут получены аналогичные результаты для негладкой $R(t, x)$.

В R^N рассмотрим скалярное произведение $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{N} [x]_i [y]_i$ и норму $\| x \| = \langle x, x\rangle^{1/2}$; где $[x]_i$ — i-я координата вектора x. Под нормой матрицы B понимается величина $\| B \| = \max_{\|x\|=1} \langle B'Bx, x\rangle$. Через k обозначим положительные постоянные, штрихом — транспонирование. Предположим, что

$$\| R(t, x) - R(t, y) \| + \| D(t, x) - D(t, y) \| \leqslant k \| x - y \| \quad \forall x, y \in R^N, \ t \geqslant t_0. \tag{3}$$

Тогда решение уравнения (1), (2) существует, является единственным и непрерывным с вероятностью 1. В силу непрерывности случайного процесса $x^{\zeta}(t)$ траектории процессов $x_L(t) = L^{1/2} x^{\zeta}(Lt)$, $0 < \tau_0 \leqslant t \leqslant T < \infty$, $L \geqslant t_0 \tau_0^{-1}$ с вероятностью 1 принадлежат $C^N[\tau_0, T]$ — пространству N-мерных действительных вектор-функций с равномерной метрикой, заданных на $[\tau_0, T]$.

Теорема 1. Пусть: 1) $x^{\zeta}(t) \xrightarrow[t \to \infty]{\text{п.н.}} 0$;

2) R^N разбито гиперплоскостями, проходящими через точку 0, на K многогранных конусов Γ_j, $j=\overline{1,K}$ с вершиной в точке 0, $\bigcup\limits_{j=1}^{K}\Gamma_j=R^N$, $\Gamma_i\cap\Gamma_j=\partial\Gamma_i\cap\partial\Gamma_j$ при $i\neq j$ ($\partial\Gamma_i$ — граница Γ_i) и имеет место разложение $R(t,x)=A(x)x+\delta(t,x)$, где $A(x)=A_j$ на $\operatorname{Int}\Gamma_j$, $A(0)=0$, A_j, $j=\overline{1,K}$ — устойчивые матрицы [1], $A_iA_j=A_jA_i$ при $i\neq j$, $\min\limits_{j=\overline{1,K}}\min\limits_{i=\overline{1,N}}|\operatorname{Re}\lambda_i(A_j)|=\omega$, $a\omega>1/2$, $\lambda_i(A_j)$, $i=\overline{1,N}$ — собственные числа матрицы A_j, причем существует симметричная положительно-определенная матрица C [2] такая, что $\langle CA(x)x,x\rangle\leqslant-\lambda\langle Cx,x\rangle$, $a\lambda>1/2$, $\sup\limits_{t\geqslant t_0}\|\delta(t,x)\|=o(\|x\|)$ при $x\to 0$.

Тогда меры, отвечающие $x_L(\cdot)$, слабо компактны при $L\to\infty$ в $C^N[\tau_0,T]$.

Доказательство. Согласно условию 2 есть $\varepsilon_1>0$ такое, что при $\|x\|\leqslant\varepsilon_1$

$$\langle CR(t,x),x\rangle\leqslant-\lambda_1\langle Cx,x\rangle; \tag{4}$$

$$a\lambda_1>1/2. \tag{5}$$

Зададим положительное число $v\in(0,1)$ и последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_j\}$, $j\geqslant 2$ и $\{v_j\}$, $j\geqslant 1$ такие, что $\varepsilon_j\downarrow 0$ при $j\to\infty$, $\varepsilon_2<\varepsilon_1$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty}v_j=v$.

В силу условия 1 существует последовательность моментов времени $\{t_j\}$, $j\geqslant 1$ таких, что $P\{\|x^\zeta(t)\|\leqslant\varepsilon_1,\ t\geqslant t_1\geqslant t_0\}\geqslant 1-v_1$, $P\{\|x^\zeta(t)\|\leqslant\varepsilon_k,\ t\geqslant t_k>t_{k-1}\}\geqslant 1-v_k$, $k\geqslant 2$. Положим при $t_0\leqslant t<t_1$ $\varepsilon(t,x)=\delta(t,x)$, а при $t_k\leqslant t<t_{k+1}$, $k\geqslant 1$

$$\varepsilon(t,x)=\begin{cases}\delta(t,x), & \|x\|\leqslant\varepsilon_k,\\ \delta(t,(2\varepsilon_k\|x\|^{-1}-1)x), & \varepsilon_k<\|x\|\leqslant 2\varepsilon_k,\\ 0, & \|x\|>2\varepsilon_k.\end{cases}$$

Рассмотрим уравнение

$$dy^\zeta(t)=[a+o(1)]t^{-1}[f(t,y^\zeta(t))\,dt+D(t,y^\zeta(t))\,dw(t)],\quad t\geqslant t_0,$$
$$y^\zeta(t_0)=\zeta,$$

где $f(t,x)=A(x)x+\varepsilon(t,x)$. Отметим, что $f(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица, следовательно, решение $y^\zeta(t)$ существует, единственно и непрерывно с вероятностью 1. Тогда

$$P\{x^\zeta(t)=y^\zeta(t),t\geqslant t_0\}\geqslant P\left\{\bigcap_{k=1}^{\infty}\mathfrak{M}_k\right\}=1-P\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty}{}^c\mathfrak{M}_k\right\}\geqslant$$
$$\geqslant 1-\sum_{k=1}^{\infty}v_k=1-v, \tag{6}$$

где $\mathfrak{M}_k = \{\| x^\xi(t) \| \leqslant \varepsilon_k,\ t \geqslant t_k\}$. Из соотношения (6) вытекает, что для $y_L(t) = (Lt)^{1/2} y^\xi(Lt)$, $t \in [\tau_0, T]$, $L \geqslant t_0 \tau_0^{-1}$ имеет место оценка

$$P\{x_L(\cdot) = y_L(\cdot)\} \geqslant 1 - v. \tag{7}$$

Неравенство (7) в силу произвольности $v > 0$ означает, что для доказательства слабой компактности мер, отвечающих $x_L(\cdot)$, достаточно доказать слабую компактность мер, отвечающих $y_L(\cdot)$. Сделаем это.

Используя неравенства (4), (5) и рассуждения, аналогичные имеющимся в книге [1], получаем

$$M \| y_L(\tau_0) \|^2 = M \| (\tau_0 L)^{1/2} y^\xi(\tau_0 L) \|^2 \leqslant k. \tag{8}$$

Поскольку Γ_j, $j = \overline{1, K}$ — конусы (т. е. из того, что $x \in \Gamma_j$, следует, что $\delta x \in \Gamma_j$ $\forall \delta \geqslant 0$), то несложно проверить справедливость соотношения

$$dy_L(t) = t^{\nu+1} \{[a + o(1)] (Lt)^{1/2} f(Lt, (Lt)^{-1/2} y_L(t)) +$$

$$+ 2^{-1} y_L(t)\} dt + [a + o(1)] t^{-1/2} D(Lt, (Lt)^{-1/2} y_L(t))\, dw_L(t) =$$

$$= a_L(t, y_L(t))\, dt + D_L(t, y_L(t))\, dw_L(t), \tag{9}$$

где $w_L(t) = L^{-1/2} w(Lt)$ — стандартный N-мерный винеровский процесс.

Из способа построения $\varepsilon(t, x)$, условия 2 и соотношения (3) вытекает оценка

$$\| a_L(t, x) \| + \| D_L(t, x) \| \leqslant k(1 + \| x \|). \tag{10}$$

Согласно теореме 5 [3, с. 256] выполнения неравенств (8) и (10) достаточно для слабой компактности в $C^N[\tau_0, T]$ при $L \to \infty$ мер, отвечающих процессам $y_L(\cdot)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Условия, обеспечивающие сходимость с вероятностью 1 рассматриваемых процедур, исследовались в книге [1].

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1, а также условия

$$3)\quad \lim_{\substack{t \to \infty \\ x \to 0}} D(t, x) = D, \quad \det D \neq 0$$

частные распределения случайных процессов $x_L(t)$, $t \in [0, T]$ сходятся к соответствующим частным распределениям процесса

$$x(t) = \int_0^t \exp\left\{\int_s^t [aA(x(\tau)) + 2^{-1} E] \tau^{-1} d\tau\right\} a s^{-1/2} D\, dw(s),$$

где E — единичная матрица в R^N.

Доказательство. Из неравенства (7) в силу произвольности $v>0$ следует, что для доказательства теоремы достаточно доказать сходимость частных распределений случайных процессов $y_L^v(t)$, $t\in[0,T]$. Сделаем это. Положим $\delta_k=\sup_{\substack{t\geq t_k\\ \|x\|\leq\varepsilon_k}}\|\delta(t,x)\|\|x\|^{-1}$.

Тогда из условия 2 вытекает, что $\delta_k\to 0$ при $k\to\infty$. Для $\varepsilon(t,x)$ при $t\geq t_k$ находим оценку

$$\|\varepsilon(t,x)\|\leq\delta_k\|x\|. \tag{11}$$

Из условий 2, 3 и соотношений (9), (11) получаем

$$\lim_{L\to\infty}\sup_{\|x\|<\infty}\sup_{t\in[\tau_0,T]}(1+\|x\|)^{-1}\{\|a_L(t,x)-t^{-1}[aA(x)+$$
$$+2^{-1}E]x\|+\|D_L(t,x)-t^{-1/2}aD\|\}=0. \tag{12}$$

Из оценки (8) и неравенства Маркова вытекает стохастическая ограниченность при $L\to\infty$ случайных векторов $y_L(\tau_0)$. Все предельные точки $y(\alpha,\tau_0)$, $\alpha\in\mathbf{B}$ являются в силу теоремы о сходимости моментов [4, с. 197] случайными векторами с

$$M\|y(\alpha,\tau_0)\|^\delta\leq k^{\delta/2}\quad\forall\delta\in(0,2). \tag{13}$$

Соотношения (9), (12) позволяют применить теорему 14 [3, с. 277]. Отсюда следует, что для тех L_α, для которых $y_{L_\alpha}(\tau_0)\xrightarrow{\text{сл.}}y(\alpha,\tau_0)$ при $L_\alpha\to\infty$, частные распределения $y_{L_\alpha}(t)$, $t\in[\tau_0,T]$ сходятся к соответствующим частным распределениям процесса $y_\alpha(t)$ такого, что

$$dy_\alpha(t)=t^{-1}[aA(y_\alpha(t))+2^{-1}E]y_\alpha(t)\,dt+at^{-1/2}Ddw(t),\quad t>\tau_0; \tag{14}$$

$$y_\alpha(\tau_0)=y(\alpha,\tau_0), \tag{15}$$

где $y_\alpha(\tau_0)$ не зависит от $w(t)$. В силу того, что функция $A(x)x$ удовлетворяет условию Липшица, случайный процесс $y_\alpha(\cdot)$ непрерывен с вероятностью 1 $\forall\alpha\in\mathbf{B}$. Согласно [5], для всякого шара $S_R=\{x:\|x\|\leq R\}$ $P\left\{\mu\left(u:y_\alpha(u)\in\bigcup_{i=1}^{K}\partial\Gamma_i\cap S_R\right)>\delta\right\}=0\quad\forall\delta>0$.

Поэтому, применяя формулу Ито с обобщенными производными [6], получаем

$$y_\alpha(t)=\exp\left\{\int_{\tau_0}^{t}[aA(y_\alpha(s))+2^{-1}E]s^{-1}ds\right\}\left\{y_\alpha(\tau_0)+\right.$$
$$\left.+\int_{\tau_0}^{t}\exp\left\{-\int_{\tau_0}^{s}[aA(y_\alpha(\tau))+2^{-1}E]\tau^{-1}d\tau\right\}as^{-1/2}Ddw(s)\right. \tag{16}$$

Используя хорошо известный факт в теории сильно непрерывных однопараметрических полугрупп операторов (см. книгу [7, с. 133]) и то, что $K < \infty$, можно установить неравенство

$$\left\| \exp\left\{ a \int_u^\tau A(y_\alpha(s))\, ds \right\} \right\| \overset{\text{п.н.}}{\leqslant} k \exp\{-\alpha\omega(\tau - u)\}, \qquad (17)$$

где $\tau \geqslant u \geqslant \tau_0$, $\tau < \infty$. Устремляя в соотношении (16) τ_0 к 0, учитывая оценки (13) и (17), заключаем, что пределы частных распределений $y_\alpha(t)$, $t \in [0, T]$ не зависят от α и совпадают с частными распределениями $x(t)$, $t \in [0, T]$. Теорема доказана.

Следствие. Случайные векторы $L^{1/2} x_\xi(L)$ слабо сходятся при $L \to \infty$ к

$$x(1) = \int_0^1 \exp\left\{ \int_s^1 [aA(x(\tau)) + 2^{-1}E]\, \tau^{-1} d\tau \right\} as^{-1/2} D dw(s).$$

Замечание 2. Если $R(t, x) = R(x)$ — гладкая не зависящая от t функция, то $A(x) = A$ и

$$x(t) = a \int_0^t \exp\{(aA + 2^{-1}E) \ln(t - s)\} s^{-1/2} D dw(s),$$

$$x(1) = \mathbf{N}\left(0, a^2 \int_0^\infty \exp\{(aA + 2^{-1}E)t\} DD' \exp\{(aA' + 2^{-1}E)t\}\, dt\right).$$

Замечание 3. Некоторые из рассуждений, использованных при доказательстве сходимости частных распределений, заимствованы из статьи [8]. В этой работе доказывалась слабая сходимость мер для одномерной дискретной процедуры Роббинса—Монро с гладкой функцией регрессии.

Замечание 4. Если не требовать перестановочности матриц A_i, $i = \overline{1, K}$, то можно утверждать, что у случайных процессов $y_L(\cdot)$ существует некоторое множество предельных точек в смысле слабой сходимости в $C^N[\tau_0, T]$ и они имеют вид (14), (15).

В заключение отметим, что основываясь на результатах книги [1], можно исследовать дискретную марковскую процедуру Роббинса—Монро с негладкой функцией регрессии.

1. *Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М., 1972. 2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970. 3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 3. М., 1975. 4. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М., 1962. 5. *Гирсанов И. В.* О стохастическом интегральном уравнении Ито.— ДАН СССР, 1961, 138, № 1. 6. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М., 1977. 7. Функциональный анализ / Под общ. ред. С. Г. Крейна. М., 1972. 8. *Анисимова З. П.* О сходимости рекуррентных процедур типа Роббинса—Монро в схеме серий.— ДАН УССР. Сер. А, 1978, № 9.

Поступила в редколлегию 10.04.79

I. Yu. Kaniovskaya

ON THE ASYMPTOTIC DISTRIBUTION OF THE ROBBINS — MONRO PROCEDURE WITH THE NONSMOOTH REGRESSION FUNCTION

The conditions of weak convergence are given for processes generated by the Markov Robbins — Monro procedure with the nondifferentiable regression function and continuous time.