УДК 519.21

И. К. МАЦАК, канд. физ.-мат. наук ВНИИПКНЕФТЕХИМ
А. Н. ПЛИЧКО, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА

1. Введение. Пусть (Ω, U, P) — вероятностное пространство, X — банахово пространство, X^* — его сопряженное пространство, B — σ-алгебра борелевских множеств в X. Под X-значной случайной величиной (X-с. в.) понимается B-измеримое отображение $(\Omega, U) \to (X, \mathrm{B})$. При рассмотрении сумм случайных величин мы предполагаем сепарабельность X, не оговаривая это особо.

В настоящей работе исследуется сходимость рядов и выполнение закона больших чисел для независимых X-с. в. Предлагается один метод изучения сходимости рядов $\Sigma\,\xi_k$ независимых X-с. в. для некоторых классов банаховых пространств. На этом пути могут быть получены некоторые достаточные условия сходимости в $C[0, 1]$, а если $\xi_k = c_k \zeta_k$, где ζ_k — независимые одинаково распределенные гауссовские величины, то можно указать необходимые и достаточные условия.

Отметим, что в терминах $\|\xi_k\|$ нельзя получить нетривиальные условия сходимости ряда $\Sigma \xi_k$ и выполнения закона больших чисел в общих банаховых пространствах, например, в пространствах, которые не B-выпуклы.

При рассмотрении сумм независимых X-с.в. большой интерес представляют пространства X типа G [1]. Показано, что пространство типа G суперрефлексивно.

2. **Сходимость случайных рядов.** Напомним, что множество $M \subset X^*$ называется тотальным, если для всякого $x \in X$ существует $f \in M$ такой, что $f(x) \neq 0$. В. В. Булдыгиным [2] получено следующее усиление одного результата Ито и Нисио [3].

Для сильной (т. е. в норме пространства X) сходимости с вероятностью единица (с в. 1) ряда $\Sigma \xi_k$ достаточно, чтобы для любого $f \in M$

$$P\left\{f\left(\sum_{1}^{n} \xi_k\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(S)\right\} = 1,$$

где S — X-с. в.

Если пространство X имеет базис $(e_n)_1^\infty$, то биортогональные функционалы f_n образуют тотальное множество.

Следствие 1. Пусть ξ_k — последовательность независимых симметричных X-с. в. Ряд $\Sigma \xi_k$ сильно сходится с в. 1 тогда и только тогда, когда

$$P\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty} f_n(\xi_k)\right] e_n \in X\right\} = 1.$$

Следствие 1 позволяет решать вопрос о сходимости рядов в пространствах X, в которых известны ограничения на последовательность c_k, такие, что $\Sigma c_k e_k \in X : l_p\ c_0$, пространства последовательностей Орлича, суперрефлексивные пространства и т. д.

Если X несепарабельно, а под случайной величиной в X понимается слабое распределение в X, то результат, приведенный выше, неверен. Действительно, пусть ε_k — последовательность Радемахера, т. е. последовательность независимых случайных величин, для которых $P\{\varepsilon_k = 1\} = P\{\varepsilon_k = -1\} = 1/2$, $X = l_\infty$. Для любого $x \in l_\infty$, $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ положим $f_n(x) = x_n$. Тогда $M = \{f_n\}_1$ — тотальное на l_∞ множество. Пусть $s_n = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, 0, 0 \ldots)$, $s = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \ldots)$. Ясно, что $f_n(s_k) = f_n(s)$ при $k \geqslant n$, но $\|s_n - s\| = 1$. Следовательно, мера, построенная по слабому распределению s, имеет несепарабельный носитель и не может быть продолжена до меры на σ-алгебре борелевских множеств, так как в l_∞ такая мера всегда имеет сепарабельный носитель.

Воспользуемся следствием 1 при получении условий сходимости рядов X-с. в. в случае, когда $X = l_p$, $p \geqslant 1$ [4]. Пусть e_n — естественный базис в l_p, f_n — биортогональные функционалы, ε_n — последовательность Радемахера и x_k — неслучайные элементы из l_p.

Предложение 1. Ряд $\Sigma\varepsilon_k x_k$ сильно сходится с в. 1 тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty} f_n^2(x_k)\right]^{p/2} < \infty, \tag{1}$$

и

$$M\,\|\Sigma\varepsilon_k x_k\| \leqslant c_p\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty} f_n^2(x_k)\right]^{p/2}\right|^{1/p}.$$

Если (1) не выполняется, то $P\{\Sigma\varepsilon_k x_k \overline{\in} l_p\} = 1$.

Доказательство. В силу следствия 1 сильная сходимость ряда $\Sigma\varepsilon_k x_k$ эквивалентна сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k f_n(x_k)\right|^p$.

Из неравенства Хинчина [5]

$$m_p\left(\sum_1^n \lambda_k^2\right)^{p/2} \leqslant M\left|\sum_1^n \varepsilon_k\lambda_k\right|^p \leqslant M_p\left(\sum_1^n \lambda_k^2\right)^{p/2} \tag{2}$$

следуют достаточность условия (1) и неравенство для средних значений нормы ряда. Положим $\xi_n = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k f_n(x_k)\right|^p$. Если (1) не выполнено, то применение левой половины неравенства (2) дает $\sum_1^{\infty} M\xi_n = \infty$. Можно предполагать, что $M\xi_n^2 < \infty$, ибо в противном случае ряд $\Sigma\varepsilon_k x_k$ не сходится слабо с в. 1, следовательно, и сильно. Воспользуемся следующим неравенством [6, с. 19]:

$$P\{\xi \geqslant \lambda M\xi\} \geqslant (1-\lambda)^2 (M\xi)^2/M\xi^2$$

для $\xi \in L_2(\Omega)$, $0 < \lambda < 1$. Тогда

$$P\left\{\sum_1^n \xi_k \geqslant \lambda\sum_1^n M\xi_k\right\} \geqslant (1-\lambda)^2\left(\sum_1^n M\xi_k\right)^2 \Big/ \left(\sum_{k,j=1}^n M\xi_k\xi_j\right).$$

Так как $\sum_{k,j=1}^n M\xi_k\xi_j \leqslant \left(\sum_1^n \sqrt{M\xi_k^2}\right)^2$, а из неравенства (2) нетрудно получить $(M\xi_n^2)^{1/2} \leqslant m_p^{-1} M_p^{1/2} M\xi_n$, то $P\{\Sigma\xi_n = \infty\} > 0$.

Второе утверждение предложения 1 следует из закона 0 или 1 Колмогорова и такой элементарной леммы.

Лемма 1. Пусть $\Sigma|a_n|^p < \infty$, $p \geqslant 1$, a_n, b_n — вещественные числа. Для сходимости ряда $\Sigma \mid a_n + b_n \mid^p$ необходимо и достаточно, чтобы $\Sigma \mid b_n|^p < \infty$.

Лемма 2. Пусть ξ_k — последовательность независимых симметричных l_p-с. в. Ряд $\Sigma\xi_k$ сильно сходится с в. 1 тогда и только тогда, когда

$$P\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty} f_n(\xi_k)^2\right]^{p/2} < \infty\right\} = 1. \qquad (3)$$

Если ε_k — последовательность Радемахера, независимая от ξ_k, то последовательности ξ_k и $\varepsilon_k\xi_k$ подобны. Поэтому справедливость леммы 2 следует из предложения 1.

Предложение 2. Условие (3) выполнено, если $\Sigma M \|\xi_k\|^{p'} < \infty$, где $p' = \min(p, 2)$.

Доказательство. Пусть $1 \leqslant p \leqslant 2$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty} f_n(\xi_k)^2\right]^{p/2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} | f_n(\xi_k)|^p = \sum_{1}^{\infty}\|\xi_k\|^p.$$

При $p \geqslant 2$ доказательство следует из неравенства [7, с. 35]

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\right)^r\right]^{1/r} \leqslant \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^r\right)^{1/r},$$

$x_{ij} \geqslant 0$, $r \geqslant 1$. В нашем случае $r = p/2$, $x_{ij} = f_i(\xi_j)^2$.

Следствие 2. Пусть ξ_k — последовательность независимых гауссовских l_p-с. в., $M\xi_k = 0$. Ряд $\Sigma\xi_k$ сильно сходится с в. 1 тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty} M(f_n(\xi_k))^2\right]^{p/2} < \infty.$$

Справедливость следствия 2 вытекает из леммы 2 и известных неравенств для моментов гауссовских величин.

3. **Закон больших чисел.** Пусть ξ_k — последовательность независимых симметричных X-с. в. Скажем, что она удовлетворяет усиленному закону больших чисел (у. з. б. ч.), если

$$P\left\{\left\|\sum_{1}^{n}\xi_k\right\|/n \to 0\right\} = 1.$$

А. Бек [8] получил необходимые и достаточные условия выполнения у. з. б. ч. в банаховых пространствах при условии $M\|\xi_k\|^2 < c$. Эта проблема изучалась в работах [9, 10]. Такого типа результат в одномерном случае принадлежит К. Чжуну [11].

Расстоянием Банаха — Мазура $d(X, Y)$ между банаховыми пространствами X и Y будем называть число $\inf\|T\|\|T^{-1}\|$, где T

пробегает все изоморфизмы между X и Y. Банахово пространство X B-выпукло, если $\sup_n \inf_{E_n} d(E_n, l_1^{(n)}) = \infty$, где inf берется по всем n-мерным подпространствам E_n пространства X, а $l_1^{(n)}$ — n-мерное векторное пространство с $\|x\| = \sum_1^n |a_n|$ для $x = \sum_1^n a_k e_k \in l_1^{(n)}$, e_k — естественные орты.

Предложение 3. Пусть ξ_k — последовательность симметричных независимых случайных величин со значениями в B-выпуклом пространстве X и $\varphi(t)$ — неубывающая вместе с $t^p/\varphi(t)$ $\forall p > 1$ функция, $\varphi(t) \geqslant 0$, $t \geqslant 0$.

А. Если $\sum_1^\infty 1/\varphi(n) < \infty$ и $M\varphi(\|\xi_k\|) < c$, то для последовательности ξ_k выполняется у. з. б. ч.

Б. Если $\sum_1^\infty 1/\varphi(n) = \infty$, то существует последовательность ξ_k, для которой $M\varphi(\|\xi_k\|) = 1$, но

$$P\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\| \sum_1^n \xi_k \right\| / n > 0\right\} = 1.$$

Доказательство. А. Положим

$$\bar{\xi}_k = \begin{cases} \xi_k, & \|\xi_k\| \leqslant k, \\ 0, & \|\xi_k\| > k. \end{cases}$$

Так как $\sum_1^\infty P\{\|\xi_k\| > k\} \leqslant \sum_1^n M\varphi(\|\xi_k\|)/\varphi(k) < \infty$, то по лемме Бореля — Кантелли ξ_k и $\bar{\xi}_k$ совпадают при достаточно больших k почти для всех $\omega \in \Omega$. Следовательно, достаточно доказать, что последовательность $\bar{\xi}_k$ удовлетворяет у. з. б. ч. Ясно, что $\bar{\xi}_k$ — симметричные независимые X-с. в. и для всякого $p > 1$

$$M\|\bar{\xi}_k\|^p \leqslant M_{\{\bar{\xi}_k \neq 0\}} \varphi(\|\bar{\xi}_k\|) \|\bar{\xi}_k\|^p / \varphi(\|\bar{\xi}_k\|) \leqslant ck^p/\varphi(k). \quad (4)$$

В работе [12] показано, что для B-выпуклого пространства X существует такое число $p > 1$, что X имеет тип p, т. е. выполняется неравенство

$$M\left\|\sum_1^n \xi_k\right\|^p \leqslant c \sum_1^n M\|\xi_k\|^p$$

для произвольных независимых X-с. в. ξ_k, $M\xi_k = 0$. Отсюда с учетом неравенства (4) следует, что ряд $\Sigma_k \bar{\xi}/k$ сходится сильно с в. 1.

Для окончания доказательства достаточно воспользоваться леммой Кронекера.

Б. Достаточно рассмотреть случай $X = R^1$. Пусть ξ_n — независимые случайные величины, $P\{\xi_n = n\} = P\{\xi_n = -n\} = 1/2\varphi(n)$, $P\{\xi_n = 0\} = 1 - 1/\varphi(n)$. Тогда $M\varphi(|\xi_n|) = 1$. Так как $\sum_1^\infty P\{|\xi_n| \geqslant n\} = \sum_1^\infty 1/\varphi(n) = \infty$, то по лемме Бореля — Кантелли

$$P\{\overline{\lim_{n\to\infty}} |\xi_n|/n \geqslant 1\} = 1,$$

что противоречит у. з. б. ч.

Замечание 1. Если в условиях предложения 3 $\Sigma 1/\varphi(a_n) < \infty$, $a_n \uparrow \infty$, то $P\left\{a_n^{-1}\left\|\sum_1^n \xi_k\right\| \to 0\right\} = 1$.

Замечание 2. Если X не B-выпуклое пространство, то нетрудно построить последовательность $x_k \in X$, $\|x_k\| = 1$, для которой

$$P\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{-1}\left\|\sum_1^n \varepsilon_k x_k\right\| > 0\right\} = 1,$$

где ε_k — последовательность Радемахера.

Говорят, что банахово пространство Y финитно представимо в банаховом пространстве X, если для всякого конечномерного подпространства $F \subset Y$ и $\lambda > 1$ найдется конечномерное подпространство $E \subset X$ той же размерности, для которого расстояние Банаха—Мазура $d(F, E) \leqslant \lambda$. Банахово пространство X называется суперрефлексивным, если в нем финитно представимы только рефлексивные пространства. Следующие условия эквивалентны [5]:

(I) X суперрефлексивно,

(II) X изоморфно равномерно гладкому пространству,

(III) X изоморфно равномерно выпуклому пространству,

(IV) Существуют $q \geqslant p > 1$ и константы K_1, K_2 такие, что для любых скаляров c_k

$$K_1 (\Sigma |c_k|^q)^{1/q} \leqslant \|\Sigma c_k e_k\| \leqslant K_2 (\Sigma |c_k|^p)^{1/p}, \quad (5)$$

где e_k — нормированная базисная последовательность в X. Пространства $L_p(\Omega, U, \mu)$ при $1 < p < \infty$ суперрефлексивны. Для $1 < r < \infty$ через $L_r(X)$ обозначим банахово пространство измеримых функций $\xi: \Omega \to X$, имеющих r-й момент $M\|\xi\|^r < \infty$ с естественной нормой.

Определение базисной последовательности в пространстве $L_r(X)$ можно сформулировать следующим образом. Последовательность $\xi_n \in L_r(X)$ называется базисной, если существует $c > 0$ такое, что для любых натуральных m, n, $m < n$ и любого набора скаляров a_k

$$M\left\|\sum_1^m a_k\xi_k\right\|^r \leqslant cM\left\|\sum_1^n a_k\xi_k\right\|^r.$$

Пусть ξ_k — последовательность независимых симметричных X-с. в. с $M\|\xi_k\|^r<\infty$. Тогда

$$M\left\|\sum_1^n a_k\xi_k\right\|^r = M\left\|\sum_1^m a_k\xi_k - \sum_{m+1}^n a_k\xi_k\right\|^r.$$

Поэтому

$$2\left(M\left\|\sum_1^m a_k\xi_k\right\|^r\right)^{1/r} = \left(M\left\|\sum_1^n a_k\xi_k + \sum_1^m a_k\xi_k - \sum_{m+1}^n a_k\xi_k\right\|^r\right)^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant \left(M\left\|\sum_1^n a_k\xi_k\right\|^r\right)^{1/r} + \left(M\left\|\sum_1^m a_k\xi_k - \sum_{m+1}^n a_k\xi_k\right\|^r\right)^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(M\left\|\sum_1^n a_k\xi_k\right\|^r\right)^{1/r}.$$

Отсюда следует, что ξ_k образуют базисную последовательность.

Предложение 4. Пусть X — суперрефлексивное пространство, ξ_k — базисная последовательность в $L_2(X)$ и $M\|\xi_k\|^r$ — ограниченная или медленно растущая функция при $k\to\infty$, тогда $\exists\varepsilon_1$, ε_2, $1>\varepsilon_2>\varepsilon_1>0$ такие, что

$$\lim M\left\|n^{\varepsilon_1-1}\sum_1^n \xi_k\right\| = 0. \tag{6}$$

Если $M\|\xi_k\|^2\geqslant c>0$, то

$$\lim_{n\to\infty} M\left\|n^{\varepsilon_2-1}\sum_1^n \xi_k\right\|^r = \infty. \tag{7}$$

Доказательство. Пространство X суперрефлексивно, следовательно [13], $L_p(X)$ тоже суперрефлексивно. Согласно (5) $\exists p, q, q\geqslant p>1$, для которых

$$K_1\left[\sum_1^n (M\|\xi_k\|^r)^{q/r}\right]^{1/q} \leqslant \left(M\left\|\sum_1^n \xi_k\right\|\right)^{1/r} \leqslant K_2\left[\sum_1^n (M\|\xi_k\|^r)^{p/r}\right]^{1/p}.$$

Отсюда получить (6) и (7) не представляет затруднений.

4. Пространства G_α. Напомним, что банахово пространство X называется равномерно гладким, если для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что при $\|x-y\|<\delta$ и $\|x\|=\|y\|=1$ $2<(1+\varepsilon)\times$

$\times \|x + y\|$. Отображение $x \to f_x$ из X в X^* называется опорным, если для $x \in X$, $\|x\| = 1$ $\|f_x\| = 1 = f_x(x)$ и $f_{\lambda x} = \lambda f_x$ для $\lambda \geqslant 0$. Пространство равномерно гладко тогда и только тогда, когда существует опорное отображение, которое равномерно непрерывно (в соответствующих нормах) отображает единичную сферу пространства X в единичную сферу сопряженного пространства X^*. Равномерно гладкое пространство рефлексивно, более того, оно суперрефлексивно [14].

Пространство X называется G_α-пространством [15], если существуют такая постоянная K и такое отображение $\varphi: X \to X^*$, что: а) $\|\varphi(x)\| = \|x\|^\alpha$, б) $<\varphi(x), x> = \|x\|^{1+\alpha}$, в) $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leqslant \leqslant K\|x - y\|$.

Предложение 5. G_α-Пространство равномерно гладко.

Доказательство. Построим опорное отображение следующим образом: положим $f_x = \varphi(x)$ для $\|x\| = 1$ и $f_{\lambda x} = \lambda f_x$. Условие в) обеспечивает равномерную непрерывность опорного отображения между сферами соответствующих пространств.

В работе [1] доказана центральная предельная теорема для G_1-пространств при условии его рефлексивности. В работе [15] это условие снято. Согласно предложению 5 при таком снятии не расширяется класс пространств, для которых верна центральная предельная теорема. Отметим, что для G_α-пространств отображение φ со свойствами а, б, в единственно.

1. *Fortet R., Mourier E.* Les fonctions aléatiores comme elements aléatiores dans les espaces de Banach.— Studia Math., 1955, 15, N 1. 2. *Булдыгин В. В. и др.* О структуре σ-алгебры борелевских множеств и сходимости некоторых случайных рядов в банаховых пространствах.— УМЖ, 1975, 27, N 4. 3. *Ito K., Nisio M.* On the convergence of sums of independent Banach space valued variables.— Osaka J Math., 1968, 5, N 1. 4. *Нгуен Зуй Тиен.* Замечание о сходимости рядов независимых случайных элементов со значениями в пространствах l_p, $1 \leqslant p < \infty$. — Теория вероятностей и ее применения, 1976, 21, вып. 2. 5. *Кадец М. И.* Геометрия нормированных пространств.— Итоги науки и техники. Математический анализ, 1975, 13. 6. *Кахан Ж.-П.* Случайные функциональные ряды. М., 1973. 7. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. М., 1965. 8. *Beck A.* A convexity condition in Banach spaces and the strong law of large numbers.— Proc. Amer. Math. Soc., 1962, 13, N 2. 9. *Woyczynski W. A.* Strong laws of large numbers in certain linear spaces.— Ann. Inst. Fourier, 1974, 24, 2. 10. *Hoffmann-Jorgensen J.* The strong law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces. Aarhus univ. Prepr., 1975, N 3. 11. *Chung K. L.* Note on some strong laws of large numbers.— Amer. J. Math., 1947, 69, N 1. 12. *Pisier G.* Sur les espaces de Banach qui ne contiennent pas uniformément de l_n^1.— C. r. Acad. Sci., 1973, 277, 20. 13. *Halperin I.* Function spaces.— In: Proc. Intern. Symp. Linear Spaces. Jerusalem, 1961. 14. *Diestel J.* Geometry of Banach spaces — selected topics.— In: Lecture notes in Mathematics, vol. 485. Berlin, 1975. 15. *Кварацхелия В. В., Нгуен Зуй Тиен.* Центральная предельная теорема и усиленный закон больших чисел в пространствах $l_p\{X\}$, $1 \leqslant p < \infty$. — Теория вероятностей и ее применения, 1976, 21, вып. 4.

Поступила в редколлегию 06.03.79

I. K. Matsak, A. N. Plichko

SUMS OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES IN BANACH SPACES

The convergence of series and realization of the law of large numbers are studied for independent Banach space valued random variables. The strengthening of Beck's result concerning the law of large numbers is given. It is noted that the G-spaces are superreflexive.