УДК 519.21

Н. Н. ЛЕОНЕНКО, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

О ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ ОЦЕНОК КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

В настоящей работе доказаны теоремы о сходимости вероятностных мер, порожденных оценками наименьших квадратов коэффициентов линейной регрессии случайного поля с дискретным параметром в пространстве непрерывных функций от n переменных с равномерной топологией, а также в пространстве функций от n переменных без разрывов второго рода с топологией, родственной топологии Скорохода, к мере, порожденной в вышеупомянутых пространствах винеровским случайным полем. Полученные результаты при $n = 1$ примыкают к результатам работ [1—5], однако их можно трактовать и как усиление утверждений об асимптотической нормальности оценок коэффициентов регрессии (см., например, работы [6—8] для $n = 1$ и [9] для $n \geqslant 1$) до теорем о сходимости вероятностных мер. Для случайных полей с независимыми значениями принцип инвариантности изучался в статьях [10—11] и др., а при условиях перемешивания — в работах [12—14] и др. Многочисленные работы посвящены центральной предельной теореме для случайных полей (см., например, [15—17]).

1. **Основные предположения.** Введем Z^n — пространство целочисленных точек n-мерного евклидового пространства R^n с покоординатными линейными операциями и следующей нормой: $\|x\| = \max\{|x_i|, i=\overline{1,n}\}, x=(x_1 x_2, \ldots, x_n) \in Z^n$. Для конечного подмножества I пространства Z^n символом $|I|$ обозначим число точек множества I. Пусть $T, F \in Z^n, \Delta = \Delta[F, T] = \{x \in Z^n : F_i \leqslant x_i \leqslant T_i - 1\}, |\Delta| = \prod_{i=1}^{n} (T_i - F_i)$. Символом $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ обозначим основное вероятностное пространство. Предположим, что при $x \in \Delta = \Delta[F, T]$ наблюдается случайное поле

$$\xi(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \theta_k(x) + \varepsilon(x), \qquad (1)$$

где $a = [a_1, \ldots, a_N]'$ — неизвестный вектор-столбец коэффициентов регрессии, который необходимо оценить на основании результатов наблюдения $\{\xi(x), x \in \Delta\}$; известный вектор-столбец функций регрессии $\theta(x) = [\theta_1(x), \ldots, \theta_N(x)]'$ и действительное случайное поле $\varepsilon(x) = \varepsilon(\omega, x), \omega \in \Omega, x \in Z^n$ с $M\varepsilon(x) = 0$ подчинены ограничениям, указанным ниже.

Пусть $Q_\Delta^2 = \sum_{x \in \Delta} \theta'(x)\theta(x), S_\Delta = S(F, T) = \sum_{x \in \Delta} \theta(x)\xi(x)$. Тогда вектор-столбец наименьших квадратов $\widehat{a}(\Delta) = Q_\Delta^{-2} S_\Delta$ при широких предположениях [9] является состоятельной и асимптотически нормальной оценкой параметра a при $|\Delta| \to \infty$.

Замечание 1. Если $F = 0$, то будем употреблять обозначения $Q^2(T) = Q^2(T_1, \ldots, T_n) = Q_\Delta^2, S(T) = S(0, T), \widehat{a}(T) = \widehat{a}(\Delta)$.

Обозначим символом σ_Δ^2 корреляционную матрицу оценок $\widehat{a}(\Delta)$ и рассмотрим диагональную матрицу $\widetilde{Q}_\Delta = \operatorname{diag}[q_k(\Delta)]_{k=\overline{1,N}}, q_k(\Delta) = \left[(2\pi)^n \sum_{x \in \Delta} |\theta_k^*(x)|^2\right]^{1/2}$.

A. Пусть $\varepsilon(x), x \in Z^n$ — случайное поле с $M\varepsilon(x) = 0, M\varepsilon^2(x) < \infty$, такое, что при $|\Delta| \to \infty$ существует предел $\lim \widetilde{Q}_\Delta \sigma_\Delta^2 \widetilde{Q}_\Delta = \sigma^2$, причем матрица σ^2 невырождена.

В дальнейшем символами c, c_i обозначены константы, не всегда одни и те же.

B. Пусть $\min\{N_i, i=\overline{1,n}\}\to\infty, N_i = T_i - F_i$.

B_1. Пусть выполнено B и $|N_i N_j^{-1}| < c; i, j = \overline{1,n}$.

Приведем комплекс условий, гарантирующих выполнение условия A для широкого класса однородных полей.

A_1. Пусть $\varepsilon(x), x\in Z^n$ — однородное в узком смысле случайное поле с $M\varepsilon(x)=0$, абсолютно непрерывным спектром и спектральной плотностью $f(\lambda), \lambda\in\Pi=\{x\in R^n: -\pi\leqslant\lambda_j\leqslant\pi, j=\overline{1,n}\}$.

При условии A_1 для корреляционной матрицы σ^2_Δ оценок $\widehat{a}(\Delta)$ можно получить [9] представление

$$\widetilde{Q}_\Delta\sigma^2_\Delta\widetilde{Q}_\Delta=(2\pi)^{2n}\int\limits_\Pi f(\lambda)\cdot\mu_\Delta(d\lambda). \tag{2}$$

В формуле (2) $\mu_\Delta(d\lambda)=(\mu_{kj}(\Delta)\,d\lambda)_{k=\overline{1,N}}^{j=\overline{1,N}}$ — матричная спектральная мера [7 — 9] с матрицей плотности $\mu_{kj}(\Delta)=\theta_\Delta^{(k)}(\lambda)\overline{\theta_\Delta^{(j)}(\lambda)}\Big/$ $\left[\int\limits_\Pi|\theta_\Delta^{(k)}(\lambda)|^2d\lambda\int\limits_\Pi|\theta_\Delta^{(j)}(\lambda)|^2d\lambda\right]^{1/2}$, где $\theta_\Delta^{(k)}(\lambda)=\sum\limits_{x\in\Delta}\theta_k(x)\exp\{-i\langle\lambda,x\rangle\}$.

Будем говорить, что существует спектральная мера $\mu(d\lambda)$ функции регрессии $\theta(x)$, если при $\Delta\to\infty$ меры $\mu_\Delta(d\lambda)$ слабо сходятся к некоторой предельной мере $\mu(d\lambda)$, т. е. для любой непрерывной функции $g(\lambda)$

$$\int\limits_\Pi g(\lambda)\,\mu_\Delta(d\lambda)\to\int\limits_\Pi g(\lambda)\,\mu(d\lambda) \tag{3}$$

и матрица $\int\limits_\Pi\mu(d\lambda)$ невырождена.

Если спектральная плотность $f(\lambda)$ ограничена и непрерывна, то из (2) следует, что при $|\Delta|\to\infty$

$$\lim\widetilde{Q}_\Delta\sigma^2_\Delta\widetilde{Q}_\Delta=(2\pi)^{2n}\int\limits_\Pi f(\lambda)\,\mu(d\lambda)=\sigma^2. \tag{4}$$

A_2. Пусть выполнено условие A_1, существует спектральная мера $\mu(\cdot)$ функции регрессии $\theta(x)$ и спектральная плотность $f(\lambda)$ непрерывна, ограничена и положительно определена на множестве положительной $\mu(\cdot)$-меры.

Ясно, что условие A_2 является важным частным случаем условия A.

$$C.\ \sup_{x\in\Delta}|\theta_k(x)|/q_k(\Delta)\leqslant c|\Delta|^{-1/2};\ Q^2(k)\asymp Q^{-2(n-1)}(T)\prod_{l=1}^{n}Q^2(T_1,\ldots,k_i,\ldots,T_n).$$

Ниже будут использованы некоторые условия слабой зависимости случайных полей [15—17].

Обозначим символом $\mathfrak{R}(V)$ σ-алгебру, порожденную системой случайных величин $\{\varepsilon(x), x \in V \subset Z^n\}$, а символом $d(U, V) = \inf\{\|x - y\|, x \in U, y \in V\}$ — расстояние между множествами U и V из Z^n. Для подмножеств U и V пространства Z^n таких, что $U \cap V = \varnothing$, обозначим $\alpha(U, V) = \sup\{|P(AB) - P(A)P(B)|, A \in \mathfrak{R}(U), B \in \mathfrak{R}(V)\}$ — розенблаттовский коэффициент связи между двумя σ-алгебрами $\mathfrak{R}(U)$ и $\mathfrak{R}(V)$.

Выражение $\sup \alpha(U, V)$ будем обозначать символом $\alpha(r)$, если верхняя грань берется по всем парам множеств U и V, таким, что расстояние $d(U, V) \geqslant r$.

D_1. Будем говорить, что поле $\varepsilon(x), x \in Z^n$ удовлетворяет условию сильного перемешивания, если $\alpha(r) \to 0$ при $r \to \infty$.

Пусть I, V — конечные подмножества Z^n, такие, что $I \cap V = \varnothing$. Обозначим символом $\varphi(I, V) = \sup\{|P(A/B) - P(A)|, A \in \mathfrak{R}(I), B \in \mathfrak{R}(V), P(B) > 0\}$ коэффициент связи Ибрагимова. Пусть функция $\varphi_I(d), d \geqslant 0$ такова, что $\varphi_I(d) \to 0$ при $d \to \infty$ и фиксированном I.

D_2. Будем говорить, что поле $\varepsilon(x), x \in Z^n$ удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания, если при любых конечных $I, V, I \cap V = \varnothing$ имеет место неравенство $\varphi(I, V) \leqslant \varphi_I(d(I, V))$.

E_1. Пусть $|\varepsilon(x)| \leqslant c < \infty$, выполнено D_1, причем $\sum_{r=1}^{\infty} r^{2n-1}\alpha(r) < \infty$.

E_2. Пусть для некоторого $\delta > 0$ $M|\varepsilon(x)|^{2+\delta} < \infty$ выполнено D_1 и $\sum_{r=1}^{\infty} r^{2n-1}\{\alpha(r)\}^{\delta/(2+\delta)} < \infty$.

E_3. Пусть $M\varepsilon^2(x) < \infty$, выполнено D_2, причем $\varphi_I(d) \leqslant |I|\varphi(d)$, $\sum_{d=1}^{\infty} d^{2n-1}\varphi^{1/2}(d) < \infty$.

2. Формулировка основных результатов. Пусть $K = \mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n} [0, 1]_i \subset R^n$ — единичный куб в R^n, а $(C, \mathfrak{C})$ — пространство непрерывных функций $z: K \to R^N$ с равномерной топологией $\mathfrak{C}$, задаваемой метрикой $\rho_C(z, u) = \sup\{\|z(t) - u(t)\|, t \in K\}$.

Будем придерживаться обозначений, определяемых замечанием 1.

Рассмотрим оценку $\hat{a}(T) = Q^{-2}(T)S(T)$. При условии B_2 для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ разобьем грань $[0, 1]_i$ куба K точками $t^{(i)}(k_i, T_i)$, $k_i \in \{1, 2, \ldots, T_i\}$ вида

$$t^{(i)}(k_i, T_i) = Q^2(T_1, \ldots, T_{i-1}, k_i, T_{i+1}, \ldots, T_n)\, Q^{-2}(T_1, \ldots, T_n). \quad (5)$$

Это разбиение индуцирует разбиение всего куба K на дизъюнктивные параллелепипеды $\pi(k)=\pi(k_1,\ldots,k_n)=\bigtimes_{i=1}^{n}[t^{(i)}(k_i,T_i),t^{(i)}(k_i+1,T_i))$, $k_i\in\{1,2,\ldots,T_i\}$, $i=\overline{1,n}$. Построим, далее, непрерывную ломаную гиперповерхность $X_T(t)$, $t\in K$ в $K\times R^N$ следующим образом: $X_T(t)=0$, если $t_i=0$ хотя бы для одного $i\in\{1,2,\ldots,n\}$; при $t=t_{k,T}=(t^{(i)}(k_i,T_i),\ i=\overline{1,n})$ положим

$$X_T(t)=Q^2(k)\,Q^{-1}(T)\,(\hat{a}(k)-a), \tag{6}$$

а в остальных точках $X_T(t)$, $t\in K$ строим при помощи линейной интерполяции, т. е. при $x\in\pi(k)$ каждая компонента $X_T(t)$ состоит из кусков гиперплоскостей, проходящих через значения этой компоненты $X_T(\cdot)$ в вершинах $\pi(k)$ и расположенных таким образом, чтобы полученная гиперповерхность была однозначной и непрерывной. Пусть $\{P_T\}$ — семейство вероятностных мер в пространстве $(C,\mathfrak{C})$, индуцируемых случайными полями $X_T(t)$, $t\in K$.

Следуя работам [10, 18, 19], рассмотрим еще пространство $(D,\mathfrak{D})$ функций $v:K\to R^N$ без разрывов второго рода с топологией $\mathfrak{D}$, задаваемой в D следующей метрикой. Пусть $\lambda_i(t_i)$, $i=\overline{1,n}$ — непрерывные монотонно возрастающие отображения отрезка $[0,1]_i$ на самого себя, $\lambda_i(0)=0$, $\lambda_i(1)=1$, $i=\overline{1,n}$, $\Lambda_K=\{\lambda(t)=(\lambda_i(t_i),\ i=\overline{1,n})\}$. Для пары функций $u,v:K\to R^N$, не имеющих разрывов второго рода, рассмотрим метрику*) $\rho_D(u,v)=\inf\{\sup\{\|v(t)-u(\lambda(t))\|,\ t\in K\}+\sup\{\|t-\lambda(t)\|,\ t\in K\},\ \lambda\in\Lambda_K\}$, которая и задает топологию $\mathfrak{D}$ в пространстве D.

Рассмотрим, далее, случайные элементы в $(D,\mathfrak{D})$, связанные с оценками $\hat{a}(T)$. Построим случайные поля $Y_T(t)$, $t\in K$ в $(D,\mathfrak{D})$ следующим образом: $Y_T(t)=0$, если $t_i=0$ хотя бы для одного $i\in\{1,\ldots,n\}$; $Y_T(t)=Q^2(k)\,Q^{-1}(T)\,(\hat{a}(k)-a)$, если $t=\{t^{(i)}(k_i,T_i),\ i=\overline{1,n}\}$, где $t^{(i)}(k_i,T_i)$ определяются по (5). В остальных точках $x\in\pi(k)$ для построения $Y_T(t)=(Y_T^{(j)}(t),\ j=\overline{1,N})'$ положим $Y_T^{(j)}(t)$ равным произвольному числу m_j, заключенному между величинами $Y_T^{(j)}(t^{(i)}(k_i,T_i),\ i=\overline{1,n})$ и $Y_T^{(j)}(t^{(i)}(k_i+1,T_i),\ i=\overline{1,n})$ для всех $j=\overline{1,N}$. Обозначим символом P_T' вероятностные меры, индуцируемые полями $Y_T(t)$, $t\in K$ в пространстве $(D,\mathfrak{D})$.

Рассмотрим над основным вероятностным пространством $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ многомерное винеровское поле в смысле Ченцова [20], т. е. такое гауссовское поле $w(\omega,t)=(w_1(t),\ldots,w_N(t))'$, которое подчинено следующим аксиомам: 1) $w(t)=0$ при $t_i=0$ хотя бы для одного $i\in\{1,\ldots,n\}$, 2) смешанные разности

$$\delta_W^{(n)}[s,t]=\sum_{\nu}(-1)^{|\nu|}\,w(t_i-\nu_i(t_i-s_i),\ i=\overline{1,n}) \tag{7}$$

*) Определение отсутствия разрывов второго рода функций нескольких переменных можно найти, например, в работах [10, 18, 19].

имеют многомерное нормальное распределение с нулевым средним и корреляционной матрицей $\sigma^2 \prod_{i=1}^{n} |t_i - s_i|$ для любых $t, s \in K$, где матрица σ^2 определяется условием A (или формулой (4), если выполнено A_2), запись $\sum_{\nu} \ldots$ в (7) означает, что суммирование распространяется на все возможные значения булевого вектора $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, а $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_n$; 3) смешанные разности вида (7), посчитанные по непересекающимся параллелепипедам из K, являются независимыми случайными векторами.

Обозначим символом W вероятностную меру в пространстве $(C, \mathfrak{C})$ и $(D, \mathfrak{D})$, индуцируемую случайным полем $w(\omega, t): \Omega \times K \to R^N$.

Нас будут интересовать условия, при которых имеет место слабая сходимость мер P_T и P'_T к мере W в пространствах $(C, \mathfrak{C})$ и $(D, \mathfrak{D})$ соответственно:

$$P_T \overset{\mathfrak{C}}{\Rightarrow} W, \quad P'_T \overset{\mathfrak{D}}{\Rightarrow} W. \tag{8}$$

Теорема 1. Если в схеме (1) выполнены предположения A, B, C и E_1, то имеет место слабая сходимость мер (8).

Теорема 2. Если выполнены предположения A, B, C и E_2, то имеет место (8).

Теорема 3. Если выполнены предположения A, B_1, C, E_3, то имеет место (8).

Замечание 2. Теоремы 1—3 могут быть переформулированы в виде принципа инвариантности для действительных случайных полей. Именно, если $\eta(x)$ — действительное случайное поле, центрированное своим математическим ожиданием, то положим $S(T) = \sum_{x \in \Delta[0,T]} \eta(x)$, $Q^2(T) = DS(T)$ и определим поля $X_T(t)$ и $Y_T(t)$ в пространствах $(C, \mathfrak{C})$ и $(D, \mathfrak{D})$ соответственно по вышеприведенным схемам, изменив их значения в точках t вида (5) на следующие: $X_T(t) = Y_T(t) = Q^{-1}(T) S(k)$. Тогда из теорем 1—3 вытекает $P_T \overset{\mathfrak{C}}{\Rightarrow} W$ и $P'_T \overset{\mathfrak{D}}{\Rightarrow} W$. Таким образом, из теоремы 2 следует, в частности, теорема, аннонсированная в работе [14].

3. **Моментные неравенства.** Сформулируем вначале некоторые утверждения.

Лемма 1 (см. [21, с. 388]). Пусть случайное поле $\varepsilon(x)$ удовлетворяет условию D_1, а случайные величины ξ и η измеримы относительно σ-алгебр $\mathfrak{N}(V)$ и $\mathfrak{N}(W)$ соответственно $(U, V \subset Z^n$, $U \cap V = \varnothing)$, причем $|\xi| \leqslant c_1 < \infty$, $|\eta| \leqslant c_2 < \infty \pmod P$.

Тогда $|M\xi\eta - M\xi M\eta| \leqslant 4c_1c_2\alpha(d(U, V))$.

Лемма 2 (см. [1]). Пусть случайное поле $\varepsilon(x)$, $x \in Z^n$ удовлетворяет условию D_1, а случайные величины ξ и η измеримы относительно σ-алгебр $\mathfrak{N}(U)$ и $\mathfrak{N}(V)$ соответственно ($U \cap V \doteq \varnothing$), причем $M|\xi|^p < \infty$, $M|\eta|^q < \infty$ для некоторых $p > 1$, $q > 1$, таких, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$.

Тогда

$$|M\xi\eta - M\xi M\eta| \leqslant 12\{M|\xi|^p\}^{\frac{1}{p}}\{M|\eta|^q\}^{\frac{1}{q}}\{\alpha(d(U, V))\}^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Лемма 3 (см. [21, с. 392]). Пусть случайное поле $\varepsilon(x)$, $x \in Z^n$ удовлетворяет условию D_2, а случайные величины ξ и η измеримы относительно σ-алгебр $\mathfrak{N}(I)$ и $\mathfrak{N}(V)$ соответственно ($I \cap V = \varnothing$), причем для некоторых $p > 1$ и $q > 1$ таких, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $M|\xi|^p < \infty$, $M|\eta|^q < \infty$.

Тогда

$$|M\xi\eta - M\xi M\eta| \leqslant 2\{\varphi_I(d(I, V))\}^{\frac{1}{p}}\{M|\xi|^p\}^{\frac{1}{p}}\{M|\eta|^q\}^{\frac{1}{q}}.$$

Лемма 4. Если случайное поле $\varepsilon(x)$ с $M\varepsilon(x) = 0$ удовлетворяет условию E_1, то для любой действительной функции $\theta(x) \in R^1$ имеет место неравенство

$$M\left(\sum_{x\in\Delta}\theta(x)\varepsilon(x)\right)^4 \leqslant c\left(\sum_{x\in\Delta}\theta^2(x)\right)^2.$$

Лемма 5. Пусть случайное поле $\varepsilon(x)$, $x \in Z^n$, $M\varepsilon(x) = 0$ такое, что существует $M|\varepsilon(x)|^{m+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$ и $m \geqslant 2$. Если, кроме того, поле $\varepsilon(x)$ удовлетворяет условию D_1, причем $\sum_{r=1}^{\infty} r^{\frac{nm}{2}-1}\{\alpha(r)\}^{\delta/(m+\delta)} < \infty$, то

$$M\left(\sum_{x\in\Delta}\theta(x)\varepsilon(x)\right)^m \leqslant c_m\left(\sum_{x\in\Delta}\theta^2(x)\right)^{\frac{m}{2}}. \qquad (9)$$

Лемма 6. Пусть случайное поле $\varepsilon(x)$, $x \in Z^n$, $M\varepsilon(x) = 0$ такое, что существует $M|\varepsilon(x)|^m < \infty$ для некоторого $m \geqslant 2$. Если выполнено D_2, причем $\varphi_I(d) \leqslant |I|\varphi(d)$, $\sum_{d=1}^{\infty} d^{\frac{nm}{2}-1}\{\varphi(d)\}^{\frac{1}{m}} < \infty$, то имеет место оценка (9).

Доказательство леммы 5. Рассмотрим случай $m = 4$. Имеем

$$M\left(\sum_{x\in\Delta}\theta(x)\varepsilon(x)\right)^4 = \sum_{x\in\Delta}\theta^4(x)M\varepsilon^4(x) + \sum_{x\neq y}\theta^2(x)\theta^2(y) \times$$

$$\times M\varepsilon^2(x)\,\varepsilon^2(y)+\sum_{x\neq y}\theta^3(x)\,\theta(y)\,M\varepsilon^3(x)\,\varepsilon(y)+\sum_{x\neq y\neq z}\theta^2(x)\,\theta(y)\,\theta(z)\times$$

$$\times M\varepsilon^3(x)\,\varepsilon(y)\,\varepsilon(z)+\sum_{x\neq y\neq z\neq u}\theta(x)\,\theta(y)\,\theta(z)\,\theta(u)\,M\varepsilon(x)\,\varepsilon(y)\,\varepsilon(z)\,\varepsilon(u). \tag{10}$$

Оценим слагаемые в (10). Рассмотрим третью сумму в (10). Применяя лемму 2 с $p=(4+\delta)/3$, $q=4+\delta$, получаем

$$\left|\sum_{x\neq y}\theta^3(x)\,\theta(y)\,M\varepsilon^3(x)\,\varepsilon(y)\right|\leqslant c_1\left|\sum_{x\neq y}|\theta^3(x)|\,|\theta(y)|\times\right.$$

$$\times\{M|\varepsilon^3(x)|^{\frac{4+\delta}{3}}\}^{\frac{3}{4+\delta}}\{M|\varepsilon(y)|^{4+\delta}\}^{\frac{1}{4+\delta}}\{\alpha(\|x-y\|)\}^{\frac{\delta}{4+\delta}}\leqslant$$

$$\leqslant c_2\left|\sum_{x\neq y}(\theta^4(x)+\theta^2(x)\,\theta^2(y))\{\alpha(\|x-y\|)\}^{\frac{\delta}{4+\delta}}\leqslant\right.$$

$$\leqslant c_3\left[\sum_{x\in\Delta}\theta^4(x)\sum_{s\in Z^n\setminus\{0\}}\{\alpha(\|z\|)\}^{\frac{\delta}{4+\delta}}+\sum_{x\neq y}\theta^2(x)\,\theta^2(y)\{\alpha(\|x-y\|)\}^{\frac{\delta}{4+\delta}}\leqslant\right.$$

$$\leqslant c_4\left[\sum_{x\in\Delta}\theta^4(x)+\sum_{x\neq y}\theta^2(x)\,\theta^2(y)\right]\leqslant c_5\left(\sum_{x\in\Delta}\theta^2(x)\right)^2. \tag{11}$$

Рассмотрим четвертую сумму из (10). Пусть $\Omega_1=\{(x,y,z):x\neq y\neq z,\ \|x-y\|\geqslant\|x-z\|\geqslant\|z-y\|\}$,

$$\left|\sum_{\Omega_1}\theta^2(x)\,\theta(y)\,\theta(z)\,M\varepsilon^2(x)\,\varepsilon(y)\,\varepsilon(z)\right|\leqslant c_1\sum_{\Omega_1}\theta^2(x)\,|\theta(y)|\,|\theta(z)|\times$$

$$\times\{M|\varepsilon^2(z)\,\varepsilon(z)|^{\frac{4+\delta}{3}}\}^{\frac{3}{4+\delta}}\{M|\varepsilon(y)|^{4+\delta}\}^{\frac{1}{4+\delta}}\{\alpha(\|y-z\|)\}^{\frac{\delta}{4+\delta}}\leqslant$$

$$\leqslant c_2\sum_{\Omega_1}(\theta^2(x)\,\theta^2(y)+\theta^2(x)\,\theta^2(z))\,(\alpha(\|y-z\|))^{\frac{\delta}{4+\delta}}\leqslant$$

$$\leqslant c_3\sum_{x\neq y}\theta^2(x)\,\theta^2(y)\sum_{u\in Z^n\setminus\{0\}}\{\alpha(\|u\|)\}^{\frac{\delta}{4+\delta}}\leqslant c_4\left(\sum_{x\in\Delta}\theta^2(x)\right)^2. \tag{12}$$

Подобным образом оценивается четвертая сумма в (10) и в случае других вариантов линейного порядка между $\|x-z\|$, $\|x-y\|$, $\|y-z\|$.

Рассмотрим оценку пятой суммы в (10). Пусть $\Omega_2=\{x\neq y\neq z\neq u: d(\{x\},\ \{y,z,u\})\geqslant d(y,z),\ d(z,u),\ d(y,u),\ d(x,y)<d(x,u),\ d(x,y)<d(x,z)\}$. Тогда

$$\left|\sum_{\Omega_2}\theta(x)\,\theta(y)\,\theta(z)\,\theta(u)\,M\varepsilon(x)\,\varepsilon(y)\,\varepsilon(z)\,\varepsilon(u)\right|\leqslant c_1\sum_{\Omega_3}[\theta^2(x)\,\theta^2(y)+$$

$$+ \theta^2(z)\,\theta^2(u)]\,\{\alpha(\|x-y\|)\}^{\frac{\delta}{4+\delta}} \leqslant c_2 \left(\sum_{x\in\Delta}\theta^2(x)\right)^2 \times$$

$$\times \left\{1+\sum_{r=1}^{\infty} r^{2n-1}\{\alpha(r)\}^{\frac{\delta}{4+\delta}}\right\} \leqslant c_3 \left(\sum_{x\in\Delta}\theta^2(x)\right)^2. \qquad (13)$$

В других случаях расположения точек x, y, z, u рассуждения аналогичны предыдущим. Таким же образом можно получить оценки остальных сумм в (10). Подставив оценки (11)—(13) в (10), получим (9) при $m = 4$.

В общем случае идея выбора «оптимальной» оценки сохраняется и (9) может быть доказано индукцией по m:

$$M\left|\sum_{x\in\Delta}\theta(x)\,\varepsilon(x)\right|^m = \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_m=m\\ n_i\geqslant 0,\ i=\overline{1,m}}} m!\left[\prod_{i=1}^{m} n_i!\right]^{-1} \times$$

$$\times \sum_{n_i\neq x_j,\ i\neq j}\ \prod_{i=1}^{m}\theta^{n_i}(x_i)\,M\prod_{i=1}^{m}\varepsilon^{n_i}(x_i). \qquad (14)$$

Рассмотрим слагаемое в (14), соответствующее случаю $n_1 = \ldots = n_m = 1$. Если $\min\{\|x_m - x_j\|,\ j=\overline{1, m-1}\} = \|x_m - x_r\|$, то исходя из предположений индукции, указанное слагаемое мажорируется по лемме 2 выражением

$$\left|\sum_{\substack{x_i\neq x_j\\ i\neq j}}\theta(x_m)\prod_{i=1}^{m-1}\theta(x_i)\,M\varepsilon(x_m)\prod_{i=1}^{m-1}\varepsilon(x_i)\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_1\sum_{x_i\neq x_j}[\theta^2(x_m)+\theta^2(x_r)]\prod_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{m-1}\theta(x_i)\times$$

$$\times\{\alpha(\|x_m - x_r\|)\}^{\frac{\delta}{m+\delta}} \wedge M\prod_{i=1}^{m-1}\varepsilon(x_i) \leqslant c_2\left(\sum_{x\in\Delta}\theta^2(x)\right)^{\frac{m}{2}}.$$

Подобным образом оцениваются и другие слагаемые в (15).

Леммы 4 и 6 доказываются аналогично лемме 5 с использованием лемм 1 и 3 вместо леммы 2.

4. Обоснование результатов пункта 2. Сформулируем еще ряд утверждений.

Лемма 7. Пусть выполнены предположения A, C, D_1, причем $M|\varepsilon(x)|^{2+\delta} < \infty$, $\alpha(r) = O(r^{-n-\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$, $\varepsilon\delta > 2n$. Тогда величина $Q_\Delta(\hat{a}(\Delta) - a)$ имеет асимптотически многомерное нормальное распределение с параметрами $(0, \sigma^2)$, где матрица σ^2 определяется условием A.

Лемма 8. Пусть выполнены предположения А, B_1, С, D_2, причем $\varphi_I(d) \leqslant |I| \varphi(d)$, $\sum_{d=1}^{\infty} d^{n-1} \varphi^{\frac{1}{2}}(d) < \infty$. Тогда имеет место утверждение леммы 7.

Доказательство лемм 7 и 8 вытекает из работ [9, 17].

Лемма 9. Пусть выполнены предположения лемм 7 или 8. Тогда конечномерные распределения полей $X_T(t)$ и $Y_T(t)$ сходятся к конечным распределениям поля $w(t)$, $t \in K$.

Доказательство леммы 9 проводится методом характеристических функций.

Лемма 10. Пусть в схеме (1) $N=1$ и $Q^2(T) = \sum_{x \in \Delta} \theta^2(x)$. Если выполнены предположения А, В, D_1 с функцией $\alpha(r)$ такой, что $\sum_{r=1}^{\infty} r^{n-1} \{\alpha(r)\}^{\delta/(2+\delta)} < \infty$ $\left(\text{или условие } D_2, \text{ причем } \varphi_I(d) \leqslant |I| \varphi(d), \sum_{d=1}^{\infty} d^{n-1} \{\varphi(d)\}^{1/2} < \infty\right)$, то для суммы $\tilde{S}(0, T) = \sum_{x \in \Delta} \theta(x) \varepsilon(x)$ справедливо неравенство

$$P\{\max_{x \in \Delta[0,T]} |\tilde{S}(x)| > \varepsilon\} \leqslant \varepsilon^{-2} (D\tilde{S}(0, T) + c_1 Q^2(T) + c_2 \varepsilon Q(T)).$$

Доказательство. При $n=1$ утверждение леммы 10 вытекает из рассуждений, близких доказательству лемм 2.2 и 2.3 [1]. При $n > 1$ надо применить индукцию по n и рассмотреть $S(0, T)$ как функцию переменной T_n.

Лемма 11. Для компактности мер P_T, порожденных в $(C, \mathfrak{C})$ полями $X_T(t)$, $t \in K$, достаточно, чтобы:

1) для всех $0 \leqslant h_1^{(i)} < h_2^{(i)} \leqslant 1$, $i = \overline{1, n}$

$$M \| \delta_{X_T}^{(n)}(h_1, h_2) \|^p \leqslant c_1 \prod_{i=1}^{n} | h_2^{(i)} - h_1^{(i)} |^{1+q},$$

где $p > 0$, $q > 0$, $h_1 = (h_1^{(i)}, i = \overline{1, n})$, $h_2 = (h_2^{(i)}, i = \overline{1, n})$;

2) для некоторых $z_0^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$

$$M \| X_T(z_0^{(1)}, \ldots, h_i^{(2)}, \ldots, z_0^{(n)}) - X_T(z_0^{(1)}, \ldots, h_i^{(1)}, \ldots, z_0^{(n)}) \|^p \leqslant$$
$$\leqslant c_2 | h_2^{(i)} - h_1^{(i)} |^{1+q}, \quad i = \overline{1, n}$$

для всех $0 \leqslant h_1^{(i)} < h_2^{(i)} \leqslant 1$.

Лемма 12. Для компактности мер P'_T, порожденных $Y_T(t)$ в $(D, \mathfrak{D})$, достаточно, чтобы для каждого $j \in \{1, \ldots, n\}$ и всех $0 \leqslant h_1^{(i)} < h_2^{(i)} \leqslant 1$, $i = \overline{1, n}$; $i \neq j$; $0 \leqslant h_1^{(j)} < \tilde{h}^{(j)} < h_2^{(j)} \leqslant 1$ выполнялось неравенство

$$M \| \delta_{Y_T}^{(n)} [(h_2^{(1)}, \ldots, \tilde{h}^{(l)}, \ldots, h_2^{(n)}), (h_1^{(1)}, \ldots, h_1^{(n)})] \|^p \| \delta_{Y_T}^{(n)} [(h_2^{(1)}, \ldots$$

$$\ldots, h_2^{(n)}), (h_1^{(1)}, \ldots, \tilde{h}^{(l)}, \ldots, h_1^{(n)})] \|^q \leqslant c_8 \prod_{l=1}^{n} | h_2^{(l)} - h_1^{(l)} |^{1+r},$$

где $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $r > 0$, $p + q > 0$.

Доказательство лемм 11 и 12 вытекает из работ [18, 19].

Лемма 13. Если выполнены предположения А, В и одно из условий E_i, $i = 1, 2, 3$, то меры P_T и P_T', индуцируемые полями $X_T(t)$, $t \in K$ и $Y_T(t)$, $t \in K$ в пространствах $(C, \mathfrak{C})$ и $(D, \mathfrak{D})$ соответственно, слабо компактны.

Доказательство леммы 13 вытекает из лемм 4—6 и лемм 11 и 12, в которых следует вначале рассмотреть случай, когда точки h_1 и h_2 имеют вид (5).

Из лемм 9 и 13 и соответствующих теорем гл. VI книги [22] и следуют теоремы 1—3.

1. *Давыдов Ю. А.* О сходимости распределений, порожденных стационарными случайными процессами.— Теория вероятностей и ее применения, 1968, 13, вып. 4. 2. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М., 1977. 3. *Oodaira H., Yochihara K.* Functional central limit theorem for strictly stationary random process satisfing the strong mixing conditions.— Kodai. Math. J., 1972, 24, N 3. 4. *Whilipp W., Webb G. R.* An invariance principle for mixing sequences.— Z. Wahrsheinlichkeitheorie verw. Geb., 1973, 25. 5. *Yochihara K.* Moment inequalities for mixing sequences.— Kodai Math. J., 1978, 1, N 2. 6. *Rosenblatt M.* Some comments on narrow bandpass filters.— Quart. Appl. Math., 1961, 18, N 4. 7. *Холево А. С.* Об асимптотической нормальности оценок коэффициентов регрессии.— Теория вероятностей и ее применения, 1971, 16, вып. 4. 8. *Хеннан Э.* Многомерные временные ряды. М., 1974. 9. *Леоненко Н. Н.* Об оценках коэффициентов линейной регрессии однородного случайного поля.— УМЖ, 1978, 30, № 6. 10. *Bickel R. J., Wichura M. J.* Convergence criteria for multiparameter stochastic process and some applications.— Ann. Math. Statist., 1971, 42, N 5. 11. *Городецкий В. В.* О скорости сходимости в многомерном принципе инвариантности.— Теория вероятностей и ее применения, 1975, 20, вып. 3. 12. *Леоненко Н. Н.* Принцип инвариантности для однородных случайных полей.— ДАН УССР. Сер. А, 1975, № 6. 13. *Deo C. M.* A. functional central limit theorem for stationary random fields.— Ann. Probab., 1975, 3, № 4. 14. *Леоненко Н. Н.* О сходимости вероятностных мер, порожденных однородными случайными полями.— ДАН УССР. Сер. А, 1978, № 11. 15. *Леоненко Н. Н.* Предельные теоремы для аддитивных случайных функций.— В кн.: Исследования по теории случайных процессов. Киев, 1976. 16. *Булинский А. В., Журбенко И. Г.* Центральная предельная теорема для аддитивных случайных функций.— Теория вероятностей и ее применения, 1976, 21, вып. 4. 17. *Нахапетян Б. С.* Центральная предельная теорема для случайных полей, удовлетворяющих условию сильного перемешивания.— В кн.: Многокомпонентные случайные системы. М., 1978. 18. *Ченцов Н. Н.* Предельные теоремы для некоторых классов случайных функций.—Труды Всесоюзн. совещ. по теории вероятностей и математической статистике. Ереван, 1960. 19. *Neuhous G.* On weak convergence of stochastic processes with multidimentional time parameter.— Ann. Math. Statist., 1971, 42, N 4. 20. *Ченцов Н. Н.* Винеровские случайные поля от нескольких параметров.— ДАН СССР, 1956, 106, № 4. 21. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М., 1965. 22. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 1. М., 1971.

Поступила в редколлегию 04.05.79