УДК 519.21

А. В. СКОРОХОД, чл.-кор. АН УССР
Институт математики АН УССР
Т. И. НАСИРОВА, канд. физ.-мат. наук
Институт кибернетики АН АзССР

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ПРОЦЕССОВ В ОДНОЙ СХЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Рассмотрим процесс $\zeta(t)$, который характеризует количество продукта на складе, поступающего через времена ξ_k^+, $k=1, 2, \ldots$ партиями размера η_k^+, $k=1, 2, \ldots$, и выдаваемого через времена ξ_k^-, $k=1, 2, \ldots$ партиями η_k^-, $k=1, 2, \ldots$. Если наличного продукта меньше, чем указано в k-й заявке, то он выдается весь, а последующие заявки пропадают до очередного поступления продукта. Процессы такого рода рассматривались в работах [1, 2]. Будем предполагать, что совокупности неотрицательных величин $\{\xi_k^+\}$, $\{\eta_k^+\}$, $\{\xi_k^-\}$, $\{\eta_k^-\}$ независимы и в каждой совокупности величины независимы и одинаково распределены. Нас будет интересовать асимптотика $\zeta(t)$ при $t\to\infty$.

1. Предварительно исследуем процесс $\eta(t)=\sum\limits_{i=1}^{\nu(t)}\eta_i$, где $\nu(t)=k$ при $\sum\limits_{i=1}^{k}\xi_i\leqslant t<\sum\limits_{i=1}^{k+1}\xi_i$, а $\{\eta_k\}$, $\{\zeta_k\}$ независимы в совокупности и в каждой группе одинаково распределены.

Теорема 1. Пусть существует $M\xi_1=a_1$, $M\eta_1=a_2$, $D\xi_1=b_1$, $D\eta_1=b_2$. Положим

$$\eta_T(t)=\frac{[\eta(Tt)-a_2a_1^{-1}Tt]}{\sqrt{(b_1a_2^2+b_2a_1^2)\,a_1^{-3}T}}. \tag{1}$$

Тогда распределение $\eta_T(t)$, $t\in[0, 1]$ слабо сходится при $T\to\infty$ к распределению винеровского процесса $w(t)$, $t\in[0, 1]$.

Для доказательства потребуются некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 1. $\eta(t)$ при $t \to \infty$ асимптотически нормален со средним ta_2/a_1 и дисперсией $t(b_1a_2^2 + b_2a_1^2)/a_1^3$.

Доказательство. Имеем

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^{\nu(t)} (\eta_i - a_2) + a_2\nu(t). \tag{2}$$

Поскольку $\nu(t) \sim t/a_1$ (в силу теоремы восстановления), то, используя теорему Р. Л. Добрушина о пределе сложной функции [3], можно утверждать, что первая сумма справа будет асимптотически нормальна со средним 0 и дисперсией tb_2/a_1, при этом она асимптотически не зависит от $\nu(t)$; $\nu(t)$ по теореме Феллера [4, с. 438] асимптотически нормален со средним t/a_1 и дисперсией $tb_1a_2^2/a_1^3$. Остается воспользоваться асимптотической независимостью слагаемых справа в (2). Лемма доказана.

Лемма 2. $\eta_T(t)$ имеет асимптотически независимые приращения, причем распределения $\eta_T(t+h) - \eta_T(t)$ и $\eta_T(h)$ асимптотически совпадают.

Доказательство. Имеем

$$\eta_T(t+h) - \eta_T(t) = (T/\sqrt{Tc})\left[\sum_{i=\nu(tT)+1}^{\nu((t+h)T)} (\eta_i - a_2) + \right.$$
$$\left. + a_2\{[\nu((t+h)T) - \nu(tT)] - Th/a_1\}\right],$$

где $c = (b_1a_2^2 + b_2a_1^2)/a_1^3$. Те же соображения, что и в первой лемме, показывают, что эта величина асимптотически нормальна с дисперсией h и средним 0, при этом она асимптотически не зависит от $\nu(tT)$ и η_k при $k \leqslant \nu(tT)$. Лемма доказана.

Из этих двух лемм вытекает, что конечномерные распределения процесса $\eta_T(t)$ при $T \to \infty$ сходятся к конечномерным распределениям винеровского процесса $w(t)$, $t \in [0, 1]$. Для доказательства теоремы остается проверить условие компактности мер в $D_{[1,\ 0]}$ — пространстве функций без разрывов второго рода. Как вытекает из теоремы 2 § 5 гл. VI [5], для этого достаточно показать, что

$$P\{\sup_{t \leqslant s \leqslant t+h} |\eta_T(s) - \eta_T(t)| > \varepsilon\} = o(h) \tag{3}$$

для всех $t \in [0, 1]$ и $\varepsilon > 0$. Для проверки условия (3) нам будет полезно следующее утверждение.

Лемма 3. Для всех $t < u$ и $x > 0$

$$P\left\{\sup_{t \leqslant s \leqslant u} \left|\nu(s) - \nu(t) - \frac{1}{a_1}(s-t)\right| > x\right\} \leqslant$$
$$\leqslant P\left\{\sup_{k \leqslant x < (u-t)/a_1} \left|\sum_{i=1}^{k} (\xi_i - a_1)\right| > a_1(x-1)\right\}.$$

Доказательство. Если при $s>t$ $\nu(s)-\nu(t)-a_1^{-1}(s-t)>x$, а значит, $\nu(s)-\nu(t)>a_1^{-1}(s-t)+x$, то

$$\sum_{i=\nu(t)+1}^{\nu(t)+[x+a_1^{-1}(s-t)]} \xi_i < s-t,$$

$$\sum_{i=\nu(t)+1}^{\nu(t)+[x+a_1^{-1}(s-t)]} (\xi_i - a_1) < s-t-a_1[x+a_1^{-1}(s-t)] <$$

$$< s-t-a_1(x+a_1^{-1}(s-t)-1) = -a_1(x-1).$$

Аналогично при $\nu(s)-\nu(t)-a_1^{-1}(s-t)<x$

$$\sum_{i=\nu(t)+1}^{\nu(t)+[x+a_1^{-1}(s-t)]} (\xi_i - a_1) > a_1(x-1).$$

Таким образом, событие

$$\{\sup_{t\leqslant s\leqslant u} |\nu(s)-\nu(t)-a_1^{-1}(s-t)|>x\}$$

влечет событие

$$\left\{\sup_{\nu(t)\leqslant k\leqslant \nu(t)+[x+a_1^{-1}(u-t)]} \left|\sum_{i=\nu(t)+1}^{k}(\xi_i-a_1)\right| > a_1(x-1)\right\}.$$

Остается заметить, что последнее событие от $\nu(t)$ не зависит, его вероятность такая же, как при $\nu(t)=0$. Лемма доказана.

Теперь можем записать

$$P\{\sup_{t\leqslant s\leqslant t+h} |\eta_T(s)-\eta_T(t)|>\varepsilon\} \leqslant P\left\{\sup_{t\leqslant s\leqslant t+h}\frac{1}{\sqrt{Tc}} \times\right.$$

$$\left.\times\left|\sum_{i=\nu(tT)+1}^{\nu(sT)}(\eta_i-a_2)\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right\} + P\left\{\sup_{t\leqslant s\leqslant t+h}\left|\nu(sT)-\nu(tT)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{T(s-t)}{a_1}\right|>\frac{\varepsilon\sqrt{Tc}}{2|a_2|}\right\} \leqslant 2P\left\{\sup_{t\leqslant s\leqslant t+h}\left|\nu(sT)-\nu(tT)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{T(s-t)}{a_1}\right|>\frac{\varepsilon\sqrt{Tc}}{2|a_2|+1}\right\} + P\left\{\sup_{t\leqslant s\leqslant t+h}\frac{1}{\sqrt{Tc}}\left|\sum_{i=\nu(tT)+1}^{\nu(sT)}(\eta_i-a_2)\right|>\frac{c}{2};\right.$$

$$\left.\sup_{t\leqslant s\leqslant t+h}\left|\nu(sT)-\nu(tT)-\frac{T(s-t)}{a_1}\right|\leqslant\frac{\varepsilon\sqrt{Tc}}{2|a_2|+1}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant 2P\left\{\sup_{k\leqslant \frac{\varepsilon}{2|a_2|+1}\sqrt{Tc}+Th}\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i-a_1)\right|>a_1\left(\frac{\varepsilon\sqrt{Tc}}{2|a_2|+1}-1\right)\right\}+$$

$$+P\left\{\sup_{k\leqslant \frac{Th}{a_1}+\frac{\varepsilon}{2|a_2|+1}\sqrt{Tc}}\left|\sum_{i=\nu(tT)+1}^{\nu(tT)}(\eta_i-a_2)\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Мы воспользовались леммой 3. Заметим, что последняя вероятность от $\nu(tT)$ не зависит. Поэтому

$$P\left\{\sup_{t\leqslant s\leqslant t+h}|\eta_T(s)-\eta_T(t)|>\varepsilon\right\}\leqslant 2P\left\{\sup_{k\leqslant Th+\frac{\varepsilon\sqrt{Tc}}{2|a_2|+1}}\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i-\right.\right.$$

$$\left.\left.-a_1)\right|>a_1\left(\frac{\varepsilon\sqrt{Tc}}{2|a_2|+1}-1\right)\right\}+P\left\{\sup_{k\leqslant\frac{Th}{a_1}+\frac{\varepsilon\sqrt{Tc}}{2|a_2|+1}}\left|\sum_{i=1}^{k}(\eta_i-\right.\right.$$

$$\left.\left.-a_2)\right|>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{Tc}\right\}.$$

Воспользовавшись следствием из работы [5, с. 488], убеждаемся, что правая часть последнего неравенства при $T\to\infty$ стремится к выражению

$$2P\left\{\sup_{s\leqslant h}|w(s)|>\frac{\varepsilon a_1}{2|a_1|-1}\sqrt{\frac{c}{b_1}}\right\}+P\left\{\sup_{s\leqslant h/a_1}|w(s)|>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{c}{b_2}}\right\}.$$

Так как $P\{\sup_{s\leqslant h}|w(s)|>\alpha\}\leqslant 2P\{|w(h)|>\alpha\}=o(h)$, то соотношение (3), значит, и теорема 1, доказаны.

2. Построим теперь по величинам $\xi_k^{\pm}$, $\eta_k^{\pm}$ процессы, аналогичные тем, которые рассмотрены в предыдущем пункте. Положим $\nu^{\pm}(t)=k$ при $\xi_1^{\pm}+\ldots+\xi_k^{\pm}\leqslant t<\xi_1^{\pm}+\ldots+\xi_{k+1}^{\pm}$, $\zeta^{\pm}(t)=\sum_{k=1}^{\nu^{\pm}(t)}\eta^{\pm}(k)$. Очевидно, что при сделанных предположениях процессы $\zeta^{+}(t)$ и $\zeta^{-}(t)$ являются процессами полумарковского блуждания. Пусть

$$\hat{\zeta}(t)=\zeta^{+}(t)-\zeta^{-}(t). \tag{4}$$

Процесс $\hat{\zeta}(t)$ описывал бы изменение количества продукта на складе, если бы не было экрана в нуле (например, если бы учитывался долг склада всем потребителям, подавшим заявки). Процесс $\zeta(t)$ получается из $\hat{\zeta}(t)$ с помощью задерживающего экрана в точке нуль. Как показано А. А. Боровковым [6],

$$\zeta(t)=\hat{\zeta}(t)-\inf_{s\leqslant t}\hat{\zeta}(s). \tag{5}$$

Формула (5) дает возможность исследовать асимптотику $\zeta(t)$ по асимптотике $\hat{\zeta}(t)$. Для $\hat{\zeta}(t)$ из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть существуют $M\xi_1^{\pm}=a_1^{\pm}$, $M\eta_1^{\pm}=a_2$, $D\xi_1^{\pm}=b_1^{\pm}$, $D\eta_1^{\pm}=b_2^{\pm}$. Тогда распределение процесса

$$\hat{\zeta}_T(t)=\left(\hat{\zeta}(Tt)-\left(\frac{a_2^+}{a_1^+}-\frac{a_2^-}{a_1^-}\right)Tt\right)\times$$

$$\times\left(T\left[\frac{(a_1^+)^2 b_2^+ +(a_2^+)^2 b_1^+}{(a_1^+)^3}+\frac{(a_1^-)^2 b_2^- +(a_2^-)^2 b_1^-}{(a_1^-)^3}\right]\right)^{-1/2}$$

на [0, 1] слабо сходится при $T\to\infty$ к распределению винеровского процесса $w(t)$, $t\in[0,1]$.

Для процесса $\zeta(t)$ рассмотрим два случая. Если $\frac{a_2^+}{a_1^+}-\frac{a_2^-}{a_1^-}>0$, то $\hat{\zeta}(t)\to+\infty$ при $t\to\infty$ и, значит, величина $\inf\limits_s\zeta(s)$ конечна. Поэтому $\zeta(t)-\hat{\zeta}(t)$ ограничено. Отсюда вытекает такое утверждение.

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 2 и $a_1^-a_2^+>a_1^+a_2^-$, то $\zeta(t)$ асимптотически нормален со средним $\left(\frac{a_2^+}{a_1^+}-\frac{a_2^-}{a_1^-}\right)t$ и дисперсией ct,

$$c=\frac{(a_1^+)^2 b_2^+ +(a_2^+)^2 b_1^+}{(a_1^+)^3}+\frac{(a_1^-)^2 b_2 +(a_2^-)^2 b_1^-}{(a_1^-)^3}.$$

Замечание. При тех же условиях распределение процесса

$$\zeta_T(t)=\frac{1}{\sqrt{Tc}}\left[\zeta-(Tt)\,Tt\left(\frac{a_2^+}{a_1^+}-\frac{a_2^-}{a_1^-}\right)\right],\quad t\in[0,1]$$

слабо сходится к распределению винеровского процесса $w(t)$, $t\in[0,1]$.

Как показано в работе [2], при $\frac{a_2^+}{a_1^+}-\frac{a_2^-}{a_1^-}<0$ для процесса $\zeta(t)$ при нерешетчатых $\xi_k^{\pm}$ выполняется эргодическая теорема. Рассмотрим теперь случай $a_1^-a_2^+=a_1^+a_2^-$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $a_1^- a_2^+ = a_1^+ a_2^-$. Тогда распределение процесса $\zeta_T(t) = \frac{1}{\sqrt{Tc}} \zeta(Tt)$ слабо сходится к распределению процесса $|w(t)|$, $t \in [0, 1]$, где $w(t)$ винеровский процесс.

Доказательство. $\zeta_T(t) = \hat{\zeta}_T(t) - \inf_{s \leq t} \hat{\zeta}_T(s)$. Функция $y(t) = x(t) - \inf_{s \leq t} x(s)$ непрерывно переводит $D_{[0,1]}$ в $D_{[0,1]}$. Поэтому из слабой сходимости $\hat{\zeta}_T(t)$ к $w(t)$ вытекает слабая сходимость $\zeta_T(t)$ к $w(t) - \inf_{s \leq t} w(s) = z(t)$. При $z(t) > 0$

$$dz(t) = dw(t), \tag{6}$$

а процесс $-\inf_{s \leq t} w(s)$ непрерывен и лишь нули $z(t)$ являются точками роста. Кроме того, распределение $z(t)$ в фиксированный момент времени совпадает с распределением $|w(t)|$. Это легко получить, используя формулу для совместного распределения $w(t)$ и $\inf_{s \leq t} w(s)$ при $y < 0$

$$P\{w(t) < x, \inf_{s \leq t} w(s) < y\} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2t} du, & x \leq y; \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{y} e^{-u^2/2t} du + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} \displaystyle\int_{2y-x}^{\infty} e^{-u^2/2t} du, & x > y \end{cases}$$

(см. например, [7, с. 351, теорема 2]). Поэтому $z(t)$ есть процесс удовлетворяющий (6) с мгновенным отражением в точке 0 (поскольку $P\{z(t) = 0\} = 0$). Значит, его распределения совпадают с распределением $|w(t)|$ (см. [8, § 23]). Теорема доказана.

1. *Насирова Т. И., Скороход А. В.* Об одном классе скачкообразных процессов с задерживающим экраном.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1977, вып. 16. 2. *Скороход А. В., Насирова Т. И.* Об эргодической теореме для класса процессов, построенных по суммам независимых случайных величин.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1980, вып. 22. 3. *Добрушин Р. Л.* Лемма о пределе сложной функции.— УМН, 1955, 10, вып. 2. 4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М., 1967. 5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 1. М., 1971. 6. *Боровков А. А.* Вероятностные методы в теории массового обслуживания. М., 1972. 7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М., 1977. 8. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, 1968.

Поступила в редколлегию 11.06.79

A. V. Skorohod, T. I. Nasirova

ON ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE PROCESSES IN A SCHEME OF RESERVES CONTROL

Let $\zeta(t)$ be process which describes the cash resources of some products. It is assumed that this product enters by portions which have the size η_k^+ at the moments ξ_1^+, $\xi_1^+ + \xi_2^+$, ... and is spent by portions η_k^- at the moments ξ_1^-, $\xi_1^- + \xi_2^-$, ... The limit behaviour of $\zeta(t)$ is investigated.