УДК 519.21

Ю. С. МИШУРА, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛУМАРТИНГАЛЫ И ТОЧЕЧНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

В настоящей работе приводится разложение для двупараметрических полумартингалов, аналогичное разложению Дуба — Мейера для полумартингалов, зависящих от одного аргумента, и применяется затем к изучению свойств точечных случайных полей.

1. Пусть $\vec{t}=(t_1, t_2)\in R_2^+$; $\vec{s}\leqslant\vec{t}$, если $s_1\leqslant t_1$, $s_2\leqslant t_2$ ($\vec{s}<\vec{t}$, если $s_1<t_1$, $s_2<t_2$), (Ω, F, P) — некоторое вероятностное пространство, $\{F_{\vec{t}}, \vec{t}\in R_2^+\}$ — непрерывный справа поток σ-алгебр $\left(F_{\vec{s}}\subset F_{\vec{t}}\right.$, если $\vec{s}\leqslant\vec{t}$, $F_{\vec{t}}\subset F$ для всех $\vec{t}\in R_2^+$, $\left.F_{\vec{t}}=\bigcap\limits_{\vec{s}\geqslant\vec{t}} F_{\vec{s}}\right)$, $\gamma_v^1=\bigvee\limits_{t\geqslant 0} F_{vt}$, $\gamma_v^2=\bigvee\limits_{t\geqslant 0} F_{tv}$, $\gamma_{\vec{t}}=\gamma_{t_1}^1\vee\gamma_{t_2}^2$. Далее рассматриваются случайные поля $\xi(\vec{t})$, $\vec{t}\in R_2^+$, удовлетворяющие условию

A: $\xi(\vec{t})$ $F_{\vec{t}}$-измеримо, $M|\xi(\vec{t})|<\infty$ для всех $\vec{t}\in R_2^+$, $\xi(0, t_2)=\xi(t_1, 0)=\xi$, где случайная величина ξ F_{00}-измерима, траектории $\xi(\vec{t})$ п. н. принадлежат пространству D функций $x(\vec{t})$, непрерывных справа, т. е. таких, что $x(\vec{t})=\lim\limits_{\vec{s}\downarrow\vec{t}, \vec{s}\geqslant\vec{t}} x(\vec{s})$.

Пусть $\square_{\vec{s}}\xi(\vec{t})=\xi(\vec{t})-\xi(s_1, t_2)-\xi(t_1, s_2)+\xi(\vec{s})$. Сильным (суб-, супер-) мартингалом назовем случайное поле $\xi(\vec{t})$, удовлетворяющее условию **A** и такое, что $M\{\square_{\vec{s}}\xi(\vec{t})/\gamma_{\vec{s}}\}=0$ ($\geqslant 0, \leqslant 0$), если $\vec{s}\leqslant\vec{t}$.

Далее будем предполагать, что поток σ-алгебр $F_{\vec{t}}$ удовлетворяет условию

B: для любых $\vec{s}$, $\vec{t}$ и $\vec{t}'$ таких, что $t_1 \leqslant s_1 \leqslant t_1'$, $t_2' \leqslant s_2 \leqslant t_2$ и любой F-измеримой интегрируемой случайной величины X

$$M\{X \mid F_{\vec{s}}/F_{\vec{t}} \vee F_{\vec{t}'}\} = M\{X/F_{t_1 s_2} \vee F_{s_1 t_2'}\}.$$

Введем для сильных полумартингалов условие

C: для любых $\vec{s}$, $\vec{t}$, $\vec{t}'$ таких, что $t_1 < t_1'$, $t_2 > t_2'$, $s_1 > t_1$, $s_2 > t_2''$,

$$M\{\xi(\vec{s})/F_{\vec{t}} \vee F_{\vec{t}'}\} = M\{\xi(\vec{s})/F_{\vec{t}}\} + M\{\xi(\vec{s})/F_{\vec{t}'}\} - \\ - M\{\xi(\vec{s})/F_{t_1 t_2'}\}.$$

Неотрицательный сильный супермартингал $\xi(\vec{t})$, удовлетворяющий условиям C и $\lim\limits_{t_1, t_2 \to \infty} M\xi(\vec{t}) = 0$, назовем сильным потенциалом.

Лемма 1. (Аналог разложения Рисса). Сильный супермартингал $\xi(\vec{t})$, удовлетворяющий условиям C и $\inf M\xi(\vec{t}) > -\infty$, допускает представление

$$\xi(\vec{t}) = \mu(\vec{t}) + \pi(\vec{t}), \tag{1}$$

где $\mu(\vec{t})$ — сильный мартингал, $\pi(\vec{t})$ — сильный потенциал, причем это представление единственно.

Доказательство. Рассмотрим случай дискретного времени (для непрерывного случая доказательство более громоздко, но аналогично). Пусть поток σ-алгебр F_{kl}, $k, l \in Z^+$ и сильный супермартингал $\{\xi(k, l), F_{kl}, k, l \in Z^+\}$ удовлетворяют дискретным аналогам условий A, B и C, $\inf M\xi(k, l) > -\infty$. Положим $\xi(p_1, p_2, k, l) = M\{\xi(p_1 + k, p_2 + l/F_{kl}\}$, $p_1, p_2 \in Z^+$. Тогда для любых фиксированных k, l и p_2

$$\xi(p_1', p_2, k, l) = M\{\xi(p_1' + k, p_2 + l)/F_{p_1+k\, p_2+l}/F_{kl}\} \leqslant \\ \leqslant M\{\xi(p_1 + k, p_2 + l)/F_{kl}\} = \xi(p_1, p_2, k, l)$$

п. н., если $p_1' \geqslant p_1$. Аналогично для любых фиксированных k, l и p_1 $\xi(p_1, p_2', k, l) \leqslant \xi(p_1, p_2, k, l)$ п. н., если $p_2' \geqslant p_2$. Поэтому траектории поля $\xi(p_1, p_2, k, l)$ п. н. монотонно не возрастают по p_1 и p_2, причем $M\xi(p_1, p_2, k, l) \geqslant C > -\infty$ для всех k, l, p_1 и p_2. Следовательно, п. н. существует предел $\mu(k, l) = \lim \xi(p_1, p_2, k, l)$, $\mu(k, l)$ имеет интегрируемую мажоранту $\xi(k, l)$ и для всех $k \leqslant m \leqslant k'$, $l \leqslant n \leqslant l'$

$$M\{\mu(m, n)/F_{kl'} \vee F_{k'l}\} = M\{\lim_{\vec{p} \to \infty} M\{\xi(p_1 + m, p_2 + n)/F_{mn}/F_{kl'} \vee$$

$$\bigvee F_{k'l}\} = \lim_{\vec{p}\to\infty} M\{\xi(p_1+m,\ p_2+n)/F_{ml} \bigvee F_{kn}\} =$$

$$= \lim_{\vec{p}\to\infty} (M\{\xi(p_1+m,\ p_2+n)/F_{ml}\} + M\{\xi(p_1+m,\ p_2+n)/F_{kn}\} -$$

$$- M\{\xi(p_1+m,\ p_2+n)/F_{kl}\}) = \mu(m, l) + \mu(k, n) - \mu(k, l),$$

т. е. $\mu(m, n)$ — сильный мартингал. Положим $\pi(k, l) = \xi(k, l) - \mu(k, l)$. Тогда $\pi(k, l) \geqslant 0$ и

$$\lim_{k,l\to\infty} M\pi(k, l) = \lim_{k,l\to\infty} M(\xi(k, l) - \lim_{\vec{p}\to\infty} M\{\xi(p_1+k,\ p_2+l)/F_{kl}\}) =$$

$$= \lim_{k,l\to\infty} M\xi(k, l) - \lim_{\vec{p}\to\infty} M\xi(p_1+k,\ p_2+l) = 0.$$

Следовательно, $\pi(k, l)$ — сильный потенциал. Пусть $\xi(k, l) = \mu_1(k, l) + \pi_1(k, l)$ — другое разложение, k_n и l_n, $n > 0$ — возрастающие последовательности натуральных чисел, $k_n \to \infty$, $l_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда для некоторых k_n и l_n имеем два разложения супермартингала: $\xi(k_n, l_n) = \mu_1(k_n, l_n) + \pi_1(k_n, l_n) = \mu_2(k_n, l_n) + \pi_2(k_n, l_n)$. Но согласно [1] $\mu_1(k_n, l_n) = \mu_2(k_n, l_n)$, т. е. $\mu_1(k, l) = \mu_2(k, l)$ п. н.

Замечание. Как указано в работе [2], сильный мартингал, измеримый относительно непрерывного справа потока σ-алгебр, допускает модификацию, непрерывную справа. Поэтому в разложении (1) $\mu(\vec{t})$ и $\pi(\vec{t})$ можно считать удовлетворяющими условию **A**.

Пусть $\Phi_{kl} = F_{k-1l} \bigvee F_{kl-1}$, $\square_{k-1l-1}\xi(k, l) = \xi(k, l) - \xi(k, l-1) - \xi(k-1, l) + \xi(k-1, l-1)$, $\Delta_1\xi(k, l) = \xi(k, l) - \xi(k-1, l)$, $\Delta_2\xi(k, l) = \xi(k, l) - \xi(k, l-1)$. Очевидно, для сильного супермартингала $\{\xi(k, l), F_{kl}\}$ $M\{\square_{k-1l-1}\xi(k, l)/\Phi_{kl}\} \leqslant 0$.

Приведем аналог разложения Дуба для случая дискретного времени.

Теорема 1. Сильный потенциал $\{\zeta_{kl}, F_{kl}, k, l \in Z^+\}$ допускает разложение $\zeta_{kl} = M\{\alpha_\infty/F_{kl}\} - \alpha_{kl}$, где α_{kl} — Φ_{kl}-измеримая случайная величина, $M\alpha_\infty < \infty$, $\alpha_{0l} = \alpha_{k0} = 0$, $\square_{k-1l-1}\alpha_{kl} \geqslant 0$, $\alpha_\infty = \lim_{k,l\to\infty} \alpha_{kl}$, причем это разложение единственно.

Для доказательства понадобится следующий результат, аналогичный одномерному случаю [1].

Лемма 2. Пусть $\{\xi_{kl}, F_{kl}, k, l \in Z^+\}$ — сильный супермартингал, причем $\inf M\xi_{kl} > -\infty$. Тогда совокупность случайных величин $\{\xi_{kl}\}$ равномерно интегрируема.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\{\zeta_{kl}, F_{kl}, k, l \in Z^+\}$ — сильный супермартингал, удовлетворяющий условию **C**, $\zeta_{0l} = \zeta_{k0} = \zeta$ п. н. Положим

$$\xi_{k0} = \xi_{0l} = \zeta, \quad k, l \in Z^+,$$

$$\xi_{11} = \xi_{10} + \xi_{01} - \xi_{00} + (\square_{00}\xi_{11} - M\{\square_{00}\zeta_{11}/\Phi_{00}\},$$

. . . .

$$\xi_{kl}=\xi_{kl-1}+\xi_{k-1l}-\xi_{k-1l-1}+(\square_{k-1l-1}\zeta_{kl}-$$
$$-M\{\square_{k-1l-1}\zeta_{kl}/\Phi_{kl}\},$$

. . . .

$$\alpha_{k0}=\alpha_{0l}=0,\qquad k,l\in Z^+,$$
$$\alpha_{11}=\alpha_{01}+\alpha_{10}-\alpha_{00}-M\{\square_{00}\zeta_{11}/\Phi_{00}\},$$

. . . .

$$\alpha_{kl}=\alpha_{kl-1}+\alpha_{k-1l}-\alpha_{k-1l-1}-M\{\square_{k-1l-1}\zeta_{kl}/\Phi_{kl}\},$$

. . . .

Тогда $\zeta_{kl}=\xi_{kl}-\alpha_{kl}$, $\square_{k-1l-1}\alpha_{kl}\geqslant 0$, α_{kl} — Φ_{kl}-измерима, ξ_{kl} — F_{kl}-измерим, $M\{\square_{k-1l-1}\xi_{kl}/\Phi_{k-1l-1}\}=0$, т.е. ξ_{kl} — сильный мартингал. Пусть α_{kl} и ζ_{kl}, $(k,l)\leqslant(m,n)$ определяются однозначно (это верно для $(m,n)=(m,0)$ и $(m,n)=(0,n)$). Тогда $M\{\zeta_{mn}/\Phi_{mn}\}=M\{\xi_{mn}-\alpha_{mn}/\Phi_{mn}\}=\xi_{mn-1}+\xi_{m-1n}-\xi_{m-1n-1}-\alpha_{mn}$, т. е. α_{mn}, значит, и ξ_{mn} определяется однозначно. Если ζ_{kl} — сильный потенциал, то в силу леммы 2 совокупность случайных величин $\{\zeta_{kl},\ k,l\in Z^+\}$ равномерно интегрируема, так как $\lim M\zeta_{kl}=0$; совокупность $\{\alpha_{kl},k,l\in Z^+\}$ также равномерно интегрируема, поскольку $\alpha_{kl}\leqslant\lim\alpha_{kl}=\alpha_\infty$, $M\alpha_\infty=\lim M\xi_{kl}=M\zeta$. Отсюда $\{\xi_{kl},\ F_{kl},\ k,\ l\in Z^+\}$ — равномерно интегрируемый сильный мартингал, и в силу [3] $\xi_{kl}=M\{\gamma/F_{kl}\}$, где $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_{k_nl_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_{k_nl_n}=\alpha_\infty$, поскольку $\zeta_{k_nl_n}$ — $F_{k_nl_n}$-потенциал и $\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_{k_nl_n}=0$ п. н., т. е.

$$\zeta_{kl}=M\{\alpha_\infty/F_{kl}\}-\alpha_{kl}. \tag{2}$$

Совокупность случайных величин $\{\alpha_{kl},\ F_{kl},\ k,l\in Z^+\}$ будем называть возрастающим интегрируемым случайным полем, если $\alpha_{k0}=\alpha_{0l}=0$, $k,l\in Z^+$, $\square_{k-1l-1}\alpha_{kl}\geqslant 0$, $M\alpha_\infty<\infty$, где $\alpha_\infty=\lim\alpha_{kl}$.

Лемма 3. Если возрастающее интегрируемое случайное поле α_{kl}, $k,l\in Z^+$ Φ_{kl}-измеримо, то для любого сильного ограниченного п. н. мартингала $\{\eta_{kl},\ F_{kl},\ k,\ l\in Z^+\}$ имеет место соотношение

$$M\Sigma_{k=1}^{\infty}\Sigma_{l=1}^{\infty}(\eta_{kl-1}+\eta_{k-1l}-\eta_{k-1l-1})\square_{k-1l-1}\alpha_{kl}=M\alpha_\infty\eta_\infty,$$

где $\eta_\infty=\lim\eta_{kl}$ (этот предел существует [3], ввиду ограниченности η_{kl}).

Доказательство. Заметим, что

$$\Sigma_{k=1}^{N}\Sigma_{l=1}^{N}(\eta_{kl-1}+\eta_{k-1l}-\eta_{k-1l-1})\square_{k-1l-1}\alpha_{kl}=\Sigma_{k=1}^{N-1}\Sigma_{l=1}^{N-1}\alpha_{kl}\times$$
$$\times(2\eta_{kl-1}+2\eta_{k-1l}-3\eta_{kl}-\eta_{k-1l-1}+\eta_{kl+1}+\eta_{k+1l}-\eta_{k+1l-1}-$$

$$- \eta_{k-1\, l+1}) + \Sigma_{k=1}^{N-1} \alpha_{kN} (\eta_{k-1\, N} + 2\eta_{kN-1} - \eta_{k-1N-1} - \eta_{kN} -$$

$$- \eta_{k+1N-1}) + \Sigma_{l=1}^{N-1} \alpha_{Nl} (\eta_{Nl-1} + 2\eta_{N-1l} - \eta_{N-1l-1} -$$

$$- \eta_{Nl} - \eta_{N-1l+1}) + \alpha_{NN} (\eta_{NN-1} + \eta_{N-1N} - \eta_{N-1\, N-1}).$$

Используя, как и в одномерном случае, теорему Лебега о мажорируемой сходимости и ограниченность мартингала η_{kl}, получаем

$$M\Sigma_{k=1}^{\infty}\Sigma_{l=1}^{\infty} (\eta_{kl-1} + \eta_{k-1l} - \eta_{k-1l-1}) \Box_{k-1l-1}\alpha_{kl} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \Sigma_{k=1}^{N-1}\Sigma_{l=1}^{N-1} (M\alpha_{kl} M \{- \Box_{k-1l-1}\eta_{kl}/\Phi_{kl}\} +$$

$$+ M\alpha_{kl} M (\Delta_1\eta (k+1,\, l) + \Delta_2\eta (k,\, l+1) - \Delta_1\eta (k-1,\, l+1) -$$

$$- \Delta_2\eta (k+1,\, l-1)/F_{kl}\}) + \lim_{N\to\infty} \Sigma_{k=1}^{N-1} (M\alpha_{kN} \times$$

$$\times M \{- \Box_{k-1N-1}\eta_{kN}/\Phi_{kN}\} + M\alpha_{kN} M \{- \Delta_1\eta_{k+1N-1}/F_{kN}\}) +$$

$$+ \lim_{N\to\infty} \Sigma_{l=1}^{N-1} (M\alpha_{Nl} M \{- \Box_{N-1l-1}\eta_{Nl}/\Phi_{Nl}\} + M\alpha_{Nl} M \times$$

$$\times \{- \Delta_2\eta_{N-1l+1}/F_{Nl}\} + \lim_{N\to\infty} M\alpha_{NN} (\eta_{NN-1} +$$

$$+ \eta_{N-1N} - \eta_{N-1N-1}) = M\alpha_\infty \eta_\infty.$$

Пусть $\Phi_{\vec{t}}$ — некоторый поток σ-алгебр, непрерывный справа, $\tilde{\gamma}_v^1 = \bigvee_{t\geqslant 0} \Phi_{vt}$, $\tilde{\gamma}_v^2 = \bigvee_{t\geqslant 0} \Phi_{tv}$. Случайную функцию $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ со значениями в R_2^+ назовем случайным моментом времени относительно потока $\Phi_{\vec{t}}$, если событие $\{\vec{\tau} \leqslant \vec{t}\} \in \Phi_{\vec{t}}$ для всех $\vec{t} \in R_2^+$. Пусть $\Phi_{\vec{\tau}} = \{A : A \cap \{\vec{\tau} \leqslant \vec{t}\} \in \Phi_{\vec{t}}\}$. Введем мартингал $\{\xi(\vec{t}), \Phi_{\vec{t}}\}$, допускающий представление $\xi(\vec{t}) = M\{\gamma/\Phi_{\vec{t}}\}$, где γ — интегрируемая случайная величина. Положим

$$\xi(\vec{\tau}) = \begin{cases} \xi(\vec{t}) & \text{при } \vec{\tau} = \vec{t}, \\ M\{\gamma/\tilde{\gamma}_{t_1}^1\} & \text{при } \tau_1 = t_1,\ \tau_2 = \infty, \\ M\{\gamma/\tilde{\gamma}_{t_2}^2\} & \text{при } \tau_1 = \infty,\ \tau_2 = t_2, \\ \gamma & \text{при } \tau_1 = \tau_2 = \infty. \end{cases}$$

Следующие результаты доказываются, с учетом [2], аналогично одномерному случаю [1].

Лемма 4. Пусть $\vec{\tau}$ — случайный момент времени, $\xi(\vec{t}) = M\{\gamma/\Phi_{\vec{t}}\}$. Тогда $\xi(\vec{\tau}) = M\{\gamma/\Phi_{\vec{\tau}}\}$.

Обозначим через Γ_{Φ} совокупность всех случайных моментов времени относительно $\Phi_{\vec{t}}$, $\vec{t} \in R_2^+$.

Лемма 5. Пусть $\{\xi^s(\vec{t}), \Phi^s_{\vec{t}}, \vec{t} \in R_2^+\}$, $s > 0$ — некоторая совокупность мартингалов, допускающих представление $\xi^s(\vec{t}) = M\{\gamma/\Phi^s_{\vec{t}}\}$. Тогда совокупность $\{\xi^s(\vec{\tau}), \vec{\tau} \in \Gamma_{\Phi^s}, s > 0\}$ равномерно интегрируема.

Пусть теперь $\{\xi(\vec{t}), F_{\vec{t}}, \vec{t} \in R_2^+\}$ — сильный полумартингал, $\sup M|\xi(\vec{t})| < \infty$. Для любого $s > 0$ совокупности σ-алгебр $\Phi^s_{\vec{t},1} = \gamma^1_{t_1} \vee F_{t_1+s t_2}$ и $\Phi^s_{\vec{t},2} = \gamma^2_{t_2} \vee F_{t_1 t_2+s}$ образуют потоки, непрерывные справа. Пусть $\check{\xi}^s(\vec{t}) = \xi(t_1, \infty) + \xi(t_1 + s, t_2) - \xi(\vec{t})$, $\hat{\xi}^s(\vec{t}) = \xi(\infty, t_2) + \xi(t_1, t_2 + s) - \xi(\vec{t})$. Полумартингал $\xi(\vec{t})$ назовем вполне равномерно интегрируемым, если семейства $\{\check{\xi}^s(\vec{\tau}), \vec{\tau} \in \Gamma_{\Phi^s_{\vec{t},1}}, s > 0\}$ и $\{\hat{\xi}^s(\vec{\tau}), \vec{\tau} \in \Gamma_{\Phi^s_{\vec{t},2}}, s > 0\}$ равномерно интегрируемы.

Лемма 6. Пусть $\{\xi^\lambda_{kl}, F^\lambda_{kl}, k, l \in Z^+\}$ — некоторая совокупность сильных потенциалов, α^λ_{kl} — случайное поле, участвующее в разложении (2) для ξ^λ_{kl}, Γ — совокупность всех конечных случайных моментов времени относительно Φ^1_{kl} $(\Phi^1_{kl} = \gamma^1_k \vee F^\lambda_{k+1l})$, $\check{\xi}^\lambda_{kl} = \xi^\lambda_{k\infty} + \xi^\lambda_{k+1l} - \xi^\lambda_{kl}$ и $\sup\limits_{\lambda \in \Lambda} \sup\limits_{\vec{\tau} \in \Gamma} \int_{\{|\check{\xi}^\lambda_{\vec{\tau}}| > C\}} \check{\xi}^\lambda_{\vec{\tau}}\, dP = \rho(C) < \infty$, $\rho(C) \to 0$ при $C \to \infty$. Тогда совокупность случайных величин α^λ_∞ равномерно интегрируема.

Доказательство. Пусть $\vec{\tau}^N = (\tau_1^N, \tau_2^N)$ — такая случайная величина, что $\{\tau_1^N = k, \tau_2^N = l\} = \{\alpha_{11} < N, \alpha_{12} < N, \ldots, \alpha_{1\infty} < N, \alpha_{21} < N, \ldots, \alpha_{k\infty} < N, \alpha_{k+11} < N, \ldots, \alpha_{k+1l} < N, \alpha_{k+1\,l+1} \geqslant N\}$. Тогда $\{\tau_1^N = k, \tau_2^N = l\} \in \Phi^1_{kl}$. (Индекс λ здесь и далее опускаем). В силу разложения (2), свойств равномерно интегрируемых сильных мартингалов, а также условия **C**

$$\check{\xi}_{kl} = M(\alpha_\infty/\Phi^1_{kl}\} - \alpha_{k\infty} - \alpha_{k+1l} + \alpha_{kl}.$$

Следовательно, из леммы 4 вытекает

$$\check{\xi}_{\vec{\tau}^N} = M\{\alpha_\infty/\Phi^1_{\vec{\tau}^N}\} - \alpha_{\tau_1^N \infty} - \alpha_{\tau_1^N+1\tau_2^N} + \alpha_{\vec{\tau}^N}.$$

Заметим, что $\{\alpha_\infty > N\} = \{\tau_1^N < \infty, \tau_2^N < \infty\}$, поэтому

$$\int_{\{\alpha_\infty > N\}} \alpha_\infty dP \leqslant \int_{\{\alpha_\infty > N\}} \check{\xi}_{\vec{\tau}^N} dP + 2NP\{\alpha_\infty > N\}.$$

Значит,

$$NP\{\alpha_{\infty>3N}\} \leqslant \int_{\{\alpha_\infty>3N\}} (\alpha_\infty - 2N)\, dP \leqslant \int_{\{\alpha_\infty>N\}} \check{\xi}_{\vec{\tau}_N} dP,$$

откуда

$$\int_{\{\alpha_\infty>3N\}} \alpha_\infty dP \leqslant \int_{\{\alpha_\infty>3N\}} \check{\xi}_{\vec{\tau}_N} dP + 6 \int_{\{\alpha_\infty>N\}} \check{\xi}_{\vec{\tau}_N} dP.$$

Далее, так как

$$\int_{\{\alpha_\infty>N\}} \check{\xi}_{\vec{\tau}_N} dP \leqslant \rho(C) + \int_{\{\alpha_\infty>N\}\cap\{\check{\xi}_{\vec{\tau}_N}<C\}} \check{\xi}_{\vec{\tau}_N} dP \leqslant$$

$$\leqslant \rho(C) + CP\{\alpha_\infty > N\}; \quad NP\{\alpha_\infty > N\} \leqslant M\alpha_\infty = M\xi_{00},$$

то

$$\int_{\{\alpha_\infty>3N\}} \alpha_\infty dP \leqslant 7\rho(C) + (19/3)\, CN^{-1} M\xi_{00}.$$

Полагая $C = N^{1/2}$, завершаем доказательство.

Пусть пространство $\mathbf{D}_1$ состоит из функций $x(\vec{t})$, принадлежащих $\mathbf{D}$ и таких, что для всех $\vec{s} \in R_2^+$ существуют 4 предела $x(s_1 - 0, s_2) = \lim\limits_{t_1 \uparrow s_1, t_2 \downarrow s_2} x(\vec{t})$ и т. д.

Назовем натуральным случайное поле $\alpha(\vec{t})$, $\vec{t} \in R_2^+$, удовлетворяющее следующим условиям: $\alpha(\vec{t})$ $F_{\vec{t}}$-измеримо, $\alpha(t_1, 0) = \alpha(0, t_2) = 0$, $\square_{\vec{s}} \alpha(\vec{t}) \geqslant 0$ п. н., если $\vec{s} \leqslant \vec{t}$, $\sup M\alpha(\vec{t}) < \infty$, траектории $\alpha(\vec{t})$ п.н. принадлежат $\mathbf{D}_1$, для произвольного неотрицательного сильного ограниченного п. н. мартингала $\eta(\vec{t})$, траектории которого п. н. принадлежат $\mathbf{D}_1$,

$$MS(\eta, \alpha) = M \int_0^\infty \int_0^\infty (\eta(t_1 - 0, t_2) + \eta(t_1, t_2 - 0) -$$

$$- \eta(\vec{t} - 0))\, d\alpha(\vec{t}) = M\alpha_\infty \eta_\infty.$$

Теорема 2. Сильный супермартингал $\{\xi(\vec{t}), F_{\vec{t}}, \vec{t} \in R_2^+\}$, удовлетворяющий условию $\mathbf{C}$, допускает представление вида $\xi(\vec{t}) = \mu(\vec{t}) - \alpha(\vec{t})$, где $\mu(\vec{t})$ — равномерно интегрируемый сильный мартингал, $\alpha(\vec{t})$ — натуральное поле, тогда и только тогда, когда $\xi(\vec{t})$ вполне равномерно интегрируем, причем это представление единственно.

Доказательство. *Необходимость.* Так как $\alpha(\vec{\tau}) < \infty$, $\alpha_{\tau_1\infty} < \infty$, $\alpha_{\infty\tau_2} < \infty$ для любого $\vec{\tau} \in \Gamma = \Gamma_{\Phi^s_{\vec{\tau},1}} \cup \Gamma_{\Phi^s_{\vec{t},2}}$ и $M\alpha_\infty < \infty$, то $\alpha(\vec{t})$ вполне равномерно интегрируем. Если $\mu(\vec{t})$ — равномерно интегрируемый сильный мартингал, то в силу [3] имеет место представление $\mu(t_1, \infty)+\mu(t_1+s, t_2)-\mu(\vec{t}) = M\{\mu(t_1+s, \infty)/\Phi^s_{\vec{t},1}\}$, и в силу леммы 5 $\mu(\vec{t})$ вполне равномерно интегрируем. Поэтому $\xi(\vec{t})$ вполне равномерно интегрируем.

Достаточность. Пусть $\{\xi(\vec{t}), F_{\vec{t}}, \vec{t}\in \vec{R}_2^+\}$—сильный супермартингал, удовлетворяющий условию **C**. Тогда согласно лемме 1 его можно единственным образом представить в виде $\xi(\vec{t}) = \mu(\vec{t}) + \pi(\vec{t})$, где $\mu(\vec{t})$ — сильный мартингал, $\pi(\vec{t})$ — сильный потенциал. Так как, например,

$$M\{\mu(t_1+s, \infty)/\Phi^s_{\vec{t},1}\}\leqslant M\{\xi(t_1+s, \infty)/\Phi^s_{\vec{t},1}\}\leqslant \xi(t_1, \infty)+$$
$$+\xi(t_1+s, t_2)-\xi(\vec{t}),$$

то $\mu(\vec{t})$, значит, и $\pi(\vec{t})$ вполне равномерно интегрируемы. Поэтому далее предполагаем, что $\xi(\vec{t})$ — вполне равномерно интегрируемый потенциал (в. р. и. п). Для каждого n $\xi^n_{kl} = \xi(k/2^n, l/2^n)$—в. р. и. п. относительно потока σ-алгебр $F^n_{kl} = F_{k/2^n l/2^n}$. В силу теоремы 1 $\xi^n_{kl} = M\{\alpha^n_\infty/F^n_{kl}\} - \alpha^n_{kl}$, где $\alpha^n_\infty = \lim \alpha^n_{kl}$, $\alpha^n_{k0} = \alpha^n_{0l} = 0$, $\square_{k-1\,l-1}\alpha^n_{kl}\geqslant 0$, α^n_{kl} — $F^n_{kl-1}\vee F^n_{k-1l}$-измерима. Так как $\xi(\vec{t})$ — в. р. и. п., то $\rho(C) = \sup\limits_{\vec{\tau}\in\Gamma}\int_{\{\xi(\vec{\tau})>C\}}\xi(\vec{\tau})\,dP<\infty$ и $\rho(C)\to 0$ при $C\to\infty$. К семейству потенциалов $\{\xi^n_{kl}, F^n_{kl}, k, l\in Z^+\}$, $n=1, 2, \ldots$ применима лемма 6. Поэтому последовательность $\{\alpha^n_\infty, n=1, 2, \ldots\}$ равномерно интегрируема. Так же, как и в одномерном случае, применяем теорему Данфорда — Петтиса, согласно которой существует n_j такая, что для любой п. н. ограниченной случайной величины η

$$M\alpha^{n_j}_\infty\eta\to M\alpha_\infty\eta,\ j\to\infty. \tag{3}$$

Совокупность случайных величин $\mu^n_{kr} = M\{\alpha^n_\infty/F^n_{kr}\}$ равномерно интегрируема, поскольку

$$NP\{\mu^n_{kr}>N\}\leqslant\int_{\{\mu^n_{kr}>N\}}\mu^n_{kr}dP = \int_{\{\mu^n_{kr}>N\}}\alpha^n_\infty dP\leqslant M\alpha^n_\infty.$$

Следовательно, μ^n_{kr} слабо компактна, и с помощью диагонального метода можно выбрать l_j такую, что $\alpha^{l_j}_\infty\Rightarrow\alpha_\infty$, $j\to\infty$ и $\mu^{l_j}_{kr}\Rightarrow\mu^\infty_{kr}$, $j\to\infty$ для всех двоично-рациональных k и r. Так как для всех $B_{kr}\in F_{kr}$

$$\int_{B_{kr}}\mu^\infty_{kr}dP = \lim_{j\to\infty}\int_{B_{kr}} M\{\alpha^{l_j}_\infty/F_{kr}\}\,dP = \lim_{j\to\infty}\int_{B_{kr}}\alpha^{l_j}_\infty dP = \int_{B_{kr}}\alpha_\infty dP,$$

то $\mu^\infty_{kr} = M\{\alpha_\infty/F_{kr}\}$.

Исходя из условия **C**, нетрудно показать, что

$$\mu_{kr}^{\infty} = -M\{\alpha_\infty/\gamma_{kr}\} + M\{\alpha_\infty/\gamma_k^1\} + M\{\alpha_\infty/\gamma_r^2\},$$

т. е. μ_{kr}^{∞} — сильный мартингал. Поскольку для $s_1 < r_1$, $s_2 < r_2$ $\square_{\vec{s}}\mu_{\vec{r}}^{n} - \square_{\vec{s}}\xi_{\vec{r}}^{n} = \square_{\vec{s}}\alpha_{\vec{r}}^{n} \geqslant 0$, то для любого $B \in F \int_B (\square_{\vec{s}}\mu_{\vec{r}}^{\infty} - \square_{\vec{s}}\xi_{\vec{r}}) \geqslant 0$, т. е. $\square_{\vec{s}}\mu_{\vec{r}}^{\infty} - \square_{\vec{s}}\xi_{\vec{r}} \geqslant 0$. Положим $\alpha(\vec{t}) = M\{\alpha_\infty/F_{\vec{t}}\} - \xi(\vec{t}) = \mu(\vec{t}) - \xi(\vec{t})$. Тогда $\mu(\vec{t})$ — сильный мартингал, траектории которого будем считать п. н. принадлежащими пространству **D**. Значит, траектории $\alpha(\vec{t})$ также п. н. принадлежат пространству **D**. Покажем, что $\alpha(\vec{t})$ — натуральное поле. Пусть $\eta(\vec{t})$ — ограниченный сильный мартингал, траектории которого п. н. принадлежат $\mathbf{D}_1$. Тогда

$$MS(\eta, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} (\eta(k-1/2^n, l/2^n) +$$

$$+ \eta(k/2^n, l-1/2^n) - \eta(k-1/2^n, l-1/2^n)) \times$$

$$\times \square_{k-1/2^n, l-1/2^n}\alpha(k/2^n, l/2^n) = \lim_{n\to\infty} M\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} (\eta(k-1/2^n, l/2^n) +$$

$$+ \eta(k/2^n, l-1/2^n) - \eta(k-1/2^n, l-1/2^n)) \times$$

$$\times \square_{k-1/2^n l-1/2^n}\xi(k/2^n, l/2^n) = \lim_{n\to\infty} M\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} (\eta(k-1/2^n, l/2^n) +$$

$$+ \eta(k/2^n, l-1/2^n) - \eta(k-1/2^n, l-1/2^n) \times$$

$$\times \square_{k-1\, l-1}\alpha_{kl}^n = \lim_{n\to\infty} M\eta_\infty\alpha_\infty^n.$$

Далее, согласно (3), $\lim\limits_{n\to\infty} M\eta_\infty\alpha_\infty^n = M\eta_\infty\alpha_\infty$, откуда $MS(\eta, \alpha) = M\eta_\infty\alpha_\infty$.

Единственность представления, с учетом условия **C**, доказывается так же, как и в одномерном случае.

Рассмотрим случайную величину τ такую, что для любого $t > 0$ $\{\tau < t\} \in F_{tt}$.

Случайное поле $\{\xi(\vec{t}), F_{\vec{t}}, \vec{t} \in R_2^+\}$ назовем локальным сильным полумартингалом, если существует монотонно неубывающая последовательность F_{tt}-измеримых случайных величин τ_n, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n = \infty$ и $\{\xi(t_1 \wedge \tau_n, t_2 \wedge \tau_n), F_{\vec{t}}, \vec{t} \in R_2^+\}$ — равномерно интегрируемый сильный полумартингал.

Теорема 3. Пусть $\{\xi(\vec{t}), F_{\vec{t}}\}$ — неотрицательный непрерывный сильный супермартингал, удовлетворяющий условию **C**. Тогда

$\vec{\xi}(\vec{t}) = \mu(\vec{t}) - \alpha(\vec{t})$, где $\mu(\vec{t})$ — локальный сильный мартингал, $\alpha(\vec{t})$ — натуральное поле, и это разложение единственно.

Доказательство. Введем последовательность случайных величин $\tau_n = \inf(t : \sup_{\vec{s} \leqslant (t,t)} \xi(\vec{s}) \geqslant n)$. Согласно [3] поле $\xi_n(\vec{t}) = \xi(t_1 \wedge \tau_n, t_2 \wedge \tau_n)$ будет сильным супермартингалом, причем вполне равномерно интегрируемым, так как $\xi_n(\vec{t}) \leqslant n$. По теореме 2 $\xi_n(\vec{t}) = \mu_n(\vec{t}) - \alpha_n(\vec{t})$, где $\alpha_n(\vec{t})$ — натуральное поле, причем $\mu_n(\vec{t}) = \mu_{n+1}(\vec{t})$, $\alpha_n(\vec{t}) = \alpha_{n+1}(\vec{t})$ для $\vec{t} \leqslant (\tau_n, \tau_n)$ и п. н. существуют пределы $\mu(\vec{t}) = \lim \mu_n(\vec{t})$, $\alpha(\vec{t}) = \lim \alpha_n(\vec{t})$, $\xi(\vec{t}) = \lim \xi_n(\vec{t})$, $\xi(\vec{t}) = \mu(\vec{t}) - \alpha(\vec{t})$.

Интегрируемость $\alpha(\vec{t})$ и единственность разложения доказываются аналогично одномерному случаю. Заметим, что вместо непрерывности ξ достаточно потребовать, чтобы $\xi(\tau_n, \tau_n) = n$.

2. Пусть (Ω, F, P) — полное вероятностное пространство, $\{F_{\vec{t}}, \vec{t} \in R_2^+\}$ — непрерывный справа поток σ-алгебр, $F_{\vec{t}}$ пополнены подмножествами из F, имеющими P-меру 0, и удовлетворяют условию **B**.

Пусть $\mathbf{D}_2$ — пространство функций $x(\vec{t})$, принадлежащих $\mathbf{D}_1$ и таких, что $\square_{\vec{t}-0} x(\vec{t}) = 1$ или 0, $x(t_1, 0) = x(0, t_2) = 0$, $x(\vec{t}) - x(\vec{t} - 0) \leqslant 2$.

Случайное поле $\xi(\vec{t})$, заданное на (Ω, F, P), назовем точечным, если $\xi(\vec{t})$ $F_{\vec{t}}$-измеримо и траектории $\xi(\vec{t})$ принадлежат $\mathbf{D}_2$. Пусть $\xi(\vec{t})$ удовлетворяет условию **C**.

Рассмотрим случайные величины $\tau_n = \inf(t : \xi(t, t) = n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Очевидно, $\{\tau_n \leqslant t\} \in F_{tt}$ (на тех ω, где $\xi(t, t) < n$ для всех t, полагаем $\tau_n = \infty$); точечное поле $\xi(\vec{t})$ локально ограничено $(\xi^n(\vec{t}) = \xi(t_1 \wedge \tau_n, t_2 \wedge \tau_n) \leqslant n)$ и имеет траектории в пространстве $\mathbf{D}_2$, причем любое приращение $\square_{\vec{s}} \xi(\vec{t}) \geqslant 0$, если $\vec{s} \leqslant \vec{t}$. Поэтому $\xi(\vec{t})$ — сильный локальный субмартингал и $\xi^n(\vec{t}) = \mu^n(\vec{t}) + A^n(\vec{t})$, где $\mu^n(\vec{t})$ — сильный мартингал, $A^n(\vec{t})$ — натуральное поле. Как и в теореме 3, нетрудно показать, что $\xi(\vec{t}) = \lim \xi^n(\vec{t})$, $\mu(\vec{t}) = \lim \mu_n(\vec{t})$,

$\vec{A}(\vec{t}) = \lim A^n(\vec{t})$, и

$$\xi(\vec{t}) = \mu(\vec{t}) + A(\vec{t}), \tag{4}$$

где $\mu(\vec{t})$ — локальный сильный мартингал. Натуральное поле $A(\vec{t})$ назовем компенсатором точечного поля $\xi(\vec{t})$.

Сильный мартингал $\mu(\vec{t})$ назовем квадратично интегрируемым, если $\sup M\mu^2(\vec{t}) < \infty$.

Рассмотрим некоторые свойства сильных мартингалов, порожденных точечными полями. Пусть $M\xi(\vec{t}) < \infty$, $\vec{t} \in R_2^+$.

Теорема 4. Сильный мартингал $\{\mu(\vec{t}), F_{\vec{t}}, \vec{t} \in R_2^+\}$ в разложении (4) является квадратично интегрируемым и имеет характеристику $\alpha(\vec{t})$ — случайное возрастающее интегрируемое поле, для которого $M\{(\square_{\vec{s}}\mu(\vec{t}))^2/\gamma_{\vec{s}}\} = M\{\square_{\vec{s}}\alpha(\vec{t})/\gamma_{\vec{s}}\}$, $\vec{s} \leqslant \vec{t}$ и $\alpha(\vec{t}) = A(\vec{t}) - \sum_{\vec{s} \leqslant \vec{t}} (\square_{\vec{s}-0} A(\vec{s}))^2$.

Доказательство. Пусть $\tau_n = \inf(t : \xi(t, t) = n) \wedge \inf(t: A(t, t) = n)$, $\widehat{\mu}(\vec{t}) = \mu(t_1 \wedge \tau_n, t_2 \wedge \tau_n)$. Тогда $|\widehat{\mu}(\vec{t})| \leqslant 2n + 1$, $\widehat{\mu}(\vec{t})$ — квадратично интегрируемый мартингал. Если $\vec{s} \leqslant \vec{t}$, то

$$M\{(\square_{\vec{s}}\widehat{\mu}(\vec{t}))^2/\gamma_{\vec{s}}\} = M\{\sum_{\vec{s} \leqslant \vec{u} \leqslant \vec{t}} (\square_{\vec{u}-0}\widehat{\mu}(\vec{u}))^2/\gamma_{\vec{s}}\} +$$

$$+ M\{\sum_{\substack{\vec{s} \leqslant \vec{u} \leqslant \vec{t} \\ \vec{s} \leqslant \vec{v} \leqslant \vec{t}}} \square_{\vec{u}-0}\widehat{\mu}(\vec{u})\, \square_{\vec{v}-0}\widehat{\mu}(\vec{v})/\gamma_{\vec{s}}\}.$$

Заметим, что для $\vec{s} \leqslant \vec{u}$, $\vec{s} \leqslant \vec{v}$, $\vec{u} \neq \vec{v}$

$$M\{\square_{\vec{u}-0}\widehat{\mu}(\vec{u})\, \square_{\vec{v}-0}\widehat{\mu}(\vec{v})/\gamma_{\vec{s}}\} = 0.$$

Поэтому

$$M\{(\square_{\vec{s}}\widehat{\mu}(\vec{t}))^2/\gamma_{\vec{s}}\} = M[\sum_{\vec{s} \leqslant \vec{u} \leqslant \vec{t}} (\square_{\vec{u}-0}\widehat{\mu}(\vec{u}))^2/\gamma_{\vec{s}}\} =$$

$$= M\{\sum_{\vec{s} \leqslant \vec{u} \leqslant \vec{t}} ((\square_{\vec{u}-0}\widehat{\xi}(\vec{u}))^2 + (\square_{\vec{u}-0}\widehat{A}(\vec{u}))^2 - 2\square_{\vec{u}-0}\widehat{\xi}(\vec{u}) \times$$

$$\times \square_{\vec{u}-0}\widehat{A}(\vec{u}))/\gamma_{\vec{s}}\} = M\{\square_{\vec{s}}\widehat{\mu}(\vec{t}) + \square_{\vec{s}}\widehat{A}(\vec{t}) - \sum_{\vec{s} \leqslant \vec{u} \leqslant \vec{t}} (\square_{\vec{u}-0}\widehat{A}(\vec{u}))^2 -$$

$$- 2\sum_{\vec{s} \leqslant \vec{u} \leqslant \vec{t}} \square_{\vec{u}-0}\widehat{A}(\vec{u})\, \square_{\vec{u}-0}\widehat{\mu}(\vec{u})/\gamma_{\vec{s}}\} = M\{\square_{\vec{s}}\widehat{A}(\vec{t}) -$$

$$- \Sigma_{\vec{s} \leqslant \vec{u} \leqslant \vec{t}} (\square_{\vec{u}-0} \widehat{A}(\vec{u}))^2 / \gamma_{\vec{s}} \}$$

$(\widehat{\xi}(\vec{u}) = \xi(u_1 \wedge \tau_n, u_2 \wedge \tau_n), \ \widehat{A}(\vec{u}) = A(u_1 \wedge \tau_n, u_2 \wedge \tau_n))$. Поскольку $\square_{\vec{u}-0} A(\vec{u}) \leqslant 1$ (это неравенство доказывается так же, как и в работе [4]) и поле $A(\vec{t})$ натурально, поле $\beta(\vec{t}) = A(\vec{t}) - \Sigma_{\vec{u} \leqslant t} (\square_{\vec{u}-0} \times \times A(\vec{u}))^2$ также является натуральным. Следовательно, $\alpha(\vec{t}) = \beta(\vec{t})$. Если $M\xi(\vec{t}) < \infty$, то $MA(\vec{t}) = M\xi(\vec{t}) < \infty$. Отсюда

$$M(\square_{\vec{s}} \widehat{\mu}(\vec{t}))^2 = M\square_{\vec{s}} \alpha(\vec{t}),$$

$$M\widehat{\mu}^2(\vec{t}) = M(\widehat{A}(\vec{t}) - \Sigma_{\vec{s} \leqslant \vec{t}} (\square_{\vec{s}-0} \widehat{A}(\vec{s}))^2) \leqslant M\widehat{A}(\vec{t}) \leqslant MA(\vec{t}) < \infty,$$

и по лемме Фату $M\mu^2(\vec{t}) \leqslant M\xi(\vec{t}) < \infty$.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 3. М., 1975. 2. *Cairoli R.* Une representation integrale pour les martingales fortes.— In.: Lectures Notes in Mathematics, vol. 649. Berlin, 1978. 3. *Гихман И. И.* Разностные мартингалы двух аргументов.— Труды школы-семинара по теории случайных процессов, Друскининкай, т. 1. Вильнюс, 1975. 4. *Кабанов Ю. М., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Мартингальные методы в теории точечных процессов.— Труды школы-семинара по теории случайных процессов, Друскининкай, т. 2. Вильнюс, 1975.

Поступила в редколлегию 01.02.79

Yu. S. Mishura

TWO-PARAMETRIC SEMIMARTINGALES AND POINT RANDOM FIELDS

The structure of two-parametric strong semimartingales is investigated. The sufficient conditions for presentations analogous to Riss and to Doob—Meyer are considered. The results obtained are applied to point random fields.