УДК 519.21

А. Г. КУКУШ, студ.
Киевский университет

СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ МЕР И СХОДИМОСТЬ СЕМИИНВАРИАНТОВ

Пусть $(X; \rho)$ — метрическое пространство; $\mathrm{M}(X)$ — семейство конечных мер на борелевской σ-алгебре в X. Последовательность $\{\mu_n\}_{n\in N} \subset \mathrm{M}(X)$ слабо сходится к $\mu \in \mathrm{M}(X)$ (обозначение: $\mu_n \Rightarrow \mu$), если для каждой непрерывной и ограниченной функции $f: X \to R$ $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$. Семейство мер из $\mathrm{M}(X)$ будем называть относительно компактным, если из всякой последовательности мер из $\mathrm{M}(X)$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.

В качестве X рассмотрим пространство H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство бесконечной размерности; $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ — ортонормированный базис в H; H_0 — множество финитных векторов относительно выбранного базиса, т. е. совокупность всех конечных линейных комбинаций элементов базиса.

Мы установим связь между сходимостью семиинвариантов безгранично делимых мер в H и их слабой сходимостью. Для продакт-мер найдем оценки скорости сходимости в терминах метрики Леви—Прохорова.

1. Слабая сходимость безгранично делимых мер и сходимость семиинвариантов. Нам потребуется следующее утверждение [1, с. 114].

Предложение 1. Пусть $\mu_n \in \mathrm{M}(H)$, $n \geqslant 1$. Если:

1) для любого целого неотрицательного k и для всех $z \in H_0$ $\int (x, z)^k d\mu_n(x) \to m^{(k)}(z)$, $n \to \infty$, $m^{(k)}(z)$ конечно;

2) $\sup\limits_{n\geqslant 1} \sum\limits_{i=N}^{\infty} m_n^{(2)}(e_i) \to 0, N \to \infty$, где $m_n^{(k)}(z) \overset{\mathrm{df}}{=} \int (x, z)^k d\mu_n(x)$;

3) для всякого i класс $C\{\sqrt{m^{(2k)}(e_i)}\}$ квазианалитический, то последовательность $\{\mu_n\}$ слабо сходится к некоторой мере $\mu \in \mathrm{M}(H)$ и $m^{(k)}(z) = \int (x, z)^k d\mu(x)$, $k \geqslant 0$.

Отметим, что предложение 1 останется справедливым, если предполагать сходимость последовательностей вида $\int f d\mu_n$ только для счетного запаса функций $\Phi = \left\{\prod_{i=1}^{n} (x, e_i)^{k_i} \mid n \geqslant 1, k_i = 0, k_i \in Z\right\}$ (так называемые смешанные моменты).

В случае безгранично делимых мер удобнее оперировать семиинвариантами, поскольку они тесно связаны со структурой характеристического функционала (х. ф.) безгранично делимой меры.

Сформулируем сначала аналог предложения 1 для семиинвариантов.

Теорема 1. Пусть $\mu_n \in \mathrm{M}(\mathrm{H})$, φ_n — соответствующие х. ф., $n \geqslant 1$. Если:

1) для любого целого неотрицательного k и для всех $z \in H_0$

$$s_n^{(k)}(z) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{i^k}\left[d^k \ln \varphi_n(tz)/dt^k\right]_{t=0} \to s^{(k)}(z), \quad n \to \infty, \quad s^{(k)}(z) \text{ конечны};$$

2) $\sup\limits_{n \geqslant 1} \sum\limits_{i=N}^{\infty} m_n^{(2)}(e_i) \to 0; \; N \to \infty;$

3) для всякого i класс $C\{s^{(k)}(e_i)\}$ аналитический, т. е. найдется такая константа A_i, зависящая только от i, что для всех k $|s^{(k)}(e_i)| \leqslant A_i^k k!$, то μ_n слабо сходится к некоторой мере $\mu \in \mathrm{M}(H)$ и $s^{(k)}(z) = s_\mu^{(k)}(z)$, $k \geqslant 0$.

Доказательство. Условия теоремы 1 и предложения 1 отличаются лишь третьим пунктом. Покажем, что из третьего условия теоремы можно вывести третье условие предложения.

Первые два условия теоремы обеспечивают относительную компактность $\{\mu_n\}$ [1]. Пусть $\mu_{n'}$ — слабо сходящаяся подпоследовательность, μ — предел. Тогда $s^{(k)}(z) = s_\mu^{(k)}(z)$, $k \geqslant 0$, поскольку семиинварианты выражаются через моменты, а функции, порождающие моменты, равномерно интегрируемы относительно $\{\mu_{n'}\}$ [1], и допустим предельный переход $s_{\mu_{n'}}^{(k)} \to s_\mu^{(k)}$, $n' \to \infty$.

Из аналитичности класса $C\{S^{(k)}(e_i)\}$ следует аналитичность по t в некоторой окрестности нуля функции $\ln \varphi_\mu(te_i)$, а вместе с ней и самой х. ф. $\varphi_\mu(te_i)$, откуда вытекает не только квазианалитичность, но и аналитичность класса $C\left\{\sqrt{m^{(2k)}(e_i)}\right\}$ для произвольного i.

Рассмотрим класс безгранично делимых мер в H, обладающих «сильным моментом» второго порядка, т. е. таких мер, относительно которых $f(x) = \|x\|^2$ интегрируема. Для х. ф. этих мер справедливо следующее представление [2] — аналог одномерного представления Колмогорова:

$$\ln \varphi(z) = i(a, z) - 0{,}5(Bz, z) + \int [\exp(i(z, x)) - 1 - i(z, x)]\, dK(x)/\|x\|^2,$$

где $a \in H$, B — ядерный оператор, $K \in \mathrm{M}(H)$, $K(\{0\}) = 0$.

Класс безгранично делимых мер в $\mathrm{M}(H)$ замкнут относительно слабой сходимости [2].

Теорема 2. Пусть задана некоторая последовательность безгранично делимых мер $\mu_n \in \mathrm{M}(H)$, $n \geqslant 1$. Если:

1) для любого целого неотрицательного k и для всех $z \in H_0$ $s_n^{(k)}(z) = \frac{1}{i^k}[d^k \ln \varphi_n(tz)/dt^k]_{t=0} \to s^{(k)}(z)$, $n \to \infty$; $s^{(k)}(z)$ конечны;

2) для всякого i класс $C\{\sqrt{s^{(2k)}(e_i)}\}$ квазианалитический;

3) $\sup\limits_{n \geqslant 1} \sum\limits_{i=N}^{\infty} \int (x, e_i)^2 d\mu_n(x) \to 0$, $N \to \infty$, то последовательность $\{\mu_n\}$ слабо сходится к некоторой безгранично делимой мере μ, причем $\{s^{(k)}(z)\}$ являются соответствующими семиинвариантами меры μ.

Доказательство. Из условий следует относительная компактность $\{\mu_n\}$. Пусть μ_n' — сходящаяся подпоследовательность, μ — ее предел. В силу замкнутости класса безгранично делимых мер μ также безгранично делимая. Из условий следует, что μ_n, а также и μ обладают сильным моментом второго порядка, и для μ справедливо представление

$$\ln \varphi_\mu(tz) = it(x_0, z) - 0{,}5t^2(S_0 z, z) + \int [\exp(it(x, z)) - 1 - it(x, z)]\, dM_0(x)/\|x\|^2,$$

где $x_0 \in H$, S_0 — ядерный оператор, $M_0 \in \mathrm{M}(H)$, $M_0(\{0\}) = 0$.

Нам осталось доказать, что безгранично делимая мера, обладающая сильным вторым моментом, однозначно восстанавливается по

$$\left\{s^{(k)}(z) = \frac{1}{i^k}[d^k \ln \varphi_\mu(tz)/dt^k]_{t=0} \mid z \in H_0,\ k \in N\right\}.$$

Выразим семиинварианты через параметры представления: $s^{(1)}(z) = (x_0, z)$ (по этим значениям x_0 восстанавливается однозначно); $s^{(2)}(z) = (S_0 z, z) + \int (x, z)^2 dM_0(x)/\|x\|^2$; $s^{(k)}(z) = \int (x, z)^k dM_0(x)/\|x\|^2$, $k \geqslant 3$.

Введем новую меру, зависящую от z: $dN_z(x) = (x, z)^2 dM_0(x)/\|x\|^2$; $N_z(\{0\}) = 0$, так как $N_z \ll M_0$, $M_0(\{0\}) = 0$.

Тогда $s^{(2)}(z) = (S_0 z, z) + N_z(H)$; $s^{(k+2)}(z) = \int (x, z)^k dN_z(x)$, $k \geqslant 1$.

Пусть $\tilde{\nu}_z(u) = N_z(\cdot, z)^{-1}(u) + (S_0 z, z) P_0(u)$, $\tilde{\nu}_z \in \mathrm{M}(R)$. Тогда $s^{(2)}(z) = \tilde{\nu}_z(H)$; $s^{(k+2)}(z) = \int u^k d\tilde{\nu}_z(u)$; $(S_0 z, z) = \tilde{\nu}_z(\{0\})$.

В условиях теоремы предполагается квазианалитичность семиинвариантов только в направлении e_i. Однако из представления семиинвариантов в виде моментов меры $dM_0(x)/\|x\|^2$ будет следовать квазианалитичность и в любом финитном направлении.

Действительно, пусть $z \doteq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$,

$$\int (x, z)^{2k} dM_0(x)/\|x\|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\right)^{2k} \sum_{i=1}^{n} \int (x, e_i)^{2k} \times$$

$$\times dM_0(x)/\|x\|^2,$$

или

$$\sqrt{s^{(2k)}(z)} \leqslant A^k(z) \sum_{i=1}^{n(z)} \sqrt{s^{(2k)}(e_i)}.$$

Отсюда вытекает квазианалитичность класса $C\{\sqrt{s^{(2k)}(z)}\}$, $z \in H_0$, поскольку квазианалитичность классов $C\{d_n\}$ и $C\{f_n\}$ влечет квазианалитичность $C\{d_n + f_n\}$. Последнее утверждение следует из условия квазианалитичности Карлемана [3, с. 733].

Условие квазианалитичности обеспечивает однозначность восстановления $\tilde{\nu}_z$, $z \in H_0$ по $\{s^{(k)}(z)\}$ [3, с. 735].

По $\{\tilde{\nu}_z\}$ восстанавливается оператор S_0, а также мера $N_z(\cdot, z)^{-1}(u)$, $z \in H_0$.

Рассмотрим на $X = H \setminus \{0\}$ σ-конечную меру $dM_0(x)/\|x\|^2 = dN(x)$, $dN(x) = dN_z(x)/(x, z)^2$, и $dN(\cdot, z)^{-1}(u) = dN_z(\cdot, z)^{-1}(u)/u^2$; меру $N(\cdot, z)^{-1}$ считаем заданной на $R \setminus \{0\}$.

Итак, мы восстановили меру $N(\cdot, z)^{-1}(u)$ для $z \in H_0$; H_0 всюду плотно в H.

В представлении $\ln \varphi_\mu(tz)$ третье слагаемое равно $\int_H [\exp(it(x,z)) - 1 - it(x, z)]\, dN(x) = \int_{R \setminus \{0\}} [\exp(itu) - 1 - itu]\, dN(\cdot, z)^{-1}(u)$, и $\ln \varphi_\mu$ восстанавливается однозначно. Итак, мера не зависит от выбора сходящейся подпоследовательности μ_n'. Теорема доказана.

2. Оценка скорости сходимости продакт-мер. Пусть последовательность продакт-мер удовлетворяет условию теоремы 1. Предельную меру будем предполагать гауссовской, т. е. $g = \bigotimes_{i=1}^{\infty} g_i$, $g_i = N(a_i, \sigma_i^2)$, $\Sigma a_i^2 < \infty$, $\Sigma \sigma_i^2 < \infty$. При этом условие аналитичности предельных семиинвариантов автоматически выполняется: семиинварианты третьего порядка и выше равны 0.

Близость мер будем характеризовать метрикой Леви—Прохорова $L(\mu, \nu)$, которая метризует слабую сходимость мер. Пусть (X, ρ) — сепарабельное метрическое пространство, $\mu, \nu \in \mathrm{M}_1(X)$ — вероятностные меры,

$$L(\mu, \nu) \overset{\mathrm{df}}{=} \inf\{\varepsilon > 0 \mid \forall F \in \mathfrak{F}\ \mu(F) \leqslant \nu(F_\varepsilon) + \varepsilon,\ \nu(F) \leqslant \mu(F_\varepsilon) + \varepsilon\},$$

где $\mathfrak{F}$ — семейство всех замкнутых множеств, $F_\varepsilon = \{y: \rho(y, F) \leqslant \varepsilon\}$.

Для метрики Леви — Прохорова известны следующие оценки [4]: $L^2(\mu, \nu) \leqslant \sup |\int f d\mu - \int f d\nu| \leqslant 3L(\mu, \nu)$, где верхняя грань берется по всем непрерывным функциям, ограниченным по модулю единицей и удовлетворяющим условию Липшица с константой 1.

Пусть μ и ν — одномерные распределения, причем $M\mu = M\nu = a$; $D\mu = D\nu = \sigma^2$. Тогда $\mu(\{x: |x - a| > A\}) \leqslant \varepsilon$, $\nu(\{x: |x - a| > A\}) \leqslant \varepsilon$ при $A = \sigma/\sqrt{\varepsilon}$.

Пусть f — непрерывная функция, ограниченная по модулю единицей и удовлетворяющая условию Липшица с константой 1. Оценим разность интегралов:

$$\left|\int f d\mu - \int f d\nu\right| \leqslant 2\varepsilon + \left|\int_{a-\sigma/\sqrt{\varepsilon}}^{a+\sigma/\sqrt{\varepsilon}} f\, d(\mu - \nu)\right| \leqslant 2\varepsilon + \sum_{k=0}^{[2\sigma/\varepsilon\sqrt{\varepsilon}]} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f d\mu - f(x_k)\mu(\Delta_k)\right| + \sum_{k=0}^{[2\sigma/\varepsilon\sqrt{\varepsilon}]} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f d\nu - f(x_h)\nu(\Delta_h)\right| + \sum_{k=0}^{[2\sigma/\varepsilon\sqrt{\varepsilon}]} |\mu(\Delta_k) - \nu(\Delta_h)|,$$

где $\Delta_k = [x_k, x_{k+1})$, $x_{k+1} - x_k = \varepsilon$; $x_0 < a - \sigma/\sqrt{\varepsilon}$, $x_{[2\sigma/\varepsilon\sqrt{\varepsilon}]} > a + \sigma/\sqrt{\varepsilon}$. Далее, $\left|\int f d\mu - \int f d\nu\right| \leqslant 4\varepsilon + 2(2\sigma/\varepsilon\sqrt{\varepsilon} + 1) \sup_{(x \in R)} |F_\mu(x) - F_\nu(x)|$.

Последняя оценка справедлива для любого положительного ε. Минимизируя функцию $h(\varepsilon) = \varepsilon + B/\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$, где $B = \sigma \sup_{(x \in R)} |F_\mu(x) - F_\nu(x)|$, получаем $L^2(\mu, \nu) \leqslant C_1 B^{2/5} + C_2 B/\sigma$, где C_1, C_2 — некоторые числовые константы, от мер μ и ν не зависящие.

В одномерном случае известна следующая оценка близости функций распределения через близость их семиинвариантов. Это так называемая лемма Статулявичуса [5].

Предложение 2. Пусть $\mu \in \mathrm{M}_1(R)$, $M\mu = 0$, $D\mu = 1$, $|s_\mu^{(k)}| \leqslant k! \times H/\Delta^k$, $k \geqslant 3$, Φ — функция распределения гауссовской $N(0, 1)$ меры. Тогда $\sup_{(x \in R)} |F(x) - \Phi(x)| \leqslant C(H + 1)/\Delta$, где C не зависит от μ.

Если считать $M\mu = a$, $D\mu = \sigma^2$, Φ — функцией распределения гауссовской $N(a, \sigma^2)$ меры, то правая часть неравенства примет вид $C(H + 1)/(\Delta\sigma)$. В этом случае мы получим следующую оценку метрики Леви — Прохорова: $L^2(\mu, \nu) \leqslant C_3(B^{2/5} + B/\sigma)$, где $B = (H + 1)/\Delta$.

Пусть $\mu = \otimes\mu_i$, $g = \otimes g_i$; $\mu, g \in \mathrm{M}_1(H)$; $\mu_i, g_i \in \mathrm{M}_1(R)$. Оценим $\angle(\mu, g)$ через $\angle(\mu_i, g_i)$. Очевидно, $\angle(\mu, g) \leqslant \angle\left(g, \bigoplus_{i=1}^{n} g_i \otimes \bigotimes_{j=n+1}^{\infty} \mu_j\right) +$

$+\angle\left(\bigotimes_{i=1}^{n} g_i \otimes \bigotimes_{j=n+1}^{\infty} \mu_j, \mu\right)$. Первое слагаемое стремится к 0, $n\to\infty$, так как конечномерные распределения последовательности $\tau_n = \bigotimes_{i=1}^{n} g_i \otimes \bigotimes_{j=n+1}^{\infty} \mu_j$ сходятся к соответствующим конечномерным распределениям g, а предкомпактность $\{\tau_n\}$ очевидна.

Итак, $\angle(\mu, g) \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \angle(\tau_n, \mu)$. Обозначим $\mu^{(n)} = \bigotimes_{j=n+1}^{\infty} \mu_j$.

Пусть

$$F\in\mathfrak{F},\ \tau_n(F_n) = \int\limits_T d\mu^{(n)} \int\limits_{F_{x_{n+1},x_{n+2},\dots}} d\left(\bigotimes_{i=1}^{n} g_i\right) = \int\limits_T \bigotimes_{i=1}^{n} g_i \left(F_{x_{n+1},x_{n+2},\dots}\right)\times$$

$\times d\mu^{(n)}(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$. Здесь T — гильбертово пространство, натянутое на $\{e_i\}_{i=n+1}^{\infty}$, $F_{x_{n+1},x_{n+2},\dots}$ — сечение F при постоянных координатах $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$ относительно базиса $\{e_i\}$ (сечение — замкнутое множество). Аналогичная формула справедлива для $\tau_n(F_\varepsilon)$; $(F_\varepsilon)_{x_i} \supset (F_{x_i})_\varepsilon$, где $(F_{x_i})_\varepsilon$ — замкнутая ε-окрестность множества F_{x_i} в индуцированном метрическом пространстве. Отсюда легко заключить, что $L(\tau_n, \mu) \leqslant L\left(\bigotimes_{i=1}^{n} g_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i\right)$. Итак,

$$L(\mu, g) \leqslant \lim_{n\to\infty} L\left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i, \bigotimes_{i=1}^{n} g_i\right),$$

$$L\left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i, \bigotimes_{i=1}^{n} g_i\right) \leqslant L\left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i, \bigotimes_{i=1}^{n-1} \mu_i \otimes g_n\right) +$$

$$+ L\left(\bigotimes_{i=1}^{n-1} \mu_i \otimes g_n, \bigotimes_{i=1}^{n-2} \mu_i \otimes g_{n-1} \otimes g_n\right) + \dots + L\left(\mu_1 \otimes \bigotimes_{i=2}^{n} g_i, \bigotimes_{i=1}^{n} g_i\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} L(\mu_i, g_i).$$

Окончательно $L(\mu, g) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} L(\mu_i, g_i)$.

Теперь можно сформулировать следующий результат.

Теорема 3. Пусть μ — вероятностная продакт-мера в H, $\mu = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mu_i$; $g = \bigotimes_{i=1}^{\infty} N(a_i, \sigma_i^2)$, $M\mu_i = a_i$, $D\mu_i = \sigma_i^2$, все μ_i обладают моментами любых порядков, причем для любого i и для всех $k \geqslant 3$ $|s_i^{(k)}| \leqslant k! \times$

$\times ! H_k/\Delta_i^k$, $s_i^{(k)}$ k-й—семиинвариант μ_i. Тогда $\angle(\mu, g) \leqslant C \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sqrt{B_i^{2/5} + B_i/\sigma_i}$,

где $B_i = (H_i + 1)/\Delta_i$; C — константа, от μ и g не зависящая.

Отметим, что правая часть неравенства конечна в случае сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty}[(H_i+1)/(\Delta_i\sigma_i)]^{2/9}$, а это эквивалентно сходимости рядов $\sum_{i=1}^{\infty}[H_i/(\Delta_i\sigma_i)]^{2/9}$ и $\sum_{i=1}^{\infty}(\Delta_i\sigma_i)^{-2/9}$. Сделав Δ_i достаточно большим, а отношение H_i/Δ_i достаточно малым, можно правую часть неравенства сделать меньше любого наперед заданного $\varepsilon>0$.

Автор выражает благодарность А. Я. Дороговцеву за постоянное внимание к работе.

1. *Кукуш А. Г.* Слабая сходимость мер и сходимость моментов.— В кн.: Вероятностные распределения в бесконечномерных пространствах. Киев, 1978. 2. *Parthasarathy K. R.* Probability measures on metric spaces. New York—London, 1967. 3. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965. 4. *Dadley R. M.* Distances of probability measures and random variables.— Ann. Math. Statist., 1968, 39, N 5. 5. *Рудзкис Р.* О лемме Статулявичуса.— Литовский математический сборник, 1977, 17, № 2.

Поступила в редколлегию 27.05.79

A. G. Kukush

WEAK CONVERGENCE OF MEASURES AND CONVERGENCE OF SEMIINVARIANTS

The connection of weak convergence of infinitely divisible measures in a Hilbert space and semi-invariants' convergence has been considered. Some estimations for product-measures in terms of Levy—Prokhorov's distance and one-dimensional semi-invariants are obtained.