УДК 519.21

Ю. С. МИШУРА, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

РАЗЛОЖЕНИЕ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАРТИНГАЛОВ НА ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

Пусть $\mathrm{t}\in R_2^+$, $\mathrm{s}\leqslant\mathrm{t}$, если $s_1\leqslant t_1$, $s_2\leqslant t_2$, (Ω, F, P) — некоторое полное вероятностное пространство, F_t, $\mathrm{t}\in R_2^+$ — поток σ-алгебр, $F_{t_1 0}=F_{0t_2}=F_0$, $F_\mathrm{t}\subset F$, $\mathrm{t}\in R_2^+$; $\gamma_{t_1}^1=\bigvee_{t_2\geqslant 0}F_\mathrm{t}$, $\gamma_{t_2}^2=\bigvee_{t_1\geqslant 0}F_\mathrm{t}$, $\gamma_\mathrm{t}=\gamma_{t_1}^1\vee\gamma_{t_2}^2$.

Обозначим $\mathbf{D}$ пространство функций $x(\mathrm{t})\in R$, $\mathrm{t}\in R_2^+$ без разрывов второго рода, удовлетворяющих условию $x(\mathrm{t})=\lim\limits_{\mathrm{s}\downarrow\mathrm{t}}x(\mathrm{s})$, $x(t_1,0)=$

$= x(0, t_2) = x(0)$. Сильным (суб-, супер-) мартингалом назовем случайное поле $\{\xi(\mathrm{t}), F_{\mathrm{t}}\}$, траектории которого п. н. принадлежат $\mathbf{D}$ и которое таково, что $M|\xi(\mathrm{t})| < \infty$, $M\{\square_{\mathrm{s}}\xi(\mathrm{t})/\gamma_{\mathrm{s}}\} = 0$ $(\geqslant 0, \leqslant 0)$, $\mathrm{s} \leqslant \mathrm{t}$ $(\square_{\mathrm{s}}\xi(\mathrm{t}) = \xi(\mathrm{t}) - \xi(t_1, s_2) - \xi(s_1, t_2) + \xi(\mathrm{s}))$. Скачком поля $\xi(\cdot)$ в точке t назовем величину $\square\xi(\mathrm{t}) = \square_{\mathrm{t}-0}\,\xi(\mathrm{t})$. Сильные мартингалы $\xi(\mathrm{t})$ и $\zeta(\mathrm{t})$ назовем ортогональными $(\xi(\mathrm{t}) \perp \perp \zeta(\mathrm{t}))$, если $M(\square_{\mathrm{s}}\xi(\mathrm{t})\square_{\mathrm{s}}\zeta(\mathrm{t})/\gamma_{\mathrm{s}}) = 0$, $\mathrm{s} \leqslant \mathrm{t}$. В настоящей работе приводятся условия, при выполнении которых имеет место разложение вида $\xi(\mathrm{t}) = \xi_c(\mathrm{t}) + \xi_d(\mathrm{t})$, где ξ, ξ_c, ξ_d — сильные мартингалы, $\xi_c \perp \xi_d$, ξ_d — скачкообразное случайное поле, ξ_c непрерывно п. н. Такое разложение для однопараметрических мартингалов приведено в книге [1], для стохастически непрерывных полей с независимыми приращениями — в статье [2], для полей с независимыми приращениями без разрывов второго рода — в работе [3].

Обозначим через $\mathfrak{B}$ совокупность борелевских множеств на R, замыкание которых не содержит 0, через $\nu(\mathrm{t}, A)$ — число скачков поля $\xi(\cdot)$ на $[0, t_1] \times [0, t_2]$, значения которых попали во множество $A \in \mathfrak{B}$ $(\nu(\mathrm{t}, \omega, A) = 0$, если $\xi(\mathrm{t}, \omega) \bar{\in} \mathbf{D})$. Тогда случайное поле $\nu(\mathrm{t}, A)$ F_{t}-измеримо, его траектории неотрицательны, монотонно не убывают как функции двух переменных и принадлежат $\mathbf{D}$ $(\nu(0, t_2, A) = \nu(t_1, 0, A) = 0)$.

Пусть τ—случайный момент времени на потоке $\gamma^1_{t_1}$, $P\{\tau < \infty\} = 1$, γ^1_τ — σ-алгебра, порожденная τ. Аналогично определяем σ-алгебру γ^2_τ. Пусть $\xi(\mathrm{t})$ — F_{t}-измеримое случайное поле. Положим $\xi(\tau, t_2) = \xi(\mathrm{s}, t_2)$, если $\tau = \mathrm{s}$. Тогда $\xi(\tau, t_2)$ — γ^1_τ-измеримая случайная величина.

Случайное поле $\{\xi(\mathrm{t}), F_{\mathrm{t}}, \mathrm{t} \in R_2^+\}$ назовем t_1-регулярным, если для любого $t_2 \geqslant 0$ и любой монотонно неубывающей последовательности τ_n, $n \geqslant 0$ случайных моментов времени на $\{\gamma^1_{t_1}, t_1 \geqslant 0\}$, таких, что $\tau_n \uparrow \tau_0$, $P\{\tau_0 < \infty\} = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} M\xi(\tau_n, t_2) = M\xi(\tau_0, t_2).$$

Регулярным назовем t_1- и t_2-регулярное поле. Сильный мартингал принадлежит классу M_2^r, если $\xi(\mathrm{t})$ квадратично интегрируем и $\xi^2(\mathrm{t})$ — регулярное поле.

Лемма 1. Пусть $\xi(\mathrm{t}) \in M_2^r$. Тогда $\nu(\mathrm{t}, A)$ — регулярное поле, т. е. для любых последовательностей τ_n и θ_n случайных моментов времени соответственно на $\{\gamma^1_{t_1}, t_1 \geqslant 0\}$ и $\{\gamma^2_{t_2}, t_2 \geqslant 0\}$

$$\lim_{n\to\infty} M\nu(\tau_n, t_2, A) = M\nu(\tau_0, t_2, A); \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} M\nu(t_1, \theta_n, A) = M\nu(t_1, \theta_0, A); \tag{2}$$

если $\tau_n \uparrow \tau_0$, $\theta_n \uparrow \theta_0$, $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть $0 \leqslant \sigma \leqslant \tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_k = \tau - \{\gamma^{\mathrm{t}}_{t_1}, t_1 \geqslant 0\}$-случайные моменты времени, $0 = t_2^0 \leqslant t_2^1 \leqslant \ldots \leqslant t_2^k = t_2$, $\lambda = \max\limits_{i,j=\overline{1,k}} (\tau_i - \tau_{i-1} + t_2^j - t_2^{j-1})$. Тогда

$$\Sigma_{\substack{|\square\xi(s)|>\varepsilon \\ s\in[\sigma,\tau]\times[0,t_2]}} (\square\xi(s))^2 \leqslant \lim_{\lambda\to 0} \Sigma^k_{i,j=1} (\square_{\tau_{i-1}t_2^{j-1}}\xi(\tau_i, t_2^j))^2$$

п. н. Заметим, что для произвольных $t_1' < t_1$, $t_2' < t_2$

$$M(\xi(\mathrm{t})\xi(t_1, t_2') - \xi(t_1', t_2)\xi(\mathrm{t}')/F_{t_1't_2}) = M((\xi(t_1, t_2') -$$

$$-\xi(\mathrm{t}'))M(\xi(\mathrm{t}) - \xi(t_1', t_2)/\gamma_{\mathrm{t}}/F_{t_1't_2}) = M((\xi(t_1, t_2') - \xi(\mathrm{t}'))^2/F_{t_1t_2'}).$$

Следовательно, $M(\xi(\mathrm{t})\xi(t_1, t_2') - \xi(t_1', t_2)\xi(\mathrm{t}')/F_{t_1't_2}) = M(\alpha_{t_2'}(t_1) - \alpha_{t_2'}(t_1')/F_{t_1't_2})$, где $\alpha_{t_2'}(t_1)$ — квадратическая характеристика однопараметрического мартингала $\{\xi_{t_2'}(t_1) = \xi(t_1, t_2'), F_{t_1t_2'}, t_1 \geqslant 0\}$ (t_2' фиксировано). В силу t_1-регулярности $\xi^2(\mathrm{t})$ траектории $\alpha_{t_2'}(t_1)$ непрерывны по t_1. Итак, $\xi(\mathrm{t})\xi(t_1, t_2') = \mu_{t_2,t_2'}(t_1) + \alpha_{t_2'}(t_1)$, где $\{\mu_{t_2,t_2'}(t_1), F_{t_1t_2'}, t_1 \geqslant 0\}$ — мартингал. С другой стороны, взаимная характеристика $\alpha_{t_2,t_2'}(\cdot)$ мартингалов $\{\xi_{t_2}(t_1), F_{\mathrm{t}}, t_1 \geqslant 0\}$ и $\{\xi_{t_2'}(t_1), F_{\mathrm{t}}, t_1 \geqslant 0\}$ также непрерывна. В силу теоремы 21 § 1 [1]

$$\alpha_{t_2,t_2'}(t_1) = \alpha_{t_2'}(t_1). \tag{3}$$

Учитывая (3) и свойства случайной замены времени в однопараметрических мартингалах, для любого $i = \overline{1, k}$ получаем

$$M((\xi(\tau_i, t_2) - \xi(\tau_{i-1}, t_2))(\xi(\tau_i, t_2') - \xi(\tau_{i-1}, t_2')/F_{\sigma t_2}) =$$

$$= M(\alpha_{t_2'}(\tau_i) - \alpha_{t_2'}(\tau_{i-1})/F_{\sigma t_2}) = M(\xi^2(\tau_i, t_2') - \xi^2(\tau_{i-1}, t_2')/F_{\sigma t_2}).$$

Поэтому

$$M(\Sigma^k_{i,j=1}(\square_{\tau_{i-1}t_2^{j-1}}\xi(\tau_i\, t_2^j))^2/F_{\sigma t_2}) = M(\Sigma^k_{i,j=1}(\xi^2(\tau_i, t_2^j) -$$

$$-\xi^2(\tau_{i-1}, t_2^j) + \xi^2(\tau_i, t_2^{j-1}) - \xi^2(\tau_{i-1}, t_2^{j-1}) -$$

$$-2(\xi^2(\tau_i, t_2^{j-1}) - \xi^2(\tau_{i-1}, t_2^{j-1})))/F_{\sigma t_2}) = M(\xi^2(\tau, t_2) -$$

$$-\xi^2(\sigma, t_2)/F_{\sigma t_2}) = M(\alpha_{t_2}(\tau) - \alpha_{t_2}(\sigma)/F_{\sigma t_2}), \tag{4}$$

откуда для $A \subset \{x : |x| > \varepsilon\}$

$$M(\nu(\tau, t_2, A) - \nu(\sigma, t_2, A)) \leqslant M\Sigma_{\substack{|\square\xi(s)|>\varepsilon \\ s\in[\sigma,\tau]\times[0,t_2]}} (\square\xi(s))^2 \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^{-2} M(\alpha_{t_2}(\tau) - \alpha_{t_2}(\sigma)) < \infty. \tag{5}$$

Из (5) вытекает интегрируемость $\nu(t, A)$ и в силу непрерывности $\alpha_{t_2}(t_1)$ по t_1 — доказательство (1). Утверждение (2) доказывается аналогично.

Для каждого $t \in R_2^+$ $\nu(t, A)$ является аддитивной функцией на $\mathfrak{B}$. Она допускает продолжение до меры на $\mathfrak{B}$. Следовательно, определен интеграл $\xi_1(t) = \int\limits_R u\nu(t, du) = \sum_{\substack{s \leqslant t \\ \square\xi(s) \neq 0}} \square\,\xi(s)$ и из (4) легко вывести, что $M \int\limits_R u^2 \nu(t, du) < \infty$.

Предположим теперь, что поток σ-алгебр F_t удовлетворяет условию:

(A) для любой F-измеримой интегрируемой случайной величины X и любых s, t и t′ таких, что $t_1 \leqslant s_1 \leqslant t_1'$, $t_2' \leqslant s_2 \leqslant t_2$

$$M(M(X/F_s)/F_t \vee F_{t'}) = M(X/F_{t_1 s_2} \vee F_{s_1 t_2'}).$$

Введем обозначения

$$(*)\quad 0 \leqslant t_1' = t_1^0 \leqslant t_1^1 \leqslant \ldots \leqslant t_1^n = t_1, \quad 0 \leqslant t_2' = t_2^0 \leqslant t_2^1 \leqslant \ldots \leqslant t_2^n = t_2,$$

$$\lambda = \max_{l,k=\overline{1,n}} ((t_1^k - t_1^{k-1}) + (t_2^l - t_2^{l-1})),$$

$$F_{kl} = F_{t_1^k t_2^l}, \; \gamma_{kl} = F_{k-1\,l} \vee F_{kl-1},$$

$$\square\,\zeta_{kl} = \square_{t_1^{k-1} t_2^{l-1}} \zeta(t_1^k, t_2^l), \quad \Delta\zeta_l^{(1)} = \zeta(t_1, t_2^l) - \zeta(t_1, t_2^{l-1}),$$

$$\Delta\zeta_k^{(2)} = \zeta(t_1^k, t_2) - \zeta(t_1^{k-1}, t_2).$$

Случайное поле $\zeta(t)$ будем считать удовлетворяющим условию:

(B) 1) для любых t_1 и t_2 процессы $\{\zeta_{t_1}(\cdot) = \zeta(t), F_t, t_2 \geqslant 0\}$ и $\{\zeta_{t_2}(\cdot) = \zeta(t), F_t, t_1 \geqslant 0\}$ вполне равномерно интегрируемы,

2) $\sum_{k,l=1}^n (M(\square\zeta_{kl}/\gamma_{kl}) - M(\square\zeta_{kl}/F_{kl-1})) \to 0$ по вероятности при $\lambda \to 0$ для любых $t_1 > 0$, $t_2 > 0$.

Лемма 2. Сильный регулярный субмартингал $\{\zeta(t), F_t, t \in R_2^+\}$, удовлетворяющий условию (B), допускает единственное разложение вида $\zeta(t) = \mu(t) + \alpha(t)$, где $\mu(t)$ — сильный мартингал, $\alpha(t)$ удовлетворяет условию:

(C) $\alpha(t)$ F_t-измеримо, траектории его монотонно не убывают как функции двух переменных и непрерывны с вероятностью 1, $\alpha(t_1, 0) = \alpha(0, t_2) = 0$.

Доказательство. При выполнении условия (B) для любого $t_2 > 0$ субмартингал $\{\zeta_{t_2}(\cdot) = \zeta(t), F_t, t_1 \geqslant 0\}$ допускает единственное разложение вида $\zeta(t) = \mu_{t_2}(t_1) + \alpha_{t_2}(t_1)$, где $\{\mu_{t_2}(t_1), F_t, t_1 \geqslant 0\}$ — мартингал, $\alpha_{t_2}(t_1)$ — непрерывный интегрируемый процесс, возрастающий по t_1. Пусть в обозначениях (*) $t_1' = t_2' = 0$. В силу теоремы 21 § 1 [1] и условий (A)

$$\alpha_{t_2}(t_1) = P\text{-}\lim_{\lambda\to 0} \sum\nolimits_{k=1}^{n} M(\Delta\zeta_k^{(2)}/F_{k-1\,n}) =$$

$$= P\text{-}\lim_{\lambda\to\infty} \sum\nolimits_{k,i=1}^{n} M(\square\zeta_{ki}/F_{k-1\,i}). \tag{6}$$

Из (6) и условия (A) вытекает, что $\square_s(\alpha_{t_2}(t_1)) = \alpha_{t_2}(t_1) - \alpha_{s_2}(t_1) - \alpha_{t_2}(s_1) + \alpha_{s_2}(s_1) \geqslant 0$, $s \leqslant t$. Аналогично

$$\zeta(t) = \mu'_{t_1}(t_2) + \beta_{t_1}(t_2), \tag{7}$$

где $\{\mu'_{t_1}(t_2),\ F_t,\ t_2 \geqslant 0\}$ — мартингал, $\beta_{t_1}(t_2)$ — непрерывный интегрируемый возрастающий по t_2 процесс,

$$\beta_{t_1}(t_2) = P\text{-}\lim_{\lambda\to 0} \sum\nolimits_{i=1}^{n} M(\Delta\zeta_i^{(1)}/F_{n\,i-1}) =$$

$$= P\text{-}\lim_{\lambda\to 0} \sum\nolimits_{k,i=1}^{n} M(\square\zeta_{ki}/F_{k\,i-1}).$$

Покажем, что $\alpha_{t_2}(t_1) = \beta_{t_1}(t_2)$. Вначале докажем, что $\alpha(t)$ — непрерывное поле. Пусть $\tau_\varepsilon^n = \inf(i : \alpha(t_1, t_2^i) - \alpha(t_1, t_2^{i-1}) > \varepsilon) \wedge t_2$. Тогда событие $\{\tau_\varepsilon^n = i\} \in F_{t_1 t_2^i}$, для $t'_1 > t_1$, $\tau = \tau_\varepsilon^n$

$$M\mu(t'_1, t_2^\tau) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \int_{\{\tau=i\}} \mu(t'_1, t_2^i)\,dP =$$

$$= \sum\nolimits_{i=1}^{n} \int_{\{\tau=i\}} \mu(t_1, t_2^i)\,dP = M\mu(t_1, t_2^\tau) \tag{8}$$

и, поскольку для любых $t'_2 > t_2$ $\{\mu(t),\ F_{t_1 t'_2},\ t_1 \geqslant 0\}$ — мартингал,

$$M\mu(t'_1, t_2^{\tau-1}) = M\mu(t_1, t_2^{\tau-1}),\ t'_1 > t_1. \tag{9}$$

Пусть теперь $\tau_\varepsilon = \inf(t_2 : \alpha(t) - \alpha(t_1, t_2 - 0) > \varepsilon)$. Так как $t_2^{\tau_\varepsilon^n} \downarrow \tau_\varepsilon$, $t_2^{\tau_\varepsilon^n - 1} \uparrow \tau_\varepsilon$ при $n \to \infty$, то в силу регулярности $\zeta(t)$ и (8) — (9)

$$M(\square_{t_1 t_2^{\tau_\varepsilon^n - 1}} \alpha_{t_2}^{\tau_\varepsilon^n}(t'_1) \to 0,\ n \to \infty.$$

Следовательно, значение разности $\alpha_{\tau_\varepsilon}(t_1) - \alpha_{\tau_\varepsilon - 0}(t_1)$ постоянно вдоль линии разрыва $\{t_1 \geqslant 0,\ t_2 = \tau_\varepsilon\}$. Учитывая, что $\varepsilon > 0$ произвольно, а $\alpha_{\tau_\varepsilon}(0) - \alpha_{\tau_\varepsilon - 0}(0) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$, получаем $\alpha_{\tau_\varepsilon}(t_1) = \alpha_{\tau_\varepsilon - 0}(t_1)$, $t_1 \geqslant 0$, т. е. при каждом $t_1 > 0$ $\alpha_{t_2}(t_1)$ непрерывно по t_2. Из монотонности $\alpha_{t_2}(t_1)$ как функции двух переменных вытекает непрерывность п. н. поля $\alpha(t) = \alpha_{t_2}(t_1)$. Аналогично доказывается непрерывность $\beta(t) = \beta_{t_1}(t_2)$. Пусть теперь $M\alpha^2(t) < \infty$, $M\beta^2(t) < \infty$. Тогда

$$\alpha(t) = \underset{\lambda\to 0}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \sum\nolimits_{k=1}^{n} M(\Delta\alpha_k^{(2)}/F_{k-1\,n}),$$

следовательно,

$$M\left(M\left(\alpha(\mathrm{t})-\alpha(t_1,t_2')-\beta(\mathrm{t})+\beta(t_1,t_2')/F_{t_1t_2'}\right)\right)^2=$$

$$=\lim_{\lambda\to 0} M\Big(\sum_{i=1}^n \big(M\left(M\left(\Box_i\alpha/F_{i-1\,n}\right)/F_{t_1t_2'}\right)-$$

$$-M\left(M\left(\Box_i\beta/F_{in}\right)/F_{t_1t_2'}\right)\big)\Big)^2=\lim_{\lambda\to 0} M\Big(\sum_{i=1}^n M\left(\Box_i\alpha/F_{t_1^{i-1}t_2'}\right)-$$

$$-M\left(\Box_i\beta/F_{t_1^i t_2'}\right)\Big)^2=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n M\left(M\left(\Box_i\alpha/F_{t_1^{i-1}t_2'}\right)-\right.$$

$$\left.-M\left(\Box_i\beta/F_{t_1^i t_2'}\right)\right)^2\leqslant\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n M\left(\Box_i\beta\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{\lambda\to 0} M\sup_i \Box_i\beta\beta(\mathrm{t})=0\quad\left(\Box_i\beta=\Box_{t_1^{i-1}t_2'}\beta\left(t_1^i,t_2\right)\right),$$

т. е. в этом случае

$$M\left(\alpha'(\mathrm{t})-\alpha(t_1,t_2')/F_{t_1t_2'}\right)=M\left(\beta(\mathrm{t})-\beta(t_1,t_2')/F_{t_1t_2'}\right)=$$

$$=M\left(\zeta(\mathrm{t})-\zeta(t_1,t_2')/F_{t_1t_2'}\right).$$

Таким образом, при фиксированном t_1 $\alpha(\mathrm{t})$ является непрерывным интегрируемым возрастающим по t_2 процессом, причем $\zeta(\mathrm{t})=\alpha(\mathrm{t})+\nu_{t_1}(t_2)$, где $\{\nu_{t_1}(t_2),\ F_{\mathrm{t}},\ t_2\geqslant 0\}$ — мартингал. В силу единственности разложения (7) $\alpha(\mathrm{t})=\beta(\mathrm{t})$.

Переход к случаю $M\alpha^2(\mathrm{t})=\infty$ либо $M\beta^2(\mathrm{t})=\infty$ осуществляется так же, как в теореме 21 § 1 [1].

Теперь, в обозначениях (*), для любого n

$$M\left\{\Box_{\mathrm{t}'}\zeta(\mathrm{t})/\gamma_{\mathrm{t}'}\right\}=M\Big(\sum_{k,i=1}^n M\left(M\left(\Box\,\zeta_{ki}/\gamma_{ki}\right)/\gamma_{\mathrm{t}'}\right)\Big).$$

Равномерная интегрируемость совокупности случайных величин $\{\rho_n=\sum_{k,i=1}^n M\left(\Box\,\zeta_{ki}/\gamma_{ki}\right)\}$ и $\{\rho_n'=\sum_{k,i=1}^n M\left(\Box\,\zeta_{ki}/F_{k\,i-1}\right)\}$ доказывается аналогично соответствующему утверждению [4]. Поэтому в силу (**B**), 2)

$$M\left(\Box_{\mathrm{t}'}\zeta(\mathrm{t})/\gamma_{\mathrm{t}'}\right)=M\left(\lim_{\lambda\to 0}\rho_n/\gamma_{\mathrm{t}'}\right)=M\left(\lim_{\lambda\to 0}\rho_n'/\gamma_{\mathrm{t}'}\right)=M\left(\Box_{\mathrm{t}'}\alpha(\mathrm{t})/\gamma_{\mathrm{t}'}\right),$$

чем и завершается доказательство.

Замечание 1. Доказательство леммы 2 не изменится, если в условии (**B**), 2) заменить набор σ-алгебр $\{F_{k\,i-1},\ k,i=\overline{1,n}\}$ на $\{F_{k-1\,i},\ k,i=\overline{1,n}\}$.

Замечание 2. Если субмартингал $\zeta(\mathrm{t})$ регулярен, то достаточным для выполнения (**B**), 2) является условие

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k,i=1}^n M\left(M\left(\Box\zeta_{ki}/\gamma_{ki}\right)\right)^2=0.$$

В самом деле, тогда

$$M(\rho_n-\rho_n')^2=\sum_{k,l=1}^{n} M(M(\Box\zeta_{kl}/\gamma_{kl})-M(\Box\zeta_{kl}/F_{k\,l-1}))^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k,l=1}^{n} M(M(\Box\zeta_{kl}/\gamma_{kl}))^2\to 0,\ \lambda\to 0.$$

Замечание 3. Пусть $\xi(\mathrm{t})\in M_2^r$. Если заменить условие (B), 2) н

$$(\mathrm{B}')\quad \sum_{k,l=1}^{n}(M((\Box\xi_{kl})^2/\gamma_{kl})-M((\Box\xi_{kl})^2/F_{k\,l-1}))\xrightarrow{P}0,\ \lambda\to 0,$$

то аналогично доказательству леммы 2 можно показать существование и единственность поля $\alpha(\mathrm{t})$, удовлетворяющего условию (C и такого, что

$$M((\Box_{\mathrm{t}'}\xi(\mathrm{t}))^2/\gamma_{\mathrm{t}'})=M(\Box_{t'}\alpha(\mathrm{t})/\gamma_{\mathrm{t}'})$$

($\alpha(\mathrm{t})$ — квадратическая характеристика $\xi(t)$).

Лемма 3. Пусть $\xi(\mathrm{t})\in M_2^r$, $\xi(\mathrm{t})$ удовлетворяет условию (B′). Тогда для любых $\mathrm{t}\in R_2^+$, $\varepsilon>0$

$$p_1^\varepsilon=P\{\sup_{\substack{0\leqslant t_1^1\leqslant t_1\\ 0\leqslant t_2^1\leqslant t_2^2\leqslant t_2^3\leqslant t_2}}\min(|\Box_{t_1^1-0t_2^1}\xi(t_1^1,t_2^2)|,$$

$$|\Box_{t_1^1-0t_2^2}\xi(t_1^1,t_2^3)|)>\varepsilon\}=0,$$

$$p_2^\varepsilon=P\{\sup_{\substack{0\leqslant t_1^1\leqslant t_1^2\leqslant t_1^3\leqslant t_1\\ 0\leqslant t_2^1\leqslant t_2}}\min(|\Box_{t_1^1t_2^1-0}\xi(t_1^2,t_2^1)|,$$

$$|\Box_{t_1^2t_2^1-0}\xi(t_1^3,t_2^1)|)>\varepsilon\}=0.$$

Доказательство. Пусть в обозначениях (*) $t_1^r=t_2^r=0$. Тогда $p_1^\varepsilon=\lim\limits_{\lambda\to 0}p_{1,n}^\varepsilon$, где

$$p_{1,n}^\varepsilon=P\{\sup_{\substack{k=\overline{1,n}\\ 0\leqslant j\leqslant j_1\leqslant j_2\leqslant n}}\min(|\Box_{k-1\,j}\xi_{kj_1}|,\ |\Box_{k-1\,j_1}\xi_{kj_2}|)>\varepsilon\}.$$

Пусть

$$A_{kj}=\{\sup_{\substack{0\leqslant k'\leqslant k\\ 0\leqslant j\leqslant j_1\leqslant j_2\leqslant n}}\min(|\Box_{k'-1\,j}\xi_{k'j_1}|,\ |\Box_{k'-1\,j_1}\xi_{k'j_2}|)<\varepsilon,$$

$$|\Box_{k-1\,0}\xi_{k1}|<\varepsilon/2,\dots\ |\Box_{k-1\,0}\xi_{kj-1}|<\varepsilon/2,\ |\Box_{k-1\,0}\xi_{kj}|>\varepsilon/2\},$$

$$A_{kjj_1}=A_{kj}\cap\{|\Box_{k-1\,j}\xi_{kj+1}|<\varepsilon/2,\dots,|\Box_{k-1\,j_1-2}\xi_{k\,j_1-1}|<\varepsilon/2,$$

$$\Box_{k-1\,j_1-1}\xi_{kj_1}>\varepsilon/2\},$$

$$B_{kj}=\{|\Box_{k-1\,j}\xi_{kn}|>\varepsilon/4\},$$

$$\gamma_{kjj_1} = F_{k-1\, j_1} \vee F_{kj}, \quad \bar{\gamma}_{kj} = F_{k-1\, n} \vee F_{kj}.$$

Тогда, используя замечание 3 к лемме 2, получаем

$$p^{\varepsilon}_{1,n} \leqslant \sum\nolimits_{\substack{k,j=1\\ j_1=j}}^{n} P(A_{kjj_1}) = \sum\nolimits_{\substack{kj=1\\ j_1=j}}^{n} P(A_{kjj_1} \cap B_{kj_1}) +$$

$$+ \sum\nolimits_{\substack{k,j=1\\ j_1=j}}^{n} P(A_{kjj_1} \cap \bar{B}_{kj_1}) \leqslant \sum\nolimits_{\substack{k,j=1\\ j_1=j}}^{n} P(A_{kjj_1} \cap B_{kj_1}) +$$

$$+ \sum\nolimits_{k,j=1}^{n} P(A_{kj} \cap B_{kj}) = \sum\nolimits_{\substack{k,j=1\\ j_1=j}}^{n} \int_{A_{kjj_1}} P(B_{kj_1}/\gamma_{kjj_1})\, dP +$$

$$+ \sum\nolimits_{k,j=1}^{n} \int_{A_{kj}} P(B_{kj}/\gamma_{kj})\, dP \leqslant \varepsilon^{-2} \sum\nolimits_{\substack{k,j=1\\ j_1=j}}^{n} \int_{A_{kjj_1}} M((\Box_{k-1\, j_1}\xi_{kn})^2/$$

$$/\gamma_{kjj_1})\, dP + \varepsilon^{-2} \sum\nolimits_{k,j=1}^{n} \int_{A_{kj}} M((\Box_{k-1\, j}\xi_{kn})^2/\gamma_{kj})\, dP =$$

$$= \varepsilon^{-2} \sum\nolimits_{\substack{k,j=1\\ j_1=j}}^{n} \int_{A_{kjj_1}} \Box_{k-1\, j_1}\alpha_{kn} dP + \varepsilon^{-2} \sum\nolimits_{k,j=1}^{n} \int_{A_{kj}} \Box_{k-1\, j}\alpha_{kn} dP \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon^{-2} M \sup_{k,j=\overline{1,n}} \Box_{k-1\, j}\alpha_{kn} \to 0$$

при $\lambda \to 0$ в силу непрерывности поля $\alpha(\mathrm{t})$. Аналогично рассматривается p^{ε}_2.

Следствие. Траектории мартингала $\xi(\mathrm{t})$, удовлетворяющего условиям леммы 3, имеют не более одного скачка вдоль каждой из линий $\{t_1 = a,\ 0 \leqslant t_2 \leqslant b,\ a \in [0, T_1]\}$, $\{t_2 = b,\ 0 \leqslant t_2 \leqslant a,\ b \in [0, T_2]\}$, т. е. $\sup_{t_1 \leqslant T_1, t_2 \leqslant T_2} \max(\nu(\mathrm{t}) - \nu(t_1 - 0, t_2), \nu(\mathrm{t}) - \nu(t_1, t_2 - 0)) \leqslant 1$. Кроме того, п. н. для всех $\omega \in \Omega$ если $\Box_{\mathrm{t}-0}\xi(\mathrm{t}, \omega) > 0$, то величины $\xi(s_1, t_2, \omega) - \xi(s_1, t_2 - 0, \omega)$, $\xi(t_1, s_2, \omega) - \xi(t_1 - 0, s_2, \omega)$ постоянны для всех $\mathrm{s} \geqslant \mathrm{t}$.

Лемма 4. Пусть мартингал $\xi(\mathrm{t}) \in M_2^c$ и удовлетворяет условию (**B′**). Тогда для любого $A \in \mathfrak{B}$ поле $\nu(\mathrm{t}, A)$ допускает единственное разложение вида $\nu(\mathrm{t}, A) = \mu(\mathrm{t}, A) + \pi(\mathrm{t}, A)$, где $\mu(\mathrm{t}, A)$ — сильный мартингал, $\pi(\mathrm{t}, A)$ удовлетворяет условию (**C**).

Доказательство. Поскольку в силу леммы 1 $\nu(\mathrm{t}, A)$ — регулярное поле, достаточно проверить выполнение условия (**B**), 2). (Условие (**B**), 1) очевидно). В обозначениях (*) аналогично лемме 1 нетрудно доказать, что

$$M\{\Box_{\mathrm{t}'}\nu(\mathrm{t}, A)/\gamma_{\mathrm{t}'}) \leqslant M(\lim_{\lambda \to 0} \Sigma^{n}_{k,i=1} M(M((\Box\xi_{ki})^2/\gamma_{ki})/\gamma_{\mathrm{t}'})) =$$

$$= M(\Box_{\mathrm{t}'}\alpha(\mathrm{t})/\gamma_{\mathrm{t}'}).$$

Пусть теперь $M\alpha^2(\mathrm{t}) < \infty$. Тогда, в силу ортогональности слагаемых

$$M(\Sigma^{n}_{k,i=1}(M(\Box\nu_{ki}/\gamma_{ki}) - M(\Box\nu_{ki}/F_{ki-1})))^2 \leqslant$$

$$\leqslant \Sigma_{k,l=1}^{n} M\,(M\,(\square \nu_{kl}/\gamma_{kl}))^2 \leqslant \Sigma_{k,l=1}^{n} M\,(M\,(\square \alpha_{kl}/\gamma_{kl}))^2 \leqslant$$

$$\leqslant \Sigma_{k,l=1}^{n} M\,(\square \alpha_{kl})^2 \leqslant M \sup_{k,l=\overline{1,n}} \square \alpha_{kl} \cdot \alpha\,(\mathrm{t}) \to 0$$

при $\lambda \to 0$, так как α (t) непрерывно. Переход к случаю $M\alpha^2$ (t) $=$ $= \infty$ осуществляется аналогично теореме 21 [1]. Теперь, применяя лемму 2, завершаем доказательство.

Замечание 4. Траектории мартингала μ (t, A) п. н. принадлежат пространству **D**.

Пусть теперь $\tau_n = \inf (t : (\nu\,(t,\, t,\, A) \geqslant n) \wedge (\pi\,(t,\, t,\, A) \geqslant n))$, $\nu_n\,(\mathrm{t},\, A) = \nu\,(\tau_n \wedge t_1,\ \tau_n \wedge t_2,\ A)$, $\pi_n\,(\mathrm{t},\, A) = \pi\,(\tau_n \wedge t_1,\ \tau_n \wedge t_2,\ A)$, $\mu_n\,(\mathrm{t},\, A) = \mu\,(\tau_n \wedge t_1, \tau_n \wedge t_2, A)$.

Тогда в силу следствия к лемме 3 и непрерывности π (t, A) ν_n (t, A) $\leqslant n$, π_n (t, A) $\leqslant n$, откуда μ_n (t, A) $\leqslant 2n$. Следовательно, μ_n является в силу [5] локальным квадратично интегрируемым мартингалом в смысле [6]. Аналогично одномерному случаю нетрудно показать, что для любого $n > 0$ $\mu_n \in M_2^r$.

Пусть $\square \mu_{kl} = \square_{t_1^{k-1} t_2^{l}} \mu_n\,(t_1^k,\, t_2^l,\, A)$, тогда

$$\Sigma_{k,l=1}^{n} M\,(M\,((\square \mu_{kl})^2/\gamma_{kl}))^2 \leqslant 16n \Sigma_{k,l=1}^{n} M\,(M\,(|\,\square \mu_{kl}^{*}\,|/\gamma_{kl}))^2 \leqslant$$

$$\leqslant 16n \Sigma_{k,l=1}^{n} M\,(M\,(\square \nu_{kl} + \square \pi_{kl}/\gamma_{kl}))^2 \leqslant$$

$$\leqslant 16n \Sigma_{k,l=1}^{n} (M\,(\square \alpha_{kl})^2 + M\,(\square \pi_{kl})^2) \to 0,$$

$\lambda \to 0$, т. е. поле μ_n удовлетворяет условию (**B**$'$) и, следовательно существует единственное поле $\beta_n\,(t)$, удовлетворяющее условию (**C**) и такое, что $M\,((\square_{\mathrm{t}'} \mu_n\,(\mathrm{t},\, A))^2/\gamma_{\mathrm{t}'}) = M\,(\square_{\mathrm{t}'} \beta_n\,(\mathrm{t})/\gamma_{\mathrm{t}'})$. Как и для процессов, можно показать, что $\beta_n = \pi_n\,(\cdot\,,\, A)$, т. е. $\pi_n(\cdot\,,\, A)$ — квадратичная характеристика $\mu_n\,(\cdot\,,\, A)$.

Далее, пусть $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Поскольку $\nu\,(\mathrm{t},\, A_1 \cup A_2) = \nu\,(\mathrm{t},\, A_1) +$ $+ \nu\,(\mathrm{t},\, A_2)$, то в силу единственности разложения регулярных субмартингалов $\pi\,(\mathrm{t},\, A_1 \cup A_2) = \pi\,(\mathrm{t},\, A_1) + \pi\,(\mathrm{t},\, A_2)$, т. е. для любого $\mathrm{t}' \leqslant \mathrm{t}$

$$M\,((\square_{\mathrm{t}'} \mu_n\,(\mathrm{t},\, A_1) + \square_{\mathrm{t}'} \mu_n\,(\mathrm{t},\, A_2))^2/\gamma_{\mathrm{t}'}) =$$

$$= M\,(\square_{\mathrm{t}'} \pi_n\,(\mathrm{t},\, A_1) + \square_{\mathrm{t}'} \pi_n\,(\mathrm{t},\, A_2)/\gamma_{\mathrm{t}'}),$$

откуда $M\,(\square_{\mathrm{t}'} \mu_n\,(\mathrm{t},\, A)\, \square_{\mathrm{t}'} \mu_n\,(\mathrm{t},\, A_2)/\gamma_{\mathrm{t}'}) = 0$. Таким образом, $\mu\,(\mathrm{t},\, A_1)$ $\mu\,(\mathrm{t},\, A_2)$ являются локальными квадратично интегрируемыми ортогональными мартингалами. По аналогии с одномерным случаем, семейство $\{\mu\,(\cdot\,,\, A),\ A \in \mathfrak{B}\}$ естественно назвать ортогональной случайной мерой с характеристикой π (t, A).

Учитывая ортогональность меры μ (t, A), по ней, как и для однопараметрических мартингалов, можно построить стохастический интеграл ξ_d (t) $= \int_R u\mu\,(\mathrm{t},\, du) \in M_2^r$ с квадратической характеристикой $\int_R u^2 \pi\,(\mathrm{t},\, du)$, включающий «все скачки» поля ξ (t), т. е. такой, что поле ξ_c (t) $= \xi$ (t) $- \xi_d$ (t) непрерывно п. н. (доказательство этого факта такое же, как и в одномерном случае). Сформулируем теперь основной результат.

Теорема. Пусть $\xi(t) \in M_2^c$ и удовлетворяет условию (B'). Тогда $\xi(t)$ допускает единственное разложение вида

$$\xi(t) = \xi_c(t) + \int_R u\mu(t, du),$$

где $\xi_c(t)$ — непрерывный с вероятностью 1 сильный мартингал, $\mu(t, A)$ — ортогональная мартингальная мера с характеристикой $\pi(t, A)$, причем $\mu(t, A) + \pi(t, A) = \nu(t, A)$, $\nu(t, A)$ — число скачков $\xi(s)$ при $s \in [0, t_1] \times [0, t_2]$, попавших во множество A, $\xi_d(t) = \int_R u\mu(t, du)$ ортогонален любому сильному непрерывному F_t-мартингалу, и $M\int_R u^2\nu(t, du) < \infty$.

Доказательство. Достаточно доказать ортогональность $\xi_c(t)$ и $\xi_d(t)$ и единственность разложения. Пусть $\zeta(t)$ — произвольный непрерывный мартингал класса M_2^c. Тогда в обозначениях (*) для любого n

$$M(\Box_{t'}\zeta(t)\,\Box_{t'}\mu(t, A)/\gamma_{t'}) = M(\Sigma_{k,i=1}^{n}\Box\zeta_{ki}\Sigma_{k,i=1}^{n}\Box\mu_{ki}/\gamma_{t'}) =$$

$$= M(\Sigma_{k,i=1}^{n}\Box\zeta_{ki}\Box\mu_{ki}/\gamma_{t'}) \leqslant M(\sup_{k,i=\overline{1,n}}|\Box\zeta_{ki}|(\nu(t, A) +$$

$$+ \pi(t, A))/\gamma_{t'}) \to 0$$

п. н. при $\lambda \to 0$, т. е. $\zeta(t) \perp \mu(t, A)$.

Положив $\eta_m(t) = \int_R g_m(u)\mu(t, du)$, где $g_m(u) = \Sigma_{k=-m2^m}^{m2^m} k/2^m \times \chi\{u \in [k/2^m, k + 1/2^m)\}$, убеждаемся, что $\eta_m(t) \perp \zeta(t)$. Осуществив соответствующий предельный переход, получаем $\zeta(t) \perp \perp \zeta_d(t)$.

Пусть существует еще одно разложение $\xi(t) = \xi_c'(t) + \xi_d'(t)$. Тогда $\xi_c(t) - \xi_c'(t) = \xi_d(t) - \xi_d'(t)$. Так как $M(\Box_{t'}(\xi_c(t) - \xi_c'(t)) \times \Box_{t'}(\xi_d(t) - \xi_d(t'))/\gamma_{t'}) = 0$, то $M((\Box_{t'}(\xi_c(t) - \xi_c'(t))^2/\gamma_{t'}) = 0$, откуда в силу непрерывности $\xi_c(t)\,\xi_c(t) = \xi_c'(t)$, $t \in R_2^+$ с вероятностью 1.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 3. М., 1975. 2. *Каткаускайте А. Л.* Случайные поля с независимыми приращениями.— Литовский математический сборник, 1972, N 4. 3. *Hudson W. N.* A decomposition theorem for biadditive processes.— Pacific Journal of Mathematics, 1972, 42, N 2. 4. *Гихман И. И.* Квадратически интегрируемые разностные мартингалы двух аргументов.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1976, вып. 15. 5. *Гихман И. И.* Разностные мартингалы двух аргументов.— Труды школы-семинара по теории случайных процессов. Друскининкай, 1974. 6. *Мишура Ю. С.* Двупараметрические мартингалы и точечные случайные поля. (См. настоящий выпуск).

Поступила в редколлегию 11.10.79

Yu. S. Mishura

EXPANSION OF TWO-PARAMETRIC MARTINGALES IN ORTHOGONAL COMPONENTS

Conditions are studied under which for strong two-parametric martingale $\zeta(t)$ there exists espansion

$$\xi(t) = \xi_c(t) + \xi_d(t)$$

where ξ_d, ξ_c — jump, continuous stochastic fields, ξ_d is orthogonal to any continuous strong martingale.