УДК 519.21

Ю. Н. ЛИНЬКОВ, канд. физ.-мат. наук
Институт прикладной математики и механики АН УССР

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ И СТАТИСТИКА РАЗРЫВНЫХ ПРОЦЕССОВ

Настоящая статья посвящена асимптотическим вопросам статистики разрывных процессов. Доказана предельная теорема об асимптотической нормальности стохастических интегралов по локальной мартингальной мере и проиллюстрировано применение этой теоремы к решению асимптотических задач статистики на примере ступенчатых процессов с независимыми приращениями. Исследовано асимптотическое поведение байесовских оценок и оценок максимального правдоподобия параметров процесса, критериев наибольшего правдоподобия и получена асимптотическая формула для количества шенноновской информации, содержащейся в процессе относительно параметра. Ранее некоторые из этих задач решались в частном случае для процессов Пуассона [1—3].

1. **Асимптотическая нормальность стохастических интегралов по локальной мартингальной мере.** Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство, $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$ — семейство неубывающих непрерывных справа пополненных σ-алгебр, $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}$, $\mu(t, A)$, $t \in [0, \infty)$, $A \subset R^m$ — локальная мартингальная мера с характеристикой $\pi(t, A)$, причем $\pi(t, A)$ при $A \subset R^m$ является непрерывной функцией t [4].

Пусть $\mu((s, t], A) = \mu(t, A) - \mu(s, A)$, $\pi((s, t], A) = \pi(t, A) - \pi(s, A)$, $0 \leqslant s < t < \infty$ — меры на $[0, \infty) \times R^m$, $H_2^\pi[0, T]$ — пространство функций $f(t, x) = f(t, x, \omega)$, измеримых по совокупности переменных $(t, x, \omega) \in [0, T] \times R^m \times \Omega$, $\mathfrak{F}_t$-измеримых при фиксированных $(t, x) \in [0, T] \times R^m$, для которых существует последовательность простых $\mathfrak{F}_t$-измеримых функций $f_n(t, x)$ при фиксированных $(t, x) \in [0, T] \times R^m$ таких, что

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_{R^m} |f(t, x) - f_n(t, x)|^2 \pi(dt, dx) = 0.$$

Для функций $f(t,x)\in H_2^\pi[0,T]$ определен стохастический интеграл [4]

$$\zeta_t=\int_0^t\int_{R^m} f(s,x)\,\mu(ds,dx),\quad t\in[0,T].$$

Лемма 1. Пусть $f(t,x)\in H_2^\pi[0,T]$ при всех $T<\infty$ и выполняются условия:

1) $\mathbf{P}\text{-}\lim\limits_{T\to\infty}\varphi_T^{-2}\int_0^T\int_{R^m} f^2(t,x)\,\pi(dt,dx)=1$, где $\varphi_T\to\infty$ при $T\to\infty$;

2) $\lim\limits_{T\to\infty}\varphi_T^{-2-a}\mathbf{E}\int_0^T\int_{R^m}|f(t,x)|^{2+a}\pi(dt,dx)=0$ для некоторого $a\in\in(0,1]$.

Тогда стохастический интеграл ζ_T при $T\to\infty$ асимптотически нормален с параметрами $(0,\varphi_T^2)$.

Доказательство. Пусть $\mu^*(t,A)$, $t\in[0,T+1]$, $A\subset R^m$ — локальная мартингальная мера с характеристикой $\Pi(t,A)$, равной $\pi(t,A)$ при $t\in[0,T]$ и $\pi(T,A)+T(t-T)\Pi(A)$ при $t\in[T,T+1]$, где $\Pi(R^m)<\infty$. Тогда $\mu^*(t,A)=\mu(t,A)$ при $t\in[0,T]$. Положим $g(t,x)=f(t,x)$ при $t\in[0,T]$ и $g(t,x)=\varphi_T(T\Pi(R^m))^{-1/2}$ при $t\in[T,T+1]$. Докажем сначала асимптотическую нормальность с параметрами $(0,1)$ для интеграла $G_T=\varphi_T^{-1}\int_0^{\tau_T}\int_{R^m} g(t,x)\,\mu^*(dt,dx)$ при $T\to\infty$, где $\tau_T=\inf\left\{t:\int_0^t\int_{R^m} g^2(s,x)\,\Pi(ds,dx)=\varphi_T^2\right\}$. Рассмотрим случайный процесс

$$\rho_t^T=\exp\left\{i\lambda\varphi_T^{-1}\int_0^t\int_{R^m} g(s,x)\,\mu^*(ds,dx)+\right.$$
$$\left.+2^{-1}\lambda^2\varphi_T^{-2}\int_0^t\int_{R^m} g^2(s,x)\,\Pi(ds,dx)\right\}$$

при $t\in[0,T+1]$, $\lambda\in R^1$. По обобщенной формуле Ито [4]

$$\rho_t^T=1+\int_0^t\int_{R^m}\rho_{s-}^T[\exp(i\lambda\varphi_T^{-1}g(s,x))-1]\,\mu^*(dt,dx)+$$
$$+\int_0^t\int_{R^m}\rho_{s-}^T[\exp(i\lambda\varphi_T^{-1}g(s,x))-1-i\lambda\varphi_T^{-1}g(s,x)+$$
$$+2^{-1}\lambda^2\varphi_T^{-2}g^2(s,x)]\,\Pi(ds,dx).$$

Так как

$$\mathbf{E}\int_0^{\tau_T}\int_{R^m}|\rho_{s-}^T[\exp(i\lambda\varphi_T^{-1}g(s,x))-1]|^2\Pi(ds,dx)\leqslant$$

$$\leqslant\lambda^2\varphi_T^{-2}\exp(\lambda^2)\,\mathbf{E}\int_0^{\tau_T}\int_{R^m}g^2(s,x)\Pi(ds,dx)=\lambda^2\exp(\lambda^2),$$

то из свойств стохастического интеграла следует, что

$$\mathbf{E}\rho_{\tau_T}^T=1+\mathbf{E}\int_0^{\tau_T}\int_{R^m}\rho_{t-}^T[\exp(i\lambda\varphi_T^{-1}g(t,x))-1-i\lambda\varphi_T^{-1}g(t,x)+$$

$$+2^{-1}\lambda^2\varphi_T^{-2}g^2(t,x)]\,\Pi(dt,dx).$$

Используя теперь элементарное неравенство $|\exp(ix)-1-ix+x^2|2|\leqslant C|x|^{2+a}$, $a\in(0,1]$, $x\in R^1$, получаем

$$|\mathbf{E}\rho_{\tau_T}^T-1|\leqslant C\exp(\lambda^2/2)\,\varphi_T^{-2-a}\mathbf{E}\int_0^{\tau_T}\int_{R^m}|g(t,x)\lambda|^{2+a}\Pi(dt,dx),$$

где правая часть в силу условия 2 стремится к нулю при $T\to\infty$. Отсюда, с учетом $\mathbf{E}\rho_{\tau_T}^T=\exp(\lambda^2/2)\,\mathbf{E}\exp(i\lambda G_T)$, следует, что $\mathbf{E}\exp(i\lambda G_T)\to\exp(-\lambda^2/2)$ при $T\to\infty$, т. е. G_T при $T\to\infty$ асимптотически нормален с параметрами $(0,1)$. Но для любых $h>0$ и $R>0$

$$\mathbf{P}\{|\varphi_T^{-1}\zeta_T-G_T|>h\}\leqslant Rh^{-2}+\mathbf{P}\left\{\varphi_T^{-2}\int_0^{T+1}\int_{R^m}g^2(t,x)\,|\chi_{[0,T]}(t)-\right.$$

$$\left.-\chi_{[0,\tau_T]}(t)|\,\Pi(dt,dx)>R\right\}=Rh^{-2}+$$

$$+\mathbf{P}\left\{\left|\varphi_T^{-2}\int_0^{T}\int_{R^m}g^2(t,x)\,\pi(dt,dx)-1\right|>R\right\},\tag{1}$$

где $\chi_A(t)$ — индикатор множества A. Теперь искомая асимптотическая нормальность для ζ_T следует из условия 1 и произвольности h и R. Лемма 1 доказана.

Можно доказать аналог леммы 1, используя вместо условия 2 условие типа Линдеберга. Пусть $\tau_n=\inf\left\{t:\int_0^t\int_{R^m}f^2(s,x)\pi(ds,dx)=n\right\}$, $n=0,1,2,\ldots$, и $\eta_n=\xi_n-\xi_{n-1}$, $n=1,2,\ldots$, где $\xi_n=\zeta_{\tau_n}-$

квадратично интегрируемый мартингал относительно семейства σ-алгебр $\mathfrak{N}_n = \mathfrak{F}_{\tau_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Лемма 2. Пусть $f(t,x) \in H_2^\pi [0, T]$ при всех $T < \infty$, выполняется условие 1 леммы 1 и условие:

2′) $\lim\limits_{N \to \infty} N^{-1} \sum\limits_{k=1}^{N} \mathbf{E}\eta_k^2 \chi_{(\varepsilon N, \infty)}(\eta_k^2) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$.

Тогда стохастический интеграл ζ_T при $T \to \infty$ асимптотически нормален с параметрами $(0, \varphi_T^2)$.

Доказательство. Очевидно, что $\gamma_n^2 = \mathbf{E}\{\eta_n^2/\mathfrak{N}_{n-1}\} = 1$, и, следовательно, условие (18) теоремы 9 из § 3 гл. 2 [4] выполняется с $\varphi(N) = N$. Учитывая теперь условие 2′, из указанной теоремы получаем асимптотическую нормальность $N^{-1/2}\xi_N$ при $N \to \infty$ с параметрами (0, 1). Пусть $N = [\varphi_T^2]$ и $h > 0$. Тогда

$$\mathbf{P}\{|\varphi_T^{-1}\zeta_T - N^{-1/2}\xi_N| > h\} < \mathbf{P}\{\varphi_T^{-1}|\zeta_T - \xi_N| > h/2\} +$$
$$+ \mathbf{P}\{|\varphi_T^{-1}N^{1/2} - 1|\, N^{-1/2}|\xi_N| > h/2\},$$

где второе слагаемое в правой части неравенства стремится к нулю при $T \to \infty$ для любого $h > 0$. Далее, для любого $R > 0$ аналогично (1) получаем

$$\mathbf{P}\{\varphi_T^{-1}|\zeta_T - \xi_N| > h\} \leqslant Rh^{-2} +$$
$$+ \mathbf{P}\left\{\varphi_T^{-2}\int\limits_0^\infty \int\limits_{R^m} f^2(t, x)\,|\chi_{[0,T]}(t) - \chi_{[0,\tau_N]}(t)|\,\pi(dt, dx) > R\right\} =$$
$$= Rh^{-2} + \mathbf{P}\left\{\left|\varphi_T^{-2}\int\limits_0^T \int\limits_{R^m} f^2(t, x)\,\pi(dt, dx) - N\varphi_T^{-2}\right| > R\right\}.$$

В силу условия 1 и произвольности h и R отсюда следует асимптотическая нормальность с параметрами $(0, \varphi_T^2)$ для ζ_T при $T \to \infty$. Лемма 2 доказана.

2. Различение ступенчатых процессов с независимыми приращениями. Пусть $\xi_\theta(t)$ — стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями, определенный на $[0, T]$ и имеющий характеристическую функцию

$$\mathbf{E}\exp\{i(\lambda, \xi_\theta(t))\} = \exp\left\{\int\limits_{R^m}[\exp(i(\lambda, x)) - 1]\,\pi(t, dx;\ \theta)\right\},$$

где $\lambda \in R^m$ и $\pi(T, R^m;\ \theta) < \infty$ для каждого $\theta \in \Theta$. Обозначим через $\mathbf{D} = \mathbf{D}[0, T]$ пространство функций без разрывов 2-го рода со значениями в R^m, определенных на $[0, T]$, имеющих при каждом $t \in [0, T]$ предел слева и непрерывных справа, а через P_θ — вероятностную меру на $\mathbf{D}$, соответствующую процессу $\xi_\theta(t)$. Пусть $\nu(B;\theta)$ — мера, равная числу точек t, для которых пара $(t, \xi_\theta(t) - \xi_\theta(t-))$ попадает в измеримое множество $B \subset [0, T] \times R^m$, и $\mu(B;\theta) = \nu(B, \theta) - \pi(B;\theta)$. Предположим, что меры $\pi(\cdot;\theta)$ при различных $\theta \in \Theta$ эквивалентны. Тогда меры P_θ также эквивалентны и для любых $\theta, y \in \Theta$ [5]

$$\frac{dP_\theta}{dP_y}(\xi_y) = \exp\left\{\int_0^T \int_{R^m} \ln r(t, x; \theta, y)\, \mu(dt, dx; y) - \right.$$
$$\left. - \int_0^T \int_{R^m} [r(t, x; \theta, y) - 1 - \ln r(t, x; \theta, y)]\, \pi(dt, dx; y)\right\}, \qquad (2)$$

где $r(t, x; \theta, y)$ — плотность меры $\pi(\cdot;\theta)$ относительно меры $\pi(\cdot;y)$, ξ_y — траектория процесса $\xi_y(t)$ при $t \in [0, T]$.

Предположим сначала, что $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ и по результатам наблюдения процесса $\xi(t) = \xi_\theta(t)$, $t \in [0, T]$ необходимо принять решение, какая из двух гипотез $\theta = \theta_0$ и $\theta = \theta_1$ верна.

Пусть $\delta(x)$ — случайная функция, определенная при $x \in D$ и принимающая значения 0 и 1. Случайную величину $\delta = \delta(\xi)$ будем называть критерием, по которому в случае $\delta = j$ принимается гипотеза $\theta = \theta_j$. Обозначим через $\alpha_j(\delta)$ вероятность ошибки критерия δ при условии, что верна гипотеза $\theta = \theta_j$, а через $\beta_j(\varepsilon)$ — минимальное значение $\alpha_j(\delta)$ среди всех критериев δ, удовлетворяющих условию $\alpha_{1-j}(\delta) \leqslant \varepsilon$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, $j = 0, 1$.

Изучим поведение $\beta_j(\varepsilon)$ при $T \to \infty$. Обозначим $r_j(t, x) = r(t, x; \theta_{1-j}, \theta_j)$, $\pi_j(B) = \pi(B;\theta_j)$, $\mu_j(B) = \mu(B;\theta_j)$. Далее, пусть L_2^j — пространство функций, определенных на $[0, T] \times R^m$ и интегрируемых с квадратом по мере π_j, $\|f\|_j = \left(\int_0^T \int_{R^m} f^2(t, x)\, \pi_j(dt, dx)\right)^{1/2}$ — норма функции $f = f(t, x)$ в пространстве L_2^j.

Теорема 1. Пусть для фиксированного j, равного 0 или 1, выполняются условия:

1) $\varphi_{jT} = \|\ln r_j\|_j < \infty$ для каждого $T < \infty$ и $\varphi_{jT} \to \infty$ при $T \to \infty$;

2) $\lim\limits_{T\to\infty} \varphi_{jT}^{-2-a} \| |\ln r_j|^{(2+a)/2} \|_j^2 = 0$ для некоторого $a \in (0, 1]$;

3) $\lim\limits_{T\to\infty} \psi_{jT} \varphi_{jT}^{-1} = \infty$, где $\psi_{jT} = \|(r_j - 1 - \ln r_j)^{1/2}\|_j^2$.

Тогда $\lim\limits_{T\to\infty} \psi_{jT}^{-1} \ln \beta_j(\varepsilon) = -1$ для любого $\varepsilon \in (0, 1)$.

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 1 [2] и поэтому опускается. Необходимо лишь учесть, что

$$F_{jT} = \ln \frac{dP_{1-j}}{dP_j}(\xi_{\theta_j}) = \int_0^T \int_{R^m} \ln r_j(t, x)\, \mu_j(dt, dx) - \psi_{jT}, \quad P_j = P_{\theta_j},$$

и, следовательно, в силу леммы 1 F_{jT} при $T \to \infty$ асимптотически нормален с параметрами $(-\psi_{jT}, \varphi_{jT}^2)$.

Пусть теперь $\Theta = \Theta_T = \{\theta_0, \theta_1\} \subset R^1$, где $\theta_1 = \theta_0 + \Delta_T$ и $\Delta_T \to 0$ при $T \to \infty$, а θ_0 не зависит от T. Введем функцию $r_j(t, x; \theta)$ так, что $r_0(t, x; \theta) = r(t, x; \theta, \theta_0)$ и $r_1(t, x; \theta) = r(t, x; \theta_0, \theta)$. Заметим, что $r_j(t, x; \theta_0) = 1$ и $r_j(t, x; \theta_1) = r(t, x; \theta_{1-j}, \theta_j)$. Аналогично лемме 2 [6] доказывается следующая лемма.

Лемма 3. Пусть для фиксированного j, равного 0 или 1, выполняются условия:

1) функция $\ln r_j(t, x; \theta)$ абсолютно непрерывна по θ в окрестности точки θ_0 и $\| \rho_j(y) r_j^{-1}(z) \|_j < \infty$ для всех y, z из окрестности точки θ_0 и всех $T < \infty$,

$$\rho_j(y) = \rho_j(t, x; y) = \frac{\partial}{\partial y} r_j(t, x; y), \quad r_j(y) = r_j(t, x; y);$$

причем $\gamma_{jT} = \| \rho_j(\theta_0) \|_j \to \infty$ при $T \to \infty$;

2) $\gamma_{jT}^{-2-a} \| | \rho_j(\theta_0) |^{(2+a)/2} \|_j^2 \to 0$ при $T \to \infty$ для некоторого $a \in (0, 1]$;

3) $(\gamma_{jT}^{-2} \vee \Delta_T^2) \sup\limits_{(y,z) \in K} \| \rho_j(z) - \rho_j(y) r_j^{-1}(y) \|_j^2 \to 0$ при $T \to \infty$, где $(a \vee b) = \max(a, b)$, $K = \{y, z) : | y - \theta_0 | \vee | z - \theta_0 | \leqslant | \Delta_T |\}$.

Тогда величина F_{jT} при $T \to \infty$ асимптотически нормальна с параметрами $(-\psi_{jT}, \Delta_T^2 \gamma_{jT}^2)$, причем $\psi_{jT} = 2^{-1} \Delta_T^2 \gamma_{jT}^2 (1 + o(1))$.

Используя лемму 3, аналогично работе [7] доказываем следующую теорему об асимптотическом поведении вероятностей ошибок $\beta_j(\varepsilon)$ при $T \to \infty$ в случае близких гипотез.

Теорема 2. Пусть для фиксированного j, равного 0 или 1, выполняются условия леммы 3. Тогда для данного j и любого $\varepsilon \in (0, 1)$ справедливы следующие утверждения.

1. Если $\Delta_T^2 \gamma_{jT}^2 \to \infty$ при $T \to \infty$, то $\lim\limits_{T \to \infty} \Delta_T^2 \gamma_{jT}^2 (\ln \beta_j(\varepsilon))^{-1} = -2$.

2. Если $\Delta_T^2 \gamma_{jT}^2 \to u^2 \in [0, \infty)$ при $T \to \infty$, то $\beta_j(\varepsilon) \to \Phi(y_\varepsilon - | u |)$ при $T \to \infty$, где $\Phi(x)$ — функция распределения нормального закона с параметрами (0, 1) и $\Phi(y_\varepsilon) = 1 - \varepsilon$.

Примеры неоднородных процессов Пуассона, для которых выполняются условия теорем 1 и 2, можно найти в работе [2].

3. Оценки параметров ступенчатых процессов с независимыми приращениями. Пусть $\Theta = (A, B)$, где $-\infty < A < B < \infty$, и $\theta_0 \in \Theta$ — истинное неизвестное значение параметра, которое необходимо оценить по результатам наблюдения траектории $\xi = \xi_{\theta_0}$ процесса $\xi(t) = \xi_{\theta_0}(t)$ при $t \in [0, T]$. Оценкой максимального правдоподобия $\hat{\theta}_T$ называется решение уравнения

$$\frac{dP_{\hat{\theta}_T}}{dP_y}(\xi) = \sup_{\theta \in \Theta} \frac{dP_\theta}{dP_y}(\xi),$$

где y — произвольное фиксированное значение из Θ. Если это уравнение имеет несколько решений, то в качестве оценки $\hat{\theta}_T$ можно взять любое из них. Байесовской оценкой $\tilde{\theta}_T$ параметра θ_0 относительно функции потерь $w(\theta, \tilde{\theta})$ и априорной плотности $p(\theta)$ называется решение уравнения

$$\int_{\Theta} w(\theta, \tilde{\theta}_T)\, p(\theta/\xi)\, d\theta = \inf_{y \in \Theta} \int_{\Theta} w(\theta, y)\, p(\theta/\xi)\, d\theta,$$

где $p(\theta/\xi)$—апостериорная плотность распределения параметра θ при условии, что известна траектория ξ. Будем предполагать, что функция $p(\theta)$ непрерывна, ограничена и не обращается в нуль на Θ, а функция $w(\theta, y)$ зависит от разности аргументов $w(\theta, y) = w(\theta - y)$, где функция $w(y)$ непрерывна, выпукла и удовлетворяет соотношению $\lim_{|y| \to 0} w(y)\, |y|^{-a} = 1$ при некотором $a \geqslant 1$.

В соответствии с методом И. А. Ибрагимова и Р. З. Хасьминского [8] исследование поведения $\hat{\theta}_T$ и $\tilde{\theta}_T$ при $T \to \infty$ сводится к изучению отношения правдоподобия $\zeta_T(u)$, равного плотности мер (2) при условии $y = \theta_0$ и $\theta = \theta_0 + \gamma_T^{-1} u$, где $\gamma_T = \gamma_{0T}(\theta_0)$, $u \in (A_T, B_T) = \gamma_T(\Theta - \theta_0)$. Вне интервала (A_T, B_T) процесс $\zeta_T(u)$ доопределим следующим образом: $\zeta_T(u) = \zeta_T(A_T)(u - A_T + 1)^2$ при $u \in (A_T - 1, A_T]$, $\zeta_T(u) = \zeta_T(B_T)(u - B_T - 1)^2$ при $u \in [B_T, B_T + 1)$ и $\zeta_T(u) = 0$ при $u \overline{\in} (A_T - 1, B_T + 1)$.

Будем обозначать $\mu_0 = \mu$, $\pi_0 = \pi$, $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|$, $r(\theta) = r(t; x, \theta) = r_0(t, x; \theta)$.

Лемма 4. Пусть выполняются условия:

1) функция $\ln r(t, x; \theta)$ абсолютно непрерывна по θ в окрестности θ_0, $\|\rho(\theta) r^{-1}(y)\| < \infty$ для всех $T < \infty$ и y, θ из некоторой окрестности θ_0, где $\rho(\theta) = \rho(t, x; \theta) = \rho_0(t, x; \theta)$ и $\gamma_T \to \infty$ при $T \to \infty$;

2) $\gamma_T^{-2-a} \| |\rho(\theta_0)|^{(2+a)/2} \|^2 \to 0$ при $T \to \infty$ для некоторого $a \in (0,1]$.

3) $\gamma_T^{-2} \sup_{(y,z) \in K} \|\rho(z) - \rho(y)\, r^{-1}(y)\|^2 \to 0$ при $T \to \infty$, где K — множество из условия 3 леммы 3 при $\Delta_T = \gamma_T^{-1} u$.

Тогда процесс $\zeta_T(u)$ при $T \to \infty$ допускает представление $\zeta_T(u) = \exp\{u\Gamma_T - u^2/2 + h_T\}$, где $\Gamma_T = \gamma_T^{-1} \int_0^T \int_{R^m} \rho(t, x; \theta_0)\, \mu(dt, dx)$, $h_T \to 0$ по вероятности, а Γ_T асимптотически нормально с параметрами $(0, 1)$.

Доказательство леммы 4 при использовании леммы 1 аналогично доказательству леммы 2 [6] при $\Delta_T = \gamma_T^{-1} u$ и поэтому опускается.

Обозначим $\gamma_T(y) = \|\rho(y)\, r^{-1/2}(y)\|$. Тогда $\gamma_T(\theta_0) = \gamma_T$.

Лемма 5. Пусть выполняется условие 1 леммы 4 и $\gamma_T(\theta) \leqslant C\gamma_T(y)$ для всех $T > 0$ и $\theta, y \in \Theta$, где C — некоторая положительная постоянная. Тогда $\mathrm{E}\,|\zeta_T^{1/2}(u) - \zeta_T^{1/2}(v)|^2 \leqslant 4^{-1}C^2|u-v|^2$.

Доказательство. Из определения процесса $\zeta_T(u)$ следует

$$\mathrm{E}\,|\zeta_T^{1/2}(u) - \zeta_T^{1/2}(v)|^2 = 2\,[1 - \mathrm{E}Z_T(T)].$$

Здесь

$$Z_T(t) = \exp\left\{2^{-1}\int_0^t \int_{R^m} \ln r(s, x)\,\mu_v(ds, dx) - \right.$$

$$\left. - 2^{-1}\int_0^t \int_{R^m} [r(s, x) - 1 - \ln r(s, x)]\,\pi_v(ds, dx)\right\}, \qquad (3)$$

где $r(s, x) = r(s, x; \theta_0 + u\gamma_T^{-1}, \theta_0 + v\gamma_T^{-1})$, $\mu_v(\cdot) = \mu(\cdot; \theta_0 + v\gamma_T^{-1})$; $\pi_v(\cdot) = \pi(\cdot; \theta_0 + v\gamma_T^{-1})$. Применяя обобщенную формулу Ито к процессу $\{Z_T(t), \mathfrak{F}_t\}$ [4], получаем

$$Z_T(T) = 1 - 2^{-1}\int_0^T \int_{R^m} Z_T(t-)\,[r^{1/2}(t, x) - 1]^2\,\pi_v(dt, dx) +$$

$$+ \int_0^T \int_{R^m} Z_T(t-)\,[r^{1/2}(t, x) - 1]\,\mu_v(dt, dx).$$

Так как $\mathrm{E}Z_T^2(t) = 1$, то $\mathrm{E}\,\|Z_T(r^{1/2} - 1)\|_v^2 = \|r^{1/2} - 1\|_v^2 < \infty$, где $\|f\|_v = \left(\int_0^T \int_{R^m} f^2(t, x)\,\pi_v(dt, dx)\right)^{1/2}$, и, следовательно,

$$\mathrm{E}Z_T(T) = 1 - 2^{-1}\,\|\mathrm{E}^{1/2}Z_T(r^{1/2} - 1)\|_v^2 =$$

$$= 1 - 2^{-1}\,\|\mathrm{E}^{1/2}Z_T(r^{1/2}(\theta_0 + v\gamma_T^{-1}) - r^{1/2}(\theta_0 + u\gamma_T^{-1}))\|^2. \qquad (4)$$

Учитывая, что $\mathrm{E}Z_T(t) \leqslant 1$, получаем

$$\mathrm{E}\,|\zeta_T^{1/2}(u) - \zeta_T^{1/2}(v)|^2 \leqslant \|r^{1/2}(\theta_0 + v\gamma_T^{-1}) - r^{1/2}(\theta_0 + u\gamma_T^{-1})\|^2 =$$

$$= \left\| 2^{-1}\int_{\theta_0 + u\gamma_T^{-1}}^{\theta_0 + v\gamma_T^{-1}} \rho(y)\,r^{-1/2}(y)\,dy \right\|^2 \leqslant 4^{-1}\gamma_T^{-1}\,|u - v| \times$$

$$\times \int_{\theta_0 + u\gamma_T^{-1}}^{\theta_0 + v\gamma_T^{-1}} \gamma_T^2(y)\,dy \leqslant 4^{-1}C^2\,|u - v|^2.$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Пусть выполняются условия леммы 5, а также условия:

1) $\gamma_T^{-1} \sup\limits_{|y| \leqslant \gamma_T^{-\delta}} \| \rho(\theta_0 + y) r^{-1/2}(\theta_0 + y) - \rho(\theta_0) \| \to 0$ при $T \to \infty$ для некоторого $\delta \in (0, 1)$;

2) $\lim\limits_{T\to\infty} \gamma_T^c \inf\limits_{|y| \geqslant \gamma_T^{-\delta}} \| r^{1/2}(\theta_0 + y) - 1 \|^2 \geqslant k > 0$ для некоторого $c > 0$;

3) мера $\Pi(A) = \int\limits_A \int\limits_{R^m} | r^{1/2}(t, x; y) - r^{1/2}(t, x; z) |^2 \pi(dt, dx)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега для всех $y, z \in \Theta$.

Тогда найдется постоянная $\lambda > 0$ такая, что $P\{\zeta_T(u) > \exp(-|u|^\lambda)\} \leqslant \exp(-|u|^\lambda)$.

Доказательство. Очевидно,

$$P\{\zeta_T(u) > \exp(-|u|^\lambda)\} \leqslant \exp(2^{-1})|u|^\lambda)\, E\zeta_T^{1/2}(u).$$

Но $\zeta_T^{1/2}(u) = Z_T(T)$ при $v = 0$, где $Z_T(t)$ определен соотношением (3), а $EZ_T(t)$ удовлетворяет уравнению (4). Решая уравнение (4) относительно $EZ_T(t)$ и учитывая условие 3, получаем

$$E\zeta_T^{1/2}(u) = \exp\{-2^{-1} \| r^{1/2}(\theta_0 + u\gamma_T^{-1}) - 1 \|^2\}.$$

Для $|u| \leqslant \gamma_T^{1-\delta}$, $0 < \delta < 1$

$$|4 \| r^{1/2}(\theta_0 + u\gamma_T^{-1}) - 1 \|^2 - u^2| = \left| \left\| \int\limits_0^{u\gamma_T^{-1}} \rho(\theta_0 + y) r^{-1/2}(\theta_0 + y)\, dy \right\|^2 - \right.$$

$$\left. - \left\| \int\limits_0^{u\gamma_T^{-1}} \rho(\theta_0)\, dy \right\|^2 \right| = \left\| \left(\int\limits_0^{u\gamma_T^{-1}} [\rho(\theta_0 + y) r^{-1/2}(\theta_0 + y) - \rho(\theta_0)]\, dy \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \int\limits_0^{u\gamma_T^{-1}} [\rho(\theta_0 + y) r^{-1/2}(\theta_0 + y) + \rho(\theta_0)]\, dy \right)^{1/2} \right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int\limits_0^{u\gamma_T^{-1}} [\rho(\theta_0 + y) r^{-1/2}(\theta_0 + y) - \rho(\theta_0)]\, dy \right\| \times$$

$$\times \left\| \int\limits_0^{u\gamma_T^{-1}} [\rho(\theta_0 + y) r^{-1/2}(\theta_0 + y) + \rho(\theta_0)]\, dy \right\| \leqslant$$

$$\leqslant u^2 \gamma_T^{-2} \sup\limits_{|y| \leqslant |u| \gamma_T^{-1}} \| \rho(\theta_0 + y) r^{-1/2}(\theta_0 + y) - \rho(\theta_0) \| \times$$

$$\times \sup_{|y|\leqslant |u|\gamma_T^{-1}} \| \rho(\theta_0+y) r^{-1/2}(\theta_0+y)+\rho(\theta_0)\| \leqslant$$

$$\leqslant 2Cu^2\gamma_T^{-1} \sup_{|y|\leqslant |u|\gamma_T^{-1}} \| \rho(\theta_0+y) r^{-1/2}(\theta_0+y)-\rho(\theta_0)\| = u^2 o(1).$$

Таким образом, при $|u|\leqslant \gamma_T^{1-\delta}$ $\|r^{1/2}(\theta_0+u\gamma_T^{-1})-1\|^2 = 4^{-1}u^2(1+ o(1))$, и, следовательно,

$$\mathbf{P}\{\zeta_T(u) > \exp(-u^2/16)\} \leqslant \exp\{u^2/32 - u^2/8(1+o(1))\} \leqslant \exp(-u^2/16).$$

Для $|u| > \gamma_T^{1-\delta}$ в силу условия 2 находим

$$\|r^{1/2}(\theta_0+u\gamma_T^{-1})-1\|^2 \geqslant 2^{-1}k\gamma_T^c \geqslant \tilde{C}|u|^c,$$

так как $|u|\leqslant (|A-\theta_0| \vee |B-\theta_0|)\gamma_T$. Выбирая теперь $\lambda < c/2$, получаем $\mathbf{P}\{\zeta_T(u) > \exp(-|u|^\lambda)\} \leqslant \exp(-|u|^\lambda)$. Лемма 6 доказана.

Повторяя теперь рассуждения работы [2], из лемм 4—6 получаем следующее утверждение.

Теорема 3. Если выполняются условия лемм 4—6, то оценки $\hat{\theta}_T$ и $\tilde{\theta}_T$ при $T\to\infty$ асимптотически нормальны с параметрами $(\theta_0, \gamma_T^{-2})$ и любые моменты случайных величин $\gamma_T|\hat{\theta}_T-\theta_0|$ и $\gamma_T|\tilde{\theta}_T-\theta_0|$ ограничены при достаточно больших T, а при $T\to\infty$ сходятся к соответствующим моментам гауссовской случайной величины с параметрами (0, 1).

Замечание 1. Так же как и в работе [8], можно считать, что $A\geqslant -\infty$, $B\leqslant\infty$, и доказать, что утверждения лемм 4—6, теоремы 3 верны равномерно по $\theta_0\in[A+\delta, B-\delta]\cap[-L_T, L_T]$, где $\delta>0$ и L_T растет при $T\to\infty$ не быстрее некоторой степени γ_T.

4. Асимптотика шенноновской информации в ступенчатом процессе относительно параметра. Пусть θ — случайная величина с распределением вероятностей Q, обладающим плотностью $q(y)$ относительно меры Лебега, и с конечной дифференциальной энтропией $h(\theta) = -\int_\Theta q(y)\log q(y)\,dy$. Обозначим через $I(\xi,\theta)$ количество шенноновской информации, содержащейся в траектории $\xi=\xi_\theta$ процесса $\xi(t)=\xi_\theta(t)$ при $t\in[0, T]$ относительно параметра θ.

Теорема 4. Пусть почти для всех θ_0 относительно меры Q выполняются условия лемм 4—6, $\mathbf{E}|\log\beta(\theta)|<\infty$, где $\beta(\theta_0) = \lim_{T\to\infty}\gamma_T^2(\theta_0)\varphi_T^{-2}$ для некоторой функции φ_T, не зависящей от θ_0, и $\int|q(y+z)-q(y)|\,dy\leqslant D|z|^b$ для некоторых $D>0$ и $b>0$. Тогда при $T\to\infty$

$$I(\xi,\theta) = \log\varphi_T + h(\theta) - \mathbf{E}\log(2\pi e/\beta(\theta))^{1/2} + o(1). \quad (5)$$

Доказательство теоремы 4 при использовании лемм 4—6 аналогично доказательству теоремы из работы [9].

Замечание 2. Используя асимптотическую формулу (5), методом работы [10] можно исследовать асимптотическую достаточность и функцию риска статистических оценок.

1. *Линьков Ю. Н.* О различении сигналов в шуме.— В кн.: Пятый международный симпозиум по теории информации. Тезисы докладов, ч. 2. Москва—Тбилиси, 1979. 2. *Линьков Ю. Н.* Асимптотическая нормальность логарифма отношения правдоподобия и проверка гипотез для неоднородных процессов Пуассона.— Теория случайных процессов, 1980, вып. 8. 3. *Кутоянц Ю. А.* Оценка параметра интенсивности неоднородного процесса Пуассона.— Проблемы управления и теории информации, 1979, 8, № 2. 4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 3. М., 1975. 5. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М., 1964. 6. *Линьков Ю. Н.* Асимптотическое поведение вероятностей ошибок критерия наибольшего правдоподобия при различении точечных процессов с непрерывными компенсаторами.— В кн.: Поведение систем в случайных средах. Киев, 1979. 7. *Линьков Ю. Н.* О вероятностях ошибок проверки близких гипотез для диффузионных процессов.— Теория случайных процессов, 1979, вып. 7. 8. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Оценка параметра сигнала в гауссовском белом шуме.— Проблемы передачи информации, 1974, 10, вып. 1. 9. *Линьков Ю. Н.* Об информации в диффузионном процессе относительно параметра.— Теория случайных процессов, 1978, вып. 6. 10. *Линьков Ю. Н.* О неравенствах типа неравенства Крамера—Рао и асимптотической достаточности статистических оценок.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1978, вып. 19.

Поступила в редколлегию 03.05.79

Yu. N. Linkov

ASYMPTOTIC NORMALITY OF THE STOCHASTIC INTEGRALS AND STATISTICS OF THE DISCONTINUOUS PROCESSES

Asymptotic normality of the stochastic integrals with respest to local martingal measure is proved. By this fact the asymptotic behaviour of some statistical estimators and criteria for the processes with independent increments is studied.